ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2019, № 1, с. 89–97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 62-50

ЗАЩИТА ОБЪЕКТА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ УПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАИХУДШИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ[1]

© 2019 г. В. А. Корнеев

ИПМех РАН, Москва, Россия

e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 11.05.2018 г.
После доработки 24.09.2018 г.

Рассмотрена задача о построении гарантирующего упреждающего управления для противоударного изолятора, защищающего объект на подвижном основании от ударов, которым может подвергаться основание. Предполагается, что форма ударного воздействия неизвестна, но его длительность задана и ускорение основания описывается знакопостоянной функцией времени, интеграл от которой по времени также задан. Упреждающее управление действует между основанием и защищаемым объектом, имеет одно переключение, ограничено по величине, а абсолютное ускорение основания может превышать эту величину лишь на одном интервале времени. Минимизируемым критерием качества выбрано максимальное смещение объекта относительно основания для всевозможных возмущений из рассматриваемого класса ударных воздействий. Получены оптимальное и близкое к оптимальному решения. Эти решения сравниваются друг с другом и с решениями, базирующимися на управлениях, полученных в предыдущих исследованиях.

DOI: 10.1134/S0002338819010104

Введение. Работа посвящена построению способов управления противоударным изолятором при наихудших возмущениях. Используется математическая модель системы с одной степенью свободы, которая состоит из основания и защищаемого объекта, расположенного на нем. Предполагается что внешнее воздействие кинематического типа, характеризуемое ускорением основания, описываемым функцией времени. Основание и защищаемый объект движутся вдоль одной прямой, а управляющая сила, создаваемая изолирующим устройством между основанием и объектом, ограничена по величине. В работах [1–3] ставилась задача о минимизиации максимума модуля смещения объекта относительно основания при заданном возмущении. Основы теории оптимальной противоударной изоляции развивались в [4–7]. Возможности изоляции объекта, расположенного на подвижном основании, от кратковременных ударных воздействий с помощью активного изолятора с управлением без упреждения изучались в [8]. Оптимальные упреждающие управления были построены численно или аналитически для некоторых конкретных возмущений в [9]. Кроме того, были найдены наихудшие возмущения для законов управления с упреждением, которые были получены ранее для конкретных возмущений. Были рассчитаны соответствующие значения критерия качества. В отличие от [9] в данной работе строится гарантирующее упреждающее управление с одним переключением и время упреждения, позволяющие вычислять минимальную оценку максимальной величины смещения объекта относительно основания для целого класса возмущений.

1. Механическая система. Пусть механическая система (рис. 1) состоит из основания и объекта, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора – устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом и предназначенного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой. Обозначим: z – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x – смещение объекта относительно основания,

[1] Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310387-0 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00538-а и № 17-08-00742-а).

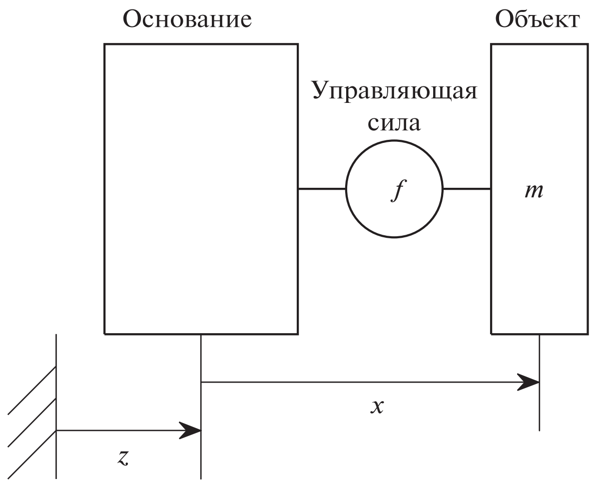

Рис. 1. Модель противоударной изоляции объекта на подвижном основании

m – масса объекта. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением $\ddot{z}$, функцией времени, некоторые характеристики которой предполагаются известными.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = \frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z}. \tag{1.1}$$

Далее полагаем, что сила f удовлетворяет ограничению $|f| \le F_0$, где F_0 – заданная величина, тогда величина u удовлетворяет неравенству

$$|u| \le u_0, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ основание и объект покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и z:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \tag{1.2}$$

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению $|u(t)| \le u_0$.

