
**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.86

СИНТЕЗ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РАСПИСАНИЙ С ПРЕРЫВАНИЯМИ И ДИРЕКТИВНЫМИ ИНТЕРВАЛАМИ

© 2019 г. М. Г. Фуругян

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

e-mail: rtscas@ya.ru

Поступила в редакцию 16.10.2018 г.

После доработки 12.11.2018 г.

Принята к публикации 26.11.2018 г.

Исследуется задача нахождения производительностей процессоров многопроцессорной системы, при которых существует допустимое расписание с прерываниями для заданного множества работ с директивными интервалами. Рассмотрены случаи, когда (1) объемы работ фиксированы, а также (2) линейно зависят от величины выделенных им дополнительных ресурсов; (3) на производительности процессоров задаются ограничения сверху и снизу. Во всех трех случаях исходная задача сводится к системе линейных неравенств. Описан алгоритм нахождения парето-оптимальных решений.

DOI: 10.1134/S0002338819020070

Введение. Задача построения допустимых многопроцессорных расписаний является одной из основных задач при разработке математического и программного обеспечения многопроцессорных вычислительных систем реального времени. Эти системы находят широкое применение при разработке и эксплуатации сложных технических объектов (самолеты, ядерные реакторы, системы экологического и экономического мониторинга, конвейерные системы и др.). Задачам построения расписаний с прерываниями посвящено большое число работ. Отметим, например, такие работы, как [1] (идентичные процессоры), [2] (произвольные процессоры, одинаковые директивные интервалы), [3–5] (произвольные процессоры, произвольные директивные интервалы). В некоторых случаях аналогичные задачи сводятся к минимаксным и сетевым задачам, методы решения которых приведены в [6–9]. В настоящей статье рассматривается своего рода обратная задача по отношению к перечисленным выше, а именно задача нахождения таких производительностей процессоров, при которых допустимое расписание существует. При этом предполагается, что директивные интервалы фиксированы, а объемы работ в одном случае также фиксированы, а во втором — линейно зависят от количества выделенных работ дополнительных ресурсов. Кроме того, приведена задача, когда на производительности процессоров накладываются ограничения сверху и снизу.

1. Задача с фиксированными объемами работ. Рассматривается задача нахождения допустимых производительностей процессоров при заданных директивных интервалах и объемах работ. Результаты, полученные в этом разделе, основаны на результатах работ [4, 10].

1.1. Постановка задачи. Описывается вычислительная система, состоящая из m процессоров. Каждый процессор j характеризуется производительностью s_j , $j = \overline{1, m}$. Имеется набор работ (заданий) $N = \{\overline{1, n}\}$, подлежащих выполнению. При выполнении заданий допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. Предполагается, что прерывания и переключения не сопряжены с временными затратами. В фиксированный момент времени каждый процессор может выполнять не более одной работы, а каждая работа выполняется не более чем одним процессором. Каждое задание $i \in N$ характеризуется своим директивным интервалом $(b_i, f_i]$ (работа i может быть начата после момента времени b_i и должна быть завершена не позднее момента времени f_i) и объемом Q_i работы процессоров по его выполнению (суммарный

объем работы процессоров по выполнению задания i должен быть равен Q_i). Если суммарная длительность работы процессора j по выполнению работы i составляет τ_{ij} , $i \in N$, $j = \overline{1, m}$, то

$$Q_i = \sum_{j=1}^m s_j \tau_{ij}.$$

Требуется определить множество $s_1, s_2, \dots, s_m$ производительностей процессоров, для которых существует допустимое расписание (т.е. расписание, при котором каждая работа полностью выполняется в своем директивном интервале).

1.2. Построение области допустимых производительностей процессоров. Без ограничения общности будем находить производительности процессоров, которые удовлетворяют неравенствам

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m. \quad (1.1)$$

Введем следующие обозначения: $S_k = s_1 + s_2 + \dots + s_k$, $k = \overline{1, m}$; $y_0 < y_1 < \dots < y_p$, $p < 2n$, — все разные по величине значения b_i, f_i , $i \in N$; $I_l = (y_{l-1}, y_l]$, $l = \overline{1, p}$; $\delta_l = y_l - y_{l-1}$ — длина интервала I_l . Очевидно, что для любых двух интервалов I_l и $(b_i, f_i]$ либо $I_l \subseteq (b_i, f_i]$, либо $I_l \cap (b_i, f_i] = \emptyset$. Директивный интервал $(b_i, f_i]$ каждой работы $i \in N$ является объединением некоторых интервалов I_l .

Будем говорить, что работа $i \in N$ доступна в интервале I_l , если $I_l \subseteq (b_i, f_i]$, т.е. работа i может выполняться в интервале I_l . Без ограничения общности можно считать, что в каждом интервале I_l , $1 \leq l \leq p$, доступна хотя бы одна работа $i \in N$, поскольку интервалы I_l , которые не удовлетворяют этому условию, можно исключить из дальнейшего рассмотрения, а оставшиеся интервалы перенумеровать.

