

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 629.7.052

ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С УПРАВЛЕНИЕМ И НАБЛЮДЕНИЕМ

© 2019 г. В. И. Каленова^{а,*}, В. М. Морозов^{а,**}

^а НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: kalen@imec.msu.ru

**e-mail: moroz@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 30.10.2017 г.

После доработки 02.08.2018 г.

Рассматриваются некоторые классы линейных нестационарных систем, содержащих управления и наблюдения, которые допускают приведение к стационарным системам при помощи конструктивного преобразования, расширяющего пространство состояний. В качестве содержательного примера приведена задача о калибровке бескарданной инерциальной навигационной системы на одностепенном поворотном стенде.

DOI: 10.1134/S0002338819010086

Введение. Многие задачи механики и техники, в частности задачи динамики и управления движущимися объектами, приводят к необходимости исследования нестационарных нелинейных систем и их линеаризованных моделей. Одним из основных методов изучения линейных нестационарных систем (ЛНС), как однородных, так и содержащих управления и наблюдения, является метод их преобразования к стационарным системам. ЛНС, допускающие такое преобразование, называют приводимыми. Понятие приводимой системы, впервые введенное А.М. Ляпуновым для линейных однородных нестационарных систем [1], было распространено на линейные нестационарные системы, содержащие управления и наблюдения в [2, 3]. Там же были изложены основы теории приводимости ЛНС с управлением и наблюдением, сформулированы условия приводимости таких систем.

В данной работе описываются некоторые новые классы ЛНС с управлением и наблюдением, которые допускают приведение путем конструктивного преобразования к стационарным системам большего порядка, чем исходная система. Рассматривается задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС), иллюстрирующая эффективность предложенного подхода к анализу наблюдаемости ЛНС указанного класса.

1. Приводимые линейные нестационарные системы с управлением и наблюдением. Напомним сначала некоторые результаты по приводимости ЛНС. Рассмотрим ЛНС

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \quad \sigma = C(t)x, \quad (1.1)$$

где x — n -мерный вектор состояния системы, u — k -мерный вектор управляющих воздействий, σ — l -мерный вектор измерений; A — постоянная $(n \times n)$ -матрица, $B(t)$ и $C(t)$ — матрицы $(n \times k)$ и $(l \times n)$ соответственно, зависящие от времени.

Условия приводимости ЛНС (1.1) к стационарной системе того же порядка представлены в [2, 3]. Если условия приводимости к системе того же порядка не выполняются, то при определенных условиях ЛНС (1.1) может быть преобразована в стационарную систему большего порядка [2, 3].

Рассмотрим систему с наблюдением, но без управления:

$$\dot{x} = Ax, \quad \sigma = C(t)x. \quad (1.2)$$

Пусть матрица $C(t)$ представляется в виде линейной комбинации постоянных $(l \times n)$ -матриц $C_1, C_2, \dots, C_r$:

$$C(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)C_i, \quad r \leq nl. \quad (1.3)$$

Будем полагать, что скалярные функции $\alpha_i(t), i = 1, 2, \dots, r$, таковы, что можно ввести m -мерный вектор $f(t)$, r компонент которого – функции $\alpha_i(t)$, а остальные $(m - r)$ компонент выбраны так, чтобы поведение вектора $f(t)$ описывалось некоторой линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{f}(t) = Sf(t), \quad S(m \times m) = \text{const}. \quad (1.4)$$

Это означает, что к выделенному таким образом классу функций $\alpha_i(t)$, входящих в матрицу $C(t)$, относятся такие функции, как полиномы, экспоненты, синусы и косинусы различных частот, а также всевозможные линейные комбинации этих функций.

Если представление (1.3), (1.4) имеет место, то система (1.2) при помощи преобразования

$$y = F(t)x, \quad F(t) = f(t) \otimes E_n. \quad (1.5)$$

E_n – единичная $(n \times n)$ -матрица, приводится к полностью стационарной системе [2, 3]

$$\dot{y} = Gy, \quad \sigma = \Gamma y, \quad (1.6)$$

$$G_{(mn \times mn)} = S \otimes E_n + E_m \otimes A, \quad \Gamma_{(l \times mn)} = [C_1 \dots C_r \ O \dots O].$$

Здесь $\otimes$ означает кронекеровское произведение матриц [4], O – нулевые матрицы соответствующих размеров.

Для систем, нестационарных по управлению,

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \quad (1.7)$$

где матрица $B(t)$ представима в виде, аналогичном (1.3), (1.4):

$$B(t) = \sum_{j=1}^p \beta_j(t) B_j, \quad p \leq nl, \\ B_j = \text{const}, \quad f(t) = [\beta_1 \dots \beta_p \ f_{p+1} \dots f_m].$$

Преобразование

$$x = F^T(t)y, \quad F_{(n \times mn)}^T(t) = f^T(t) \otimes E_n \quad (1.8)$$

приводит систему (1.7) к стационарной системе размерности mn :

$$\dot{y} = Ry + Qu, \\ R_{(mn \times mn)} = E_m \otimes A - S^T \otimes E_n, \quad Q_{(mn \times k)}^T = [B_1^T \dots B_p^T \ O \dots O]. \quad (1.9)$$

Возможность приведения к стационарным системам ЛНС второго порядка, нестационарных по наблюдению и управлению, рассмотрена в [5, 6].