2. Внешние возмущения. Предполагается, что возмущение $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \ge 0, \tag{2.1}$$

где кусочно-непрерывная функция $V(\xi)$ определена для всех вещественных ξ, причем $V(\xi) \equiv 0$ для $\xi < 0$, а $t_0 \ge 0$ – некоторый момент времени, который может быть задан или подлежать определению. Таким образом, возмущение V начинает действовать на основание спустя время t_0 после включения системы противоударной изоляции (упреждающее управление).

Будем предполагать, что 1) возбуждение действует только в одном направлении и не меняет знака ($V(t) \ge 0$), 2) имеет конечную длительность T ($V(t) \equiv 0$, если $t > T$) и 3) только на одном интервале, $t_1 < t < t_2$, величина абсолютного ускорения $V(t)$ основания превышает верхнюю границу u_0 абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$V(t) < u_0 \quad \text{для} \quad 0 \le t < t_1 \quad \text{и} \quad t_2 < t \le T;$$
$$V(t) > u_0 \quad \text{для} \quad t_1 < t < t_2.$$

Один или оба из интервалов $0 \le t < t_1$ и $t_2 < t \le T$ могут быть пустыми, если $V(0) > u_0$ или $V(T) > u_0$. В случае, когда $V(t) \le u_0$ для $0 \le t \le T$ оптимальное управление определяется тождеством $u(t) \equiv V(t)$ и обеспечивает тождественно равное нулю смещение объекта по отношению к основанию. Базовыми характеристиками ударного воздействия являются его длительность T и интеграл

$$v_0 = \int_0^T V(t)dt, \tag{2.2}$$

характеризующий величину скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. В дальнейшем параметры T и v_0 считаются известными. Класс описанных возмущений обозначим V_*.

3. Критерий качества. Будем считать, что возмущение $V(\xi)$ неизвестно, но известно множество $\Omega \subset V_*$, которому могут принадлежать возможные возмущения. Качество изоляции при заданных управлении $u(t)$ и времени упреждения t_0 будем оценивать функционалом J, характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u, t_0) = \max_{V \in \Omega} \max_{t \in [0, \infty)} \left| x(t; u, V, t_0) \right|, \tag{3.1}$$

где $x(t; u, V, t_0)$ – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) для заданных $u(t)$, $V(\xi)$ и t_0. Величину J желательно минимизировать выбором оптимального закона управления и времени упреждения.

4. Задачи оптимизации. Поскольку условия информированности управляющей стороны о внешнем возмущении могут быть различными, то и задачи оптимального управления должны быть сформулированы по-разному.

Задача 1. Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) найти допустимое управление u_* и время упреждения t_0^*, которые минимизируют величину (3.1):

$$J(u_*, t_0^*) = \min_{u \in U, t_0} J(u, t_0),$$

где U – множество законов управления $u(t)$, среди которых ищется оптимум.

Это задача о гарантирующем оптимальном упреждающем управлении противоударным изолятором, защищающим объект от ударных воздействий из множества Ω. Она обобщает задачу, рассмотренную в [1–3] для заданного возмущения в отсутствие упреждения управления.

Задача 2. Для заданного допустимого управления $u(t)$ найти время упреждения t_0^*, минимизирующее величину (3.1):

$$J(u, t_0^*) = \min_{t_0} J(u, t_0).$$

Эту задачу можно трактовать как задачу 1, в которой множество допустимых законов управления U состоит из одного элемента.

Решение задачи 2 дает возможность улучшать качество противоударной защиты путем изменения только времени упреждения при заданном программном законе управления $u(t)$, который, например, может быть рассчитан на основе упрощенной модели для некоторого возмущения $V \in \Omega$ и представлен аналитическими выражениями.

В дальнейшем ограничимся параметрическим семейством допустимых релейных управлений $u_\tau(t)$ с переключением с $-u_0$ на u_0 в момент времени τ и с u_0 на 0 в момент времени $v_0/u_0 + 2\tau$, т.е. примем $U = \{u_\tau\}$, где

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -u_0, & 0 \le t < \tau, \\ +u_0, & \tau \le t \le T_c, \qquad T_c = \dfrac{v_0}{u_0} + 2\tau. \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \tag{4.1}$$

Для управлений вида (4.1) имеем

$$\int_0^t u(s)ds = v_0, \qquad t \ge T_c. \tag{4.2}$$

Интегрирование обеих частей уравнения (1.1) при управлениях вида (4.1) и возмущениях класса V_* с учетом начальных условий (1.2) и равенств (2.2), (4.2) дает

$$\dot{x}(t; u_\tau, V, t_0) \equiv 0, \quad t \geq \max(t_0 + T, T_c).$$

Таким образом, при управлениях вида (4.1) движение объекта относительно основания прекращается за конечное время и в дальнейшем не возобновляется при любых возмущениях класса V_* и временах упреждения t_0. Как следствие, смешение объекта относительно основания остается конечным.