Как следует из [4], допустимое расписание в поставленной задаче существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества $\tilde{N} \subseteq N$ выполнено неравенство

$$\sum_{i \in \tilde{N}} Q_i \leq \sum_{l=1}^p \delta_l S_{k(l, \tilde{N})}, \quad (1.2)$$

где $k(l, \tilde{N}) = \min(m, m')$, m' — число работ $\tilde{N} \subseteq N$, доступных в интервале I_l . По аналогии с тем, как это сделано в [1] для случая идентичных процессоров, число подмножеств $\tilde{N}$, для которых следует выполнять проверку условия (1.2), в некоторых случаях можно существенно сократить. Предположим, что множество работ N можно разбить на $r \geq 2$ непересекающихся подмножеств, $N = N_{l_1 l_2} \cup N_{l_3 l_4} \cup \dots \cup N_{l_{2r-1} l_{2r}}$, $N_{l_{2u-1} l_{2u}} \cap N_{l_{2v-1} l_{2v}} = \emptyset$ при $u \neq v$, таких, что

$$\bigcup_{i \in N_{l_{2u-1} l_{2u}}} (b_i, f_i] = I_{l_{2u-1} l_{2u}},$$

где

$$I_{l_{2u-1} l_{2u}} = \bigcup_{l=l_{2u-1}}^{l_{2u}} I_l, \quad u = \overline{1, r}, \quad 1 \leq l_1 \leq l_2 < l_3 \leq l_4 < \dots < l_{2r-1} \leq l_{2r} \leq p.$$

Докажем следующее утверждение.

Л е м м а 1. Для существования допустимого расписания необходимо и достаточно, чтобы для любой пары l_{2u-1}, l_{2u} , $u = \overline{1, r}$, и любого подмножества $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1} l_{2u}}$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i \in \tilde{N}_u} Q_i \leq \sum_{l=l_{2u-1}}^{l_{2u}} \delta_l S_{k(l, \tilde{N}_u)}. \quad (1.3)$$

Доказательство. Необходимость. Если допустимое расписание существует, то неравенство (1.2) справедливо для всех подмножеств $\tilde{N} \subseteq N$ и, в частности, для подмножеств $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1} l_{2u}}$, $u = \overline{1, r}$.

Достаточность. Пусть неравенство (1.3) справедливо для любого подмножества $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1}l_{2u}}$, $u = \overline{1, r}$. Выберем произвольное подмножество $\tilde{N} \subseteq N$. Его можно представить в виде следующего объединения непересекающихся подмножеств:

$$\tilde{N} = \bigcup_{u=1}^r \tilde{N}_u,$$

где $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1}l_{2u}}$, $u = \overline{1, r}$, $\tilde{N}_u \cap \tilde{N}_v = \emptyset$ при $u \neq v$. Для каждого $\tilde{N}_u$, $u = \overline{1, r}$, неравенство (1.3) справедливо. Складывая неравенства (1.3) для всех $u = \overline{1, r}$, получаем (1.2) и, следовательно, допустимое расписание существует. Лемма доказана.

Доказанная лемма 1 позволяет выполнять проверку условия (1.2) не для всех подмножеств $\tilde{N} \subseteq N$, а только для подмножеств вида $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1}l_{2u}}$, $u = \overline{1, r}$ (условие (1.3)), число которых может быть существенно меньше, чем число всех подмножеств множества N , т.е. 2^n . Перепишем неравенство (1.3) в следующем виде:

$$q_u \leq H_{u1}S_1 + H_{u2}S_2 + \dots + H_{um}S_m, \quad (1.4)$$

где

$$q_u = \sum_{i \in \tilde{N}_u} Q_i, \quad H_{uj} = \sum_{l: k(l, \tilde{N}_u)=j} \delta_l, \quad j = \overline{1, m},$$

а неравенство (1.4) перепишем в виде

$$q_u \leq G_{u1}S_1 + G_{u2}S_2 + \dots + G_{um}S_m, \quad (1.5)$$

где $G_{uj} = H_{u1} + H_{u2} + \dots + H_{uj}$, $j = \overline{1, m-1}$. Теперь задача заключается в нахождении производительностей $s_1, s_2, \dots, s_m$ процессоров, удовлетворяющих системе линейных неравенств с m переменными (1.1), (1.5) для любой пары l_{2u-1}, l_{2u} , $u = \overline{1, r}$, и любого подмножества $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1}l_{2u}}$.

Отметим, что наряду с предположениями, сделанными в этом разделе, дополнительно можно предполагать, что на производительности процессоров накладываются ограничения сверху и снизу:

$$h_j \leq s_j \leq g_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.6)$$

где h_j и g_j – заданные величины. В этом случае неравенства (1.6) добавляются к неравенствам (1.1), (1.5).

Величины $s_1, s_2, \dots, s_m$ можно также искать, ограничившись неравенствами (1.4). Для этого будем использовать следующее утверждение [10].

Л е м м а 2. Для того, чтобы по заданным величинам $S_1, S_2, \dots, S_m$ можно было определить величины $s_1, s_2, \dots, s_m$, удовлетворяющие неравенствам (1.1), необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_m, \quad (1.7)$$

$$2S_k \geq S_{k-1} + S_{k+1}, \quad k = \overline{2, m-1}, \quad (1.8)$$

$$2S_1 \geq S_2. \quad (1.9)$$

Доказательство. Необходимость. Справедливость (1.7) следует из определения величин S_k , $k = \overline{1, m}$. Кроме того, $2S_1 - S_2 = 2s_1 - (s_1 + s_2) = s_1 - s_2$, откуда в силу (1.1) следует (1.9), и $2S_r - (S_{r-1} + S_{r+1}) = 2(s_1 + \dots + s_r) - (s_1 + \dots + s_{r-1}) - (s_1 + \dots + s_{r+1}) = s_r - s_{r+1}$, откуда в силу (1.1) вытекает (1.8).

Достаточность. Пусть величины $S_1, \dots, S_m$ удовлетворяют неравенствам (1.7)–(1.9). Определим величины $s_1, \dots, s_m$ следующим образом:

$$s_1 = S_1, \quad s_r = S_r - S_