2. Системы специального вида с наблюдением. Рассмотрим нестационарную систему более общего, чем (1.2), вида

$$\dot{x}^{(1)} = A_{11}x^{(1)} + A_{12}(t)x^{(2)}, \\ \dot{x}^{(2)} = A_{22}x^{(2)}, \\ \sigma = C_0x^{(1)} + C_1(t)x^{(2)}. \quad (2.1)$$

Здесь $x^{(j)}$ – n_j -мерные векторы состояния системы ($j = 1, 2$), A_{ij} – постоянные $(n_j \times n_j)$ -матрицы, $(l \times n_2)$ -матрица $C_1(t)$ может быть записана в виде (1.3), (1.4), C_0 – постоянная $(l \times n_1)$ -матрица, а $(n_1 \times n_2)$ -матрица $A_{12}(t)$ представляется аналогично матрице $C_1(t)$:

$$A_{12}(t) = \sum_{j=1}^q \gamma_j(t) D_j, \quad D_j_{(n_1 \times n_2)} = \text{const}, \quad q \leq m. \quad (2.2)$$

Функции $\gamma_i(t), i = 1, 2, \dots, q$, являются функциями, принадлежащими совокупности функций $f_1(t), \dots, f_m(t)$. Введем новые переменные аналогично формулам (1.5):

$$y_{(mn_2 \times 1)}^{(2)} = F(t) x_{(n_2 \times 1)}^{(2)}, \quad F(t)_{(mn_2 \times n_2)} = f(t) \otimes E_{n_2}. \quad (2.3)$$

Дифференцируя выражение (2.3), получим

$$\dot{y}^{(2)} = (S \otimes E_{n_2})F(t)x^{(2)} + F(t)A_{22}x^{(2)}.$$

По свойствам кронекеровского произведения $F(t)A_{22} = (E_m \otimes A_{22})F(t)$. Тогда

$$\dot{y}^{(2)} = ((S \otimes E_{n_2}) + (E_m \otimes A_{22}))y^{(2)}.$$

Выражение $A_{12}(t)x^{(2)}$ при помощи соотношений (2.2) и (2.3) приводится к виду

$$A_{12}(t)x^{(2)} = \sum_{j=1}^r D_j \gamma_j(t)x^{(2)} = G_{12}F(t)x^{(2)} = G_{12}y^{(2)},$$

где $G_{12} = \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_r & O & \dots & O \end{bmatrix}$,
 $(n_1 \times mn_2) \quad (n_1 \times n_2)$

Измерение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma &= C_0 x^{(1)} + C_1(t)x^{(2)} = C_0 x^{(1)} + \sum_{j=1}^r C_j \alpha_j(t)x^{(2)} = \\ &= C_0 x^{(1)} + \sum_{j=1}^r C_j y_j^{(2)} = C_0 x^{(1)} + \Gamma_1 y^{(2)}, \end{aligned}$$

где $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_r & O & \dots & O \end{bmatrix}$,
 $(l \times mn_2) \quad (l \times n_2)$

Таким образом, система (2.1) преобразуется в стационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= A_{11}x^{(1)} + G_{12}y^{(2)}, \\ \dot{y}^{(2)} &= G_{22}y^{(2)}, \quad G_{22} = E_m \otimes A_{22} + S \otimes E_m, \\ \sigma &= C_0 x^{(1)} + \Gamma_1 y^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В частном случае, если $A_{22} = 0$, система (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= A_{11}x^{(1)} + G_{12}y^{(2)}, \\ \dot{y}^{(2)} &= G_{22}y^{(2)}, \quad G_{22} = S \otimes E_m, \\ \sigma &= C_0 x^{(1)} + \Gamma_1 y^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пример 1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \sin \omega t, \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2, \\ \sigma &= C_0 x_1 + C_1 x_2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь функции $f_i(t)$ имеют вид $f_1(t) = \alpha(t) = \cos \omega t$, $f_2(t) = \gamma(t) = \sin \omega t$ и подчиняются уравнению

$$\dot{f}_{(2 \times 1)} = S f, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразование $y_1 = x_2 \sin \omega t$, $y_2 = x_2 \cos \omega t$ приводит систему (2.6) к стационарной системе (2.4):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1, \\ \dot{y}_1 &= a_{22}y_1 + \omega y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega y_1 + a_{22}y_2, \\ \sigma &= C_0x_1 + C_1y_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Матрица наблюдаемости стационарной системы (2.7) имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & C_1 \\ C_0a_{11} & n_{22} & C_1a_{22} \\ C_0a_{11}^2 & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix},$$

$$n_{22} = C_0a_{12} - C_1\omega, \quad n_{33} = C_1a_{22}^2 + n_{22}\omega, \quad n_{32} = C_0a_{11}a_{12} + a_{22}(n_{22} - \omega C_1).$$

Определитель этой матрицы $\det N = \omega C_0(C_1^2(a_{22} - a_{11})^2 + (C_0a_{12} - C_1\omega)^2)$. Система (2.7) ненаблюдаема, если

$$C_1(a_{22} - a_{11}) = 0, \quad C_0a_{12} - C_1\omega = 0.\tag{2.8}$$

Отметим, что этот же результат получается при применении критерия Hautus [7] или критерия наблюдаемости для нестационарных систем [8, 9].