В задаче 3 возмущение предполагается заранее известной функцией времени. Эта задача подробно рассматривалась в [9].

З а д а ч а 3. Для системы (1.1) при начальных условиях (1.2) и возмущении (2.1) найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению

$$|u(t)| \leq u_0, \quad t \in [0, \infty), \tag{4.3}$$

и время упреждения t_0, которые минимизируют максимальную величину смещения объекта относительно основания (функционал J):

$$J(u, V, t_0) = \max_{t \in [0,\infty)} |x(t; u, V, t_0)| \to \min_{u, t_0}. \tag{4.4}$$

Обозначим через J_3 оптимальное значение функционала J в задаче 3:

$$J_3(V) = \min_{u(t), t_0} \max_{t \in [0,\infty)} |x(t; u, V, t_0)|. \tag{4.5}$$

5. Лемма о наихудшем возмущении. Вычисление функционала (3.1) предполагает определение наихудшего возмущения $V \in \Omega \subset V_*$, которое максимизирует максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания ($\max_t |x(t; u, V, t_0)|$) при заданных $u(t)$ и t_0.

Л е м м а [9]. Среди возмущений $V \in V_*$ наихудшее возмущение есть либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi)$, либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$. Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0, подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.

Согласно этой лемме, для нахождения наихудшего возмущения при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$ и $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$, для каждого из решений вычислить $\max_t |x(t)|$, сравнить получившиеся величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению.

Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{u_0}{v_0^2}x, \quad t' = \frac{u_0}{v_0}t, \quad t_0' = \frac{u_0}{v_0}t_0, \quad T' = \frac{u_0}{v_0}T, \quad \tau' = \frac{u_0}{v_0}\tau,$$
$$v'(t') = \frac{1}{v_0}v\left(\frac{v_0}{u_0}t'\right), \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad J' = \frac{u_0}{v_0^2}J.$$

Далее будем использовать безразмерные переменные, опуская штрихи. В безразмерных единицах параметры u_0 и v_0 равны единице.

6. Гарантирующее время упреждения для управления, оптимального для мгновенного удара. Мгновенный удар моделируется дельта-функцией Дирака: $V(\xi) = \delta(\xi)$. Для такого удара в [6] решена задача 3 об оптимальном управлении с упреждением, которую можно трактовать как задачу 1 с множеством Ω в критерии качества (3.1), содержащим единственное возмущение: $\Omega = \{\delta(\xi)\}$. Оптимальное управление $u = u^\delta(t)$, оптимальное время упреждения $t_0 = t_\delta$ и соответствующее значение критерия качества $J = J_\delta$ в безразмерных переменных определяются выражениями

$$u^\delta(t) = u_\tau(t), \quad \tau = 1/4; \quad t_\delta = 1, \quad J_\delta = 1/16. \tag{6.1}$$

Управление $u = u^\delta(t)$ с моментом упреждения $t_0 = t_\delta$ будем далее называть δ-управлением.

Применим управление $u^\delta(t)$ к системе, подверженной неизвестным возмущениям класса V_*, и найдем для этого управления гарантирующее время упреждения, решив задачу 2. Предвари-

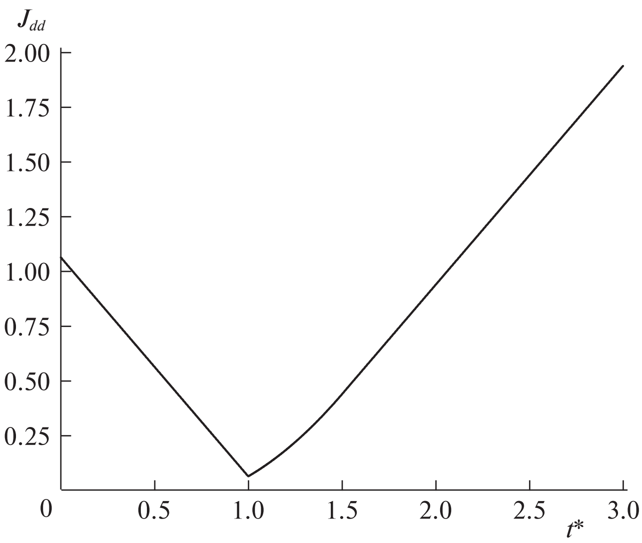

Рис. 2. Значение критерия качества при применении δ-управления со смещенным временем упреждения к δ-возмущению