Для стационарной системы (2.7) можно **аналитически** построить алгоритм оценивания с постоянными коэффициентами, в то время как для исходной системы (2.1) это сделать не удастся.

3. Системы специального вида с управлением. Рассмотрим нестационарную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(1)} &= A_{11}x^{(1)} + B_0u, \\ \dot{x}^{(2)} &= A_{21}(t)x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} + B_1(t)u.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь $x^{(j)}$ — n_j -мерные векторы состояния системы ($j = 1, 2$), A_{jj} — постоянные $(n_j \times n_j)$ -матрицы, представляется в виде (1.3), (1.4), B_0 — постоянные $(n_1 \times k)$ -матрицы, а $(n_2 \times k)$ -матрица $B_1(t)$ и $(n_2 \times n_1)$ -матрица $A_{21}(t)$ записываются в виде, аналогичном (1.3) и (2.2):

$$B_1(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i(t)B_i, \quad B_i = \text{const}, \quad r \leq m, \quad (n_2 \times k)$$

$$A_{21}(t) = \sum_{i=1}^p \delta_i(t)D_i, \quad D_i = \text{const}, \quad p \leq m. \quad (n_2 \times n_1)$$

Скалярные функции $\beta_i(t)$ и $\delta_i(t)$ являются функциями, принадлежащими совокупности функций $f_1(t), \dots, f_m(t)$, удовлетворяющих системе (1.4).

Введем замену переменных

$$x^{(2)} = F^T(t) \underset{(mn_2 \times 1)}{y}^{(2)}, \quad F^T(t) = f^T(t) \otimes E_{n_2}, \quad \dot{F}^T(t) = F^T(t)(S^T \otimes E_{n_2}).\tag{3.2}$$

Тогда

$$B(t) = F^T(t)Q, \quad A_{21}(t) = F^T(t)R_{21}, \quad Q = \text{const}, \quad R_{21} = \text{const},$$

$$\underset{(mn_2 \times k)}{Q} = [B_1 \dots B_r \ O \dots O], \quad \underset{(mn_2 \times n_1)}{R_{21}} = [D_1 \dots D_p \ O \dots O].$$

В новых переменных система (3.1) становится стационарной и имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(1)} &= A_{11}x^{(1)} + B_0u, \\ y^{(2)} &= R_{22}x^{(1)} + R_{22}y^{(2)} + Qu.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Здесь $R_{22} = (E_m \otimes A_{22}) - (S^T \otimes E_{n_2})$.

Пример 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + b_0u, \\ \dot{x}_2 &= a_{12}x_2 \cos \omega t + a_{22}x_2 + b_1 \sin \omega t u.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Преобразование $x_2 = y_1 \cos \omega t + y_2 \sin \omega t$ приводит систему (3.4) к стационарной системе вида (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + b_0u, \\ \dot{y}_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 - \omega y_2, \\ \dot{y}_2 &= \omega y_1 + a_{22}y_2 + b_1u.\end{aligned}\quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е 1. Следует иметь в виду, что начальные условия для исходной системы (3.4) заданы, но определение начальных условий для расширенной системы (3.5) имеет некоторый произвол — в данном случае $y_1(0) = x_2(0)$, $y_2(0)$ — свободно. Значением $y_2(0)$ можно распоряжаться в зависимости от конкретной задачи управления. Подобная ситуация имеет место во всех задачах синтеза управления, решаемых путем приведения к стационарным системам большей размерности, например для систем вида (3.3).

Условие управляемости системы (3.5) имеет вид

$$\omega b_0(b_1^2(a_{22} - a_{11})^2 + (b_0a_{12} + b_1\omega)^2) \neq 0.$$

Для стационарной системы (3.5) при наличии свойства управляемости закон управления можно построить в виде

$$u = -k_0x_1 - k_1y_1 - k_2y_2, \quad k_j = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.6)$$

выбирая коэффициенты k_j так, чтобы замкнутая этим управлением система (3.5) была асимптотически устойчивой.

Для того, чтобы управление u можно было вводить непосредственно в нестационарную систему (3.4), следует перейти от переменных x_1, y_1, y_2 к переменным x_1, x_2, x_2' , введя [2, 3] дополнительную переменную x_2' по формуле

$$x_2' = -y_1 \sin \omega t + y_2 \cos \omega t.$$

Тогда $y_1 = x_2 \cos \omega t - x_2' \sin \omega t$, $y_2 = x_2 \sin \omega t + x_2' \cos \omega t$. Переменная x_2' удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_2' = -a_{21}x_1 \sin \omega t + a_{22}x_2' + b_1u \cos \omega t \quad (3.7)$$

Переменные $x = (x_1, x_2, x_2')^T$ подчиняются системе уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + \tilde{b}(t)u, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} \cos \omega t & a_{22} & 0 \\ -a_{12} \sin \omega t & 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \sin \omega t \\ b_1 \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Интересно отметить, что матрица $A(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{A}(t) = DA(t) - A(t)D, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix},$$

и однородная система, соответствующая системе (3.8), приводима путем преобразования $x = [\exp(Dt)]y$ к стационарной системе [3, 10]. При этом неоднородная нестационарная система (3.8) становится полностью стационарной системе (3.5).

Управление, вводимое в систему (3.4), (3.7) в соответствии с выражением (3.6), имеет вид

$$u = -k_0x_1 - (k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t)x_2 - (-k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t)x_2'.$$

З а м е ч а н и е 2. Для систем (2.4) и (3.3) удобно применять критерии наблюдаемости и управляемости Хаутуса [7], имеющие здесь вид

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda E_{n_1} & G_{12} \\ O & G_{22} - \lambda E_{n_2} \\ C_0 & \Gamma_1 \end{bmatrix} = n_1 + mn_2 \quad \forall \lambda, \quad (3.9)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda E_{n_1} & O & B_0 \\ R_{21} & R_{22} - \lambda E_{n_2} & Q \end{bmatrix} = n_1 + mn_2 \quad \forall \lambda. \quad (3.10)$$

Матрицы G_{22}, R_{22} запишем как

$$G_{22} = E_m \otimes A_{22} + S^T \otimes E_{n_2}, \quad R_{22} = E_m \otimes A_{22} - S^T \otimes E_{n_2}.$$

Критерий (3.9) следует проверять только для значений λ , являющихся корнями характеристического уравнения $\det((A_{11} - \lambda E_{n_1})(G_{22} - \lambda E_{mn_2})) = 0$, а критерий (3.10) — для корней уравнения $\det(R_{22} - \lambda E_{mn_2}) = 0$.

Собственные значения матриц G_{22}, R_{22} равны соответственно $v_{ij} = \lambda_i + \mu_j$ и $v_{ij} = \lambda_i - \mu_j$, где λ_i — собственные значения матрицы A_{22} , а μ_j — собственные значения матрицы S . Матрицы A_{11}, A_{22}, S имеют порядок меньший, чем $n_1 + mn_2$, и их собственные значения легче определить. Поэтому в данном случае критерий Хаутуса предпочтительнее известного критерия Калмана [11].

В частности, если $A_{22} = 0$, собственные значения матриц G_{22} и R_{22} будут μ_j и $-\mu_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

4. Калибровка бескарданной инерциальной навигационной системы. Рассмотрим задачу калибровки БИНС при помощи одностепенного стенда с горизонтальной осью вращения [12–14]. В [12] была предложена процедура калибровки, состоящая из трех этапов. На каждом этапе осуществляется вращение БИНС на поворотном стенде вокруг одной из фиксированных осей. Поэтому в модели системы явным образом возникает нестационарность, вызванная изменением ориентации.

4.1. Уравнения ошибок измерений. Согласно [12–14], уравнение, описывающее динамику ошибок ориентации, имеет вид

$$\dot{\beta} = \hat{U}\beta + L(v^0 + \Theta\Omega_z). \quad (4.1)$$

Здесь $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$ — вектор малого поворота приборного трехгранника Oz относительно географического Ox ; L — матрица, задающая поворот стенда; v_1^0, v_2^0, v_3^0 — компоненты вектора погрешностей нулей, $\Theta = [\Theta_{ij}]$, Θ_{ij} — погрешности неортогональности осей чувствительности датчиков угловых скоростей, Θ_{ii} — погрешности масштабных коэффициентов;

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix},$$

u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора угловой скорости вращения Земли в проекциях на оси географического трехгранника Ox ; вектор угловой скорости стенда $\Omega_z = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$ в проекциях на оси приборного трехгранника: $\Omega_1 = \omega$ — величина угловой скорости вращения стенда, $\Omega_2 = u \cos \varphi$, $\Omega_3 = u \sin \varphi$, u — величина угловой скорости вращения Земли, φ — географическая широта нахождения стенда.

В качестве измерений используется информация о векторе удельной силы f_z/g , доставляемая ньютонометрами. Соответствующее уравнение измерений в проекциях на оси географического трехгранника имеет вид [12]

$$\sigma = \hat{\beta}[0 \ 0 \ 1]^T + L(\epsilon^0 + \Gamma L^T [0 \ 0 \ 1]^T). \quad (4.2)$$

Здесь $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0$ — погрешности нулей, матрица Γ погрешностей масштабов и неортогональности осей чувствительности ньютометров имеет вид [12]

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}.$$

4.2. Первый этап калибровки. На первом этапе матрица L имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \omega t.$$

В скалярной форме уравнение (4.1) и измерение (4.2) имеют вид ($\chi = \gamma - \varphi$)