тельно вычислим максимум модуля отклонения объекта относительно основания для мгновенного удара $J_{dd}(t^*)$ при управлении $u^{\delta}(t)$ с произвольным временем упреждения $t_0 = t^*$. Получим

$$J_{dd}(t^*) = \begin{cases} 17/16 - t^*, & 0 \le t^* < 1, \\ (t^{*2} - t^*)/2 + 1/16, & 1 \le t^* < 3/2, \\ t^* - 17/16, & t^* \ge 3/2. \end{cases} \tag{6.2}$$

Эта формула позволяет оценить влияние ошибки в определении момента удара при расчете упреждающего оптимального управления на величину критерия качества противоударной изоляции. Функция из (6.2) непрерывна, монотонно убывает от значения 17/16 до 1/16 при $t^* \in [0,1)$ и монотонно возрастает от 1/16 до бесконечности при $t^* > 1$. График функции $J_{dd}(t^*)$ изображен на рис. 2. Для решения задачи 2 надо, с учетом леммы о наихудшем возмущении, для заданного T найти минимум по переменной t_0 величины

$$f(t_0, T) = \max\left[J_{dd}(t_0), J_{dd}(t_0 + T)\right], \quad t_0 \ge 0.$$

С учетом свойств функции $J_{dd}(t^*)$ находим, что если $J_{dd}(0) \ge J_{dd}(T)$, то точка минимума t_0^* функции $f(t_0, T)$ определяется единственным образом как корень уравнения $J_{dd}(t_0) = J_{dd}(t_0 + T)$; соответствующее значение $J(u^{\delta}, t_0^*)$ критерия качества равно при этом $J_{dd}(t_0^*)$ или, что то же, $J_{dd}(t_0^* + T)$. Если $J_{dd}(0) < J_{dd}(T)$, то $t_0^* = 0$ и $J(u^{\delta}, t_0^*) = J_{dd}(T)$. Анализ показывает, что $J_{dd}(0) \ge J_{dd}(T)$ если и только если $T \le 17/8$. Проведя расчеты согласно описанному алгоритму, получим для t_0^* и $J(u^{\delta}, t_0^*)$ следующие выражения:

$$t_0^* = \begin{cases} \sqrt{1/4 + 2T + 2} - 1/2 - T, & T \le 7/8, \\ 17/16 - T/2, & 7/8 < T \le 17/8, \\ 0, & T > 17/8, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$J_2(T) = J(u^{\delta}, t_0^*) = \begin{cases} 25/16 - \sqrt{1/4 + 2T + 2} + T, & T \le 7/8, \\ T/2, & 7/8 < T \le 17/8, \\ T - 17/16, & T > 17/8. \end{cases}$$

Отметим, что при $T > 17/8$ наихудшее возмущение определяется однозначно и есть мгновенный удар единичной интенсивности, приложенный в момент времени T, в то время как при

$T \le 17/8$ мгновенные удары, приложенные в моменты времени t_0^* и $t_0^* + T$, приводят одному и тому же значению критерия качества.

7. Гарантирующее оптимальное упреждающее управление. Для управлений (4.1) найдем оптимальное значение параметра τ и оптимальное время упреждения t_0, решив задачу 1. Сначала вычислим максимум модуля смещения объекта относительно основания при мгновенном ударе $V(\xi) = \delta(\xi)$ и произвольном времени упреждения $t_0 = t^*$, подобно тому, как это делалось в разд. 6 для получения выражения (6.2). Обозначим этувеличину $J_{d\tau}$, она зависит от переменных τ и t^*: $J_{d\tau} = J_{d\tau}(t^*, \tau)$. Аналитические выражения величины $J_{d\tau}$ для различных интервалов параметра τ приводятся ниже:

$$\tau \ge 1/2 : J_{d\tau} = \begin{cases} 1/2 + \tau^2 + 2\tau - t^*, \quad 0 \le t^* < 1/2 + 2\tau, \\ \tau^2, \quad 1/2 + 2\tau \le t^* < 1/2 + 2\tau + 2\tau^2, \\ t^* - 2\tau - \tau^2 - 1/2, \quad t^* \ge 1/2 + 2\tau + 2\tau^2; \end{cases}$$

$$1/4 \le \tau < 1/2 : J_{d\tau} = \begin{cases} 1/2 + \tau^2 + 2\tau - t^*, \quad 0 \le t^* < 1/2 + 2\tau, \\ \tau^2, \quad 1/2 + 2\tau \le t^* < 4\tau, \\ t^{*2}/2 - 2t^*\tau + \tau^2, \quad 4\tau \le t^* < 1 + 2\tau, \\ t^* - 2\tau - \tau^2 - 1/2, \quad t^* \ge 1 + 2\tau; \end{cases}$$

$$0 \le \tau < 1/4 : J_{d\tau} = \begin{cases} 1/2 + \tau^2 + 2\tau - t^*, \quad 0 \le t^* < 2\tau + \sqrt{2 + 4\tau^2} - 1, \\ t^{*2}/2 - 2t^*\tau + \tau^2, \quad 2\tau + \sqrt{2 + 4\tau^2} - 1 \le t^* < 1 + 2\tau, \\ t^* - 2\tau - \tau^2 - 1/2, \quad t^* \ge 1 + 2\tau. \end{cases}$$

С учетом леммы о наихудшем возмущении для решения задачи 1 надо найти минимум по переменным τ и t_0 функции

$$g(t_0, \tau) = \max\left[J_{d\tau}(t_0, \tau), J_{d\tau}(t_0 + T, \tau)\right], \quad t_0 \ge 0, \quad \tau > 0. \tag{7.1}$$

Было доказано, что решение задачи 1 удовлетворяет следующим необходимым условиям:

$$J_{d\tau}(t_0, \tau) = J_{d\tau}(t_0 + T, \tau), \quad t_0 \ge 0, \quad J_{d\tau}(t_0, \tau) \ge \tau^2. \tag{7.2}$$

Кроме того, при $T < 1/2$ минимум функции (7.1) достигается при $1/4 \le \tau \le 1/2$. При этом t_0 вычисляется как функция τ из уравнения (7.2), а затем минимизируется величина $J_{d\tau}(t_0(\tau), \tau)$ по τ. При $T \ge 1/2$ минимум функции (7.1) достигается при $\tau \ge 1/2$. При этом $\tau = 1/2$ для $1/2 < T \le 7/2$, а t_0 определяется из решения уравнения (7.2).

При $T > 7/2$ оптимальные время упреждения t_0 момент переключения τ неединственны. Значение функционала $J_1 = T/2$ для этого случая обеспечивается моментом переключения τ и моментом упреждения t_0, удовлетворяющим соотношениям

$$\max\{\sqrt{(1 + T)/2} - 1, 0\} \le \tau \le \sqrt{T/2}, \quad t_0 = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2. \tag{7.3}$$

Выражение для t_0 в (7.3) получено из соотношений (7.2). Заметим, что при выполнении соотношений (7.3) верно неравенство $t_0 \ge 0$ и значения $t_0 = 0$, $\tau = \sqrt{(1 + T)/2} - 1$ являются одним из решений из (7.3), соответствующим минимальному τ для рассматриваемого случая. При этом величина $\tau = \sqrt{(1 + T)/2} - 1$ – корень уравнения (7.2) при $t_0 = 0$. Таким образом одно из решений задачи 1 определяется следующими формулами:

$$J_1(T) = J(u_{\tau^*}, t_0^*) = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2 \quad \text{при} \quad T \le 1/2, \\ T/2 \quad \text{при} \quad T > 1/2; \end{cases}$$

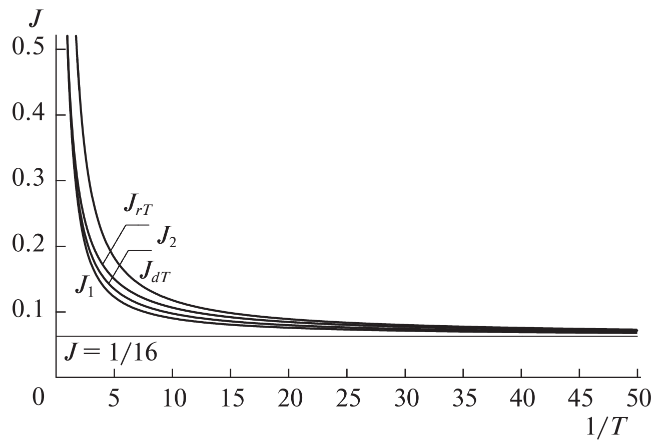

Рис. 3. Сравнение различных способов управления по критерию качества при наихудших возмущениях