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= u \sin \varphi \beta_2 - u \cos \varphi \beta_3 + \Theta_{22} \omega + v_2^0 + (\Theta_{21} \cos \chi + \Theta_{23} \sin \chi) u, \\ \dot{\beta}_2 &= -u \sin \varphi \beta_1 + (\Theta_{12} \omega + v_1^0) \cos \gamma + (\Theta_{32} \omega + v_3^0) \sin \gamma + \\ &+ (\Theta_{11} \cos \chi + \Theta_{13} \sin \chi) u \cos \gamma + (\Theta_{31} \cos \chi + \Theta_{33} \sin \chi) u \sin \gamma, \\ \dot{\beta}_3 &= u \cos \varphi \beta_1 + (\Theta_{12} \omega + v_1^0) \sin \gamma - (\Theta_{32} \omega + v_3^0) \cos \gamma + (\Theta_{11} \cos \chi + \Theta_{13} \sin \chi) u \sin \gamma - \\ &- (\Theta_{11} \cos \chi + \Theta_{13} \sin \chi) u \sin \gamma - (\Theta_{31} \cos \chi + \Theta_{33} \sin \chi) u \cos \gamma, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\beta_2 + \Gamma_{21} \sin \gamma + \varepsilon_2^0, \\ \sigma_2 &= \beta_1 + (\varepsilon_1^0 \cos \gamma + \varepsilon_3^0 \sin \gamma) + \frac{1}{2}(\Gamma_{11} - \Gamma_{33}) \sin 2\gamma - \frac{1}{2}\Gamma_{31} \cos 2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{31}, \\ \sigma_3 &= (\varepsilon_1^0 \sin \gamma - \varepsilon_3^0 \cos \gamma) - \frac{1}{2}\Gamma_{31} \sin 2\gamma + \frac{1}{2}(\Gamma_{33} + \Gamma_{11}) + \frac{1}{2}(\Gamma_{33} - \Gamma_{11}) \cos 2\gamma. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Согласно методике, изложенной выше, введем новые переменные:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon_2^0, \quad x_2 = \varepsilon_1^0 \cos \gamma + \varepsilon_3^0 \sin \gamma, \quad x_3 = \varepsilon_1^0 \sin \gamma - \varepsilon_3^0 \cos \gamma, \\ x_4 &= \Gamma_{21} \sin \gamma, \quad x_5 = \Gamma_{21} \cos \gamma, \quad x_6 = \frac{1}{2}\Gamma_{31}, \\ x_7 &= \frac{1}{2}\Gamma_{31} \cos 2\gamma, \quad x_8 = \frac{1}{2}\Gamma_{31} \sin 2\gamma, \quad x_9 = \frac{1}{2}(\Gamma_{11} - \Gamma_{33}) \sin 2\gamma, \\ x_{10} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{11} - \Gamma_{33}) \cos 2\gamma, \quad x_{11} = \frac{1}{2}(\Gamma_{11} + \Gamma_{33}), \\ x_{12} &= \Theta_{22} \omega + v_2^0, \quad x_{13} = u \Theta_{21} \cos \chi, \quad x_{14} = u \Theta_{21} \sin \chi, \\ x_{15} &= u \Theta_{23} \sin \chi, \quad x_{16} = u \Theta_{23} \cos \chi, \\ x_{17} &= (\Theta_{12} \omega + v_1^0) \cos \gamma + (\Theta_{32} \omega + v_3^0) \sin \gamma, \\ x_{18} &= (\Theta_{12} \omega + v_1^0) \sin \gamma - (\Theta_{32} \omega + v_3^0) \cos \gamma, \\ x_{19} &= \frac{u}{2}(\Theta_{11} \cos \varphi - \Theta_{13} \sin \varphi + \Theta_{31} \sin \varphi + \Theta_{33} \cos \varphi), \\ x_{20} &= \frac{u}{2}(\Theta_{11} \sin \varphi + \Theta_{13} \cos \varphi - \Theta_{31} \cos \varphi + \Theta_{33} \sin \varphi), \\ x_{21} &= \frac{u}{2}[(\Theta_{11} \cos \varphi - \Theta_{13} \sin \varphi - \Theta_{31} \sin \varphi - \Theta_{33} \cos \varphi)] \cos 2\gamma, \\ x_{22} &= \frac{u}{2}[(\Theta_{11} \sin \varphi + \Theta_{13} \cos \varphi + \Theta_{31} \cos \varphi - \Theta_{33} \sin \varphi)] \sin 2\gamma, \\ x_{23} &= \frac{u}{2}[(-\Theta_{11} \sin \varphi - \Theta_{13} \cos \varphi - \Theta_{31} \cos \varphi + \Theta_{33} \sin \varphi)] \cos 2\gamma, \\ x_{24} &= \frac{u}{2}[(\Theta_{11} \cos \varphi - \Theta_{13} \sin \varphi - \Theta_{31} \sin \varphi - \Theta_{33} \cos \varphi)] \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В переменных (4.5) уравнения (4.3) и измерения (4.4) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_1 &= u \sin \varphi \beta_2 - u \cos \varphi \beta_3 + x_{12} + x_{13} + x_{15}, \\
 \dot{\beta}_2 &= -u \sin \varphi \beta_1 + x_{17} + x_{19} + x_{21} + x_{22}, \\
 \dot{\beta}_3 &= u \cos \varphi \beta_1 + x_{18} + x_{20} + x_{23} + x_{24}, \\
 \dot{x}_1 &= 0, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_3, \quad \dot{x}_3 = \omega x_2, \quad \dot{x}_4 = \omega x_5, \quad \dot{x}_5 = -\omega x_4, \\
 \dot{x}_6 &= 0, \quad \dot{x}_7 = -2\omega x_8, \quad \dot{x}_8 = 2\omega x_7, \quad \dot{x}_9 = 2\omega x_{10}, \quad \dot{x}_{10} = -2\omega x_9, \quad \dot{x}_{11} = 0, \\
 \dot{x}_{12} &= 0, \quad \dot{x}_{13} = -\omega x_{14}, \quad \dot{x}_{14} = \omega x_{13}, \quad \dot{x}_{15} = \omega x_{16}, \quad \dot{x}_{16} = -\omega x_{25}, \\
 \dot{x}_{17} &= -\omega x_{18}, \quad \dot{x}_{18} = \omega x_{17}, \quad \dot{x}_{19} = 0, \quad \dot{x}_{20} = 0, \\
 \dot{x}_{21} &= -2\omega x_{24}, \quad \dot{x}_{22} = -2\omega x_{23}, \quad \dot{x}_{23} = 2\omega x_{22}, \quad \dot{x}_{24} = 2\omega x_{21}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\sigma_1 = -\beta_2 + x_1 + x_4, \quad \sigma_2 = \beta_1 + x_2 + x_6 - x_7 + x_9, \quad \sigma_3 = x_3 - x_8 - x_{10} + x_{11}. \tag{4.7}$$