$$\tau_* = \begin{cases} T/2 + 1/4 \quad \text{при} \quad T \le 1/2, \\ 1/2 \quad \text{при} \quad 1/2 < T \le 7/2, \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1 \quad \text{при} \quad T > 7/2; \end{cases}$$

$$t_0^* = \begin{cases} T + 1 \quad \text{при} \quad T \le 1/2, \\ 7/4 - T/2 \quad \text{при} \quad 1/2 < T \le 7/2, \\ 0 \quad \text{при} \quad T > 7/2. \end{cases}$$

Зависимости величин J_1 и J_2 от $1/T$ изображены на рис. 3.

8. Качество изоляции при некоторых заданных управлениях. Оценим качество защиты (3.1) для управления $u = u^\delta(t)$ и времени упреждения $t_0 = t_\delta$ из (6.1). Используя формулу (6.2) и вводя дополнительное обозначение J_{dT}, получаем

$$J(u^\delta, t_\delta) = J_{dT}(T) = \max\{J_{dd}(t_\delta), J_{dd}(t_\delta + T)\} = \begin{cases} \dfrac{T^2 + T}{2} + \dfrac{1}{16}, \quad 0 \le T < 0.5, \\ T - \dfrac{1}{16}, \quad T \ge 0.5. \end{cases} \tag{8.1}$$

Здесь наихудшим возмущением оказывается возмущение в виде дельта-функции, подаваемое в момент $1 + T$.

Рассмотрим теперь возмущение в виде прямоугольного импульса, задаваемого кусочно-постоянной функцией $V(t)$:

$$V = V(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{T}, \quad 0 \le t \le T, \\ 0, \quad t > T \end{cases} \tag{8.2}$$

в размерных переменных или

$$V = V(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}, \quad 0 \le t \le T, \\ 0, \quad t > T \end{cases} \tag{8.3}$$

в безразмерных переменных. Безразмерная амплитуда (максимальное значение) прямоугольного возмущения, обозначаемая далее A_r, определяется соотношением $A_r = 1/T$. Для этого возмущения задача 3 решена в [9] с помощью графоаналитического метода [1, 2]. Оптимальное управление $u(t)$, оптимальное время упреждения t_0 и оптимальное значение критерия качества J определяются соотношениями

$$u_r(t) = \begin{cases} -1, \quad 0 \le t \le t_1^r = \dfrac{1}{4}\sqrt{1-T}, \quad T < 1, \\ 1, \quad t_1^r < t \le t_2^r = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-T} + 1, \quad T < 1, \\ 0, \quad t > t_2^r, \quad T < 1, \\ V(t), \quad T \ge 1, \end{cases} \tag{8.4}$$

$$t_0^r = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[(1-T) + \sqrt{1-T}\right], \quad T < 1, \\ 0, \quad T \ge 1, \end{cases} \tag{8.5}$$

$$J_r = \begin{cases} \dfrac{1}{16}(1-T), \quad T < 1, \\ 0, \quad T \ge 1. \end{cases} \tag{8.6}$$

Индекс r указывает, что данные соотношения относятся к прямоугольному импульсу. Управление (8.4) с моментом упреждения (8.5) будем называть r-управлением.

Для управления u_r, заданного выражением (8.4) и времени упреждения t_0^r, вычисляемого согласно (8.5), максимальная величина смещения объекта относительно основания для наихудшего возмущения определяется формулой

$$J(u_r, t_0^r) = J_{rT}(T) = \begin{cases} \dfrac{1+7T}{16}, \quad T < 1, \\ \dfrac{T}{2}, \quad T \ge 1. \end{cases} \tag{8.7}$$

При $T \le 1$ наихудшее возмущение есть мгновенный удар, подаваемый в момент времени t_0^r, вычисляемый по формуле (8.5), а при $T > 1$ мгновенные удары, подаваемые в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, приводят к одному и тому же результату. Заметим, что $J_{rT}(T) = J_1(T)$ при $T \ge 1$, т.е. управление u_r с временем упреждения t_0^r обеспечивают оптимальное значение функционала. Зависимости величин J_{dT} и J_{rT} от $1/T$ изображены сплошными кривыми на рис. 3. Из рис. 3 видно, что для всех T управление, оптимальное для прямоугольного возмущения, приводит к меньшему гарантированному (рассчитанному на наихудшее возмущение) значению критерия качества J, чем управление, оптимальное для мгновенного удара.