Для анализа наблюдаемости системы (4.6), (4.7) рассмотрим сначала измерение σ_3 . Введем наблюдаемые комбинации z_i путем последовательного дифференцирования σ_3 :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= x_3 - x_8 - x_{10} + x_{11}, \quad \dot{z}_1 = \omega z_2, \quad z_2 = x_2 - 2x_7 + x_9, \quad \dot{z}_2 = -4\omega z_1 + \omega z_3, \\
 z_3 &= 3x_3 + 4x_{11}, \quad \dot{z}_3 = 3\omega z_4, \quad z_4 = x_2, \quad \dot{z}_4 = -\frac{\omega}{3} z_3 + \frac{4}{3} \omega z_5, \\
 z_5 &= x_{11}, \quad \dot{z}_5 = 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая формулы (4.5), имеем следующие наблюдаемые переменные:

$$x_2, x_3, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. \tag{4.8}$$

Далее, аналогично рассматривая измерения σ_1 и σ_2 , получим наблюдаемые комбинации:

$$\begin{aligned}
 \beta_1, \beta_2 - x_1 - x_4, \quad u \cos \varphi \beta_3 - u \sin \varphi (x_1 + x_4) - x_{12} - x_{13} - x_{15}, \\
 \omega x_4 - x_{18}, \quad \omega x_5 - x_{17}, \quad x_{19}, \quad x_{20}, \quad x_{21} + x_{22}, \quad x_{23} + x_{24}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Учитывая формулы (4.5), из (4.8) и (4.9), получим 16 следующих наблюдаемых комбинаций исходных переменных:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^0, \varepsilon_3^0, \Gamma_{11}, \Gamma_{31}, \Gamma_{33}, \Theta_{11}, \Theta_{13}, \Theta_{23}, \Theta_{31}, \Theta_{33}, \quad \Gamma_{21} + \Theta_{21}, \quad v_1^0 + \omega(\Theta_{12} - \Gamma_{21}), \quad v_3^0 + \omega\Theta_{32}, \\
 \beta_1, \quad \beta_2 - \varepsilon_2^0 - \Gamma_{21} \sin \omega t, \quad u \cos \varphi \beta_3 - \omega\Theta_{22} - v_2^0 + u \sin \varphi \varepsilon_2^0 + u \cos \varphi \Gamma_{21} \cos \omega t.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.3. Второй этап калибровки. На втором этапе матрица L имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & -\cos \gamma \end{bmatrix}.$$

В этом случае уравнение (4.1) и измерение (4.2) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_1 &= u \sin \varphi \beta_2 - u \cos \varphi \beta_3 + \Theta_{11}\omega + v_1^0 + u(\Theta_{12} \cos \chi - \Theta_{13} \sin \chi), \\
 \dot{\beta}_2 &= -u \sin \varphi \beta_1 + \frac{u}{2}[(\Theta_{22} + \Theta_{33}) \cos \varphi + (\Theta_{23} - \Theta_{32}) \sin \varphi] + \\
 &+ (\Theta_{21}\omega + v_2^0) \cos \gamma + \frac{u}{2}[(\Theta_{22} - \Theta_{33}) \cos \varphi + (\Theta_{23} + \Theta_{32}) \sin \varphi] \cos 2\gamma - \\
 &- (\Theta_{31}\omega + v_3^0) \sin \gamma + \frac{u}{2}[(\Theta_{22} - \Theta_{33}) \cos \varphi - (\Theta_{23} + \Theta_{32}) \sin \varphi] \sin 2\gamma, \\
 \dot{\beta}_3 &= u \cos \varphi \beta_1 + \frac{u}{2}[(\Theta_{22} + \Theta_{33}) \sin \varphi - (\Theta_{23} - \Theta_{32}) \cos \varphi] + \\
 &+ (\Theta_{21}\omega + v_2^0) \sin \gamma + \frac{u}{2}[(\Theta_{22} - \Theta_{33}) \cos \varphi + (\Theta_{23} + \Theta_{32}) \sin \varphi] \sin 2\gamma + \\
 &+ (\Theta_{31}\omega + v_3^0) \cos \gamma - \frac{u}{2}[(\Theta_{22} - \Theta_{33}) \sin \varphi - (\Theta_{23} + \Theta_{32}) \cos \varphi] \cos 2\gamma,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -\beta_2 + \epsilon_1^0, \\
 \sigma_2 &= \beta_1 + (\epsilon_2^0 \cos \gamma - \epsilon_3^0 \sin \gamma) + \frac{1}{2}(\Gamma_{22} - \Gamma_{33}) \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{32} \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\Gamma_{32}, \\
 \sigma_3 &= (\epsilon_2^0 \sin \gamma + \epsilon_3^0 \cos \gamma) + \frac{1}{2}\Gamma_{32} \sin 2\gamma + \frac{1}{2}(\Gamma_{22} + \Gamma_{33}) + \frac{1}{2}(\Gamma_{33} - \Gamma_{22}) \cos 2\gamma.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Для системы (4.11), (4.12) можно провести ту же процедуру перехода к стационарной системе и выделения наблюдаемых комбинаций, при этом получатся 16 других наблюдаемых комбинаций исходных переменных. Однако, учитывая результаты первого этапа, можно далее рассматривать следующие модифицированные измерения:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1 &= -\beta_2, \\
 \bar{\sigma}_2 &= \beta_1 + \epsilon_2^0 \cos \gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{22} \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{32} \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\Gamma_{32}, \\
 \bar{\sigma}_3 &= \epsilon_2^0 \sin \gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{32} \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{22} - \frac{1}{2}\Gamma_{22} \cos 2\gamma.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \epsilon_2^0 \cos \gamma, \quad x_2 = \epsilon_2^0 \sin \gamma, \quad x_3 = \frac{1}{2}\Gamma_{22} \cos 2\gamma, \quad x_4 = \frac{1}{2}\Gamma_{22} \sin 2\gamma, \\
 x_5 &= \frac{1}{2}\Gamma_{32}, \quad x_6 = \frac{1}{2}\Gamma_{32} \cos 2\gamma, \quad x_7 = \frac{1}{2}\Gamma_{32} \sin 2\gamma, \quad x_8 = \frac{1}{2}\Gamma_{22}, \\
 x_9 &= \Theta_{11}\omega + v_1^0, \quad x_{10} = u\Theta_{12} \cos \chi, \quad x_{11} = u\Theta_{12} \sin \chi, \\
 x_{12} &= u\Theta_{13} \cos \chi, \quad x_{13} = u\Theta_{13} \sin \chi, \\
 x_{14} &= (\Theta_{21}\omega + v_2^0) \cos \gamma - (\Theta_{31}\omega + v_3^0) \sin \gamma, \\
 x_{15} &= (\Theta_{21}\omega + v_2^0) \sin \gamma + (\Theta_{31}\omega + v_3^0) \cos \gamma, \\
 x_{16} &= \frac{u}{2}(\Theta_{22} \cos \varphi + \Theta_{23} \sin \varphi - \Theta_{32} \sin \varphi + \Theta_{33} \cos \varphi), \\
 x_{17} &= \frac{u}{2}(\Theta_{22} \sin \varphi - \Theta_{23} \cos \varphi + \Theta_{32} \cos \varphi + \Theta_{33} \sin \varphi), \\
 x_{18} &= \frac{u}{2}(\Theta_{22} \cos \varphi + \Theta_{23} \sin \varphi + \Theta_{32} \sin \varphi - \Theta_{33} \cos \varphi) \cos 2\gamma, \\
 x_{19} &= \frac{u}{2}(\Theta_{22} \cos \varphi + \Theta_{23} \sin \varphi + \Theta_{32} \sin \varphi - \Theta_{33} \cos \varphi) \sin 2\gamma, \\
 x_{20} &= \frac{u}{2}(\Theta_{22} \sin \varphi - \Theta_{23} \cos \varphi - \Theta_{32} \cos \varphi - \Theta_{33} \sin \varphi) \cos 2\gamma, \\
 x_{21} &= \frac{u}{2}(\Theta_{22} \sin \varphi - \Theta_{23} \cos \varphi - \Theta_{32} \cos \varphi - \Theta_{33} \sin \varphi) \sin 2\gamma, \\
 x_{19} &= \frac{u}{2}(\Theta_{11} \cos \varphi - \Theta_{13} \sin \varphi + \Theta_{31} \sin \varphi + \Theta_{33} \cos \varphi), \\
 x_{20} &= \frac{u}{2}(\Theta_{11} \sin \varphi + \Theta_{13} \cos \varphi - \Theta_{31} \cos \varphi + \Theta_{33} \sin \varphi), \\
 x_{21} &= \frac{u}{2}[(\Theta_{11} \cos \varphi - \Theta_{13} \sin \varphi - \Theta_{31} \sin \varphi - \Theta_{33} \cos \varphi)] \cos 2\gamma, \\
 x_{22} &= \frac{u}{2}[(\Theta_{11} \sin \varphi + \Theta_{13} \cos \varphi + \Theta_{31} \cos \varphi - \Theta_{33} \sin \varphi)] \sin 2\gamma, \\
 x_{23} &= \frac{u}{2}[(-\Theta_{11} \sin \varphi - \Theta_{13} \cos \varphi - \Theta_{31} \cos \varphi + \Theta_{33} \sin \varphi)] \cos 2\gamma, \\
 x_{24} &= \frac{u}{2}[(\Theta_{11} \cos \varphi - \Theta_{13} \sin \varphi - \Theta_{31} \sin \varphi - \Theta_{33} \cos \varphi)] \sin 2\gamma.
 \end{aligned}$$