9. Сравнение качества изоляции для различных способов управления. На рис. 4 представлена зависимость величины $\eta = (J_2 - J_1)/J_1$ от длительности возмущения T. Величина η характеризует относительное отличие гарантированных значений критерия качества, обеспечиваемых управлением $u^\delta(t)$ при оптимальном выборе времени упреждения и оптимальным управлением $u_{\tau_*}(t)$ с оптимальным временем упреждения. Установлено, что $\eta < 1$; $\eta \to 1$ при $T \to \infty$; $\eta < 0.1$ для $T \in [0, 17/8]$, причем $\eta \equiv 0$ для $T \in [7/8, 17/8]$. Таким образом, управление $u^\delta(t)$ с временем упреждения, определяемым согласно (6.3), обеспечивает качество противоударной защиты, не более чем на 10% отличающееся от оптимального в сравнительно широком диапазоне длительностей ударного воздействия, и оптимально для $T \in [7/8, 17/8]$.

Величина $\eta_r = (J_{rT} - J_1)/J_1$ характеризует относительное отличие гарантированных значений критерия качества, обеспечиваемых r-управлением и оптимальным управлением $u_{\tau_*}(t)$ с оптимальным временем упреждения. Установлено, что $\eta_r < 0.225$ при $T < 1$ и $\eta_r \equiv 0$ при $T \ge 1$. Таким образом, r-управление обеспечивает качество противоударной защиты, не более чем на 22.5% отличающееся от оптимального для $T < 1$, и оптимально для $T \ge 1$.

Величина $\eta_\delta = (J_{dT} - J_1)/J_1$ характеризует относительное отличие гарантированных значений критерия качества, обеспечиваемых δ-управлением и оптимальным управлением $u_{\tau_*}(t)$ с оптимальным временем упреждения. Установлено, что $\eta_\delta = 1 - 1/(8T) < 0.75$ при $T < 0.5$ и $\eta_\delta \to 1$ при

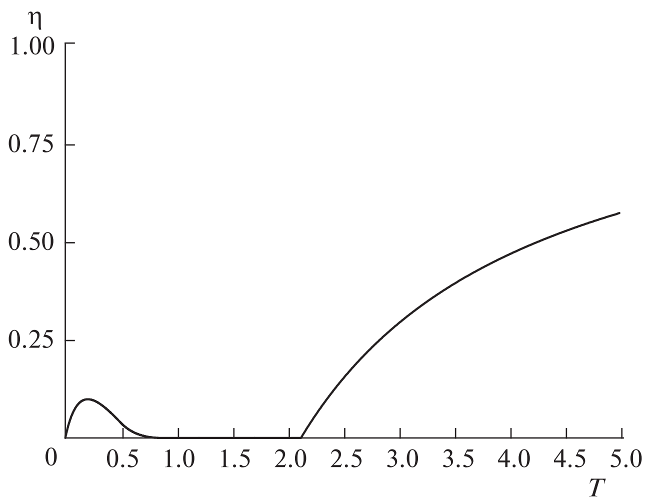

Рис. 4. Относительная разность величин J_1 и J_2 как функция длительности ударного воздействия

$T \to \infty$. Таким образом, δ-управление обеспечивает качество противоударной защиты, не более чем на 75% отличающееся от оптимального при $T < 0.5$, и является наихудшим управлением из рассмотренных.

Заключение. Рассмотрена задача изоляции объекта на подвижном основании от ударов, которым может подвергаться основание. Для неизвестного наихудшего возмущения с заданными длительностью и интегралом от возмущения по времени найден гарантирующий момент упреждения для управления, предназначенного для мгновенного удара, построено гарантирующее упреждающее управление в классе управлений с одним переключением и вычислено соответствующее значение максимального смещения объекта относительно основания. Проведено сравнение полученного способа управления с другими управляющими законами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
2. *Гурецкий В.В.* О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11–21.
3. *Sevin E., Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 c.
4. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
5. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
6. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
7. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. 286 p.
8. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 147–168.
9. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 48–63.