Анализ полученной стационарной системы позволяет получить следующие наблюдаемые комбинации исходных приборных погрешностей:

$$\varepsilon_2^0, \Gamma_{22}, \Gamma_{32}, \Theta_{12}, \Theta_{13}, \Theta_{22}, \Theta_{32}, \Theta_{23}, \Theta_{33}, \quad v_2^0 + \omega \Theta_{21}, \quad v_3^0 + \omega \Theta_{31}. \quad (4.14)$$

В результате проведенных двух этапов калибровки при объединении наблюдаемых комбинаций приборных погрешностей в совокупностях (4.10) и (4.14) остаются неизвестными $\Gamma_{21}, \Theta_{21}, v_1^0$.

4.4. Третий этап калибровки. На третьем этапе матрица L имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В этом случае уравнения измерений запишем как

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\beta_2 + \varepsilon_3^0 + \Gamma_{31} \sin \gamma + \Gamma_{32} \cos \gamma, \\ \sigma_2 &= \beta_1 + (\varepsilon_1^0 \cos \gamma - \varepsilon_2^0 \sin \gamma) + \frac{1}{2}(\Gamma_{11} - \Gamma_{22}) \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{21} \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\Gamma_{21}, \\ \sigma_3 &= (\varepsilon_1^0 \sin \gamma + \varepsilon_2^0 \cos \gamma) + \frac{1}{2}\Gamma_{21} \sin 2\gamma + \frac{1}{2}(\Gamma_{22} + \Gamma_{11}) + \frac{1}{2}(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) \cos 2\gamma. \end{aligned} \quad (4.15)$$

С учетом выражений (4.10), (4.14) можно ввести модифицированные измерения

$$\bar{\sigma}_1 = \beta_2, \quad \bar{\sigma}_2 = \beta_1 + \frac{1}{2}\Gamma_{21} \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\Gamma_{21}, \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\Gamma_{21} \sin 2\gamma.$$

Это означает, что из выражения для $\bar{\sigma}_3$ можно получить Γ_{21} , затем из (4.10) и (4.14) — величины Θ_{21} и v_1^0 . Таким образом определяются все приборные погрешности.

Заключение. Предложена методика исследования наблюдаемости и управляемости для нестационарных линейных многомерных систем определенного класса, основанная на конструктивном приведении их к стационарным системам большего порядка, чем исходные. Анализ наблюдаемости и управляемости для стационарных систем существенно проще. В качестве приложения рассмотрена задача калибровки бескарданной инерциальной системы, где проведено исчерпывающее аналитическое исследование наблюдаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. Морозов В.М., Каленова В.И. Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М.: Изд-во МГУ, 1988. 144 с.
3. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 208 с.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
5. Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка к управлению и наблюдению // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 583–588.
6. Каленова В.И., Морозов В.М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 6–15.
7. Hautus M.L.J. Controllability and Observability Conditions of Linear Autonomous Systems // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. 1969. V. 72. P. 443–448.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. Chang A. An Algebraic Characterization of Controllability // IEEE Trans. Automat. Control. 1965. V. AC-10. № 1. P. 112–113.
10. Wu M.-Y. Transformation of Linear Time-Varying Systems Into a Linear Time-Invariant System // Int. J. Control. 1978. V. 27. № 4. P. 589–602.
11. Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
12. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. 2. Приложение методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: МАКС Пресс, 2012. 172 с.
13. Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю. Калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стенов // Современные проблемы математики и механики. Т. 1. Прикладные исследования. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 212–223.
14. Сазонов И.Ю. Идентификация параметров инструментальных погрешностей бескарданной инерциальной навигационной системы при помощи грубых одностепенных стенов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2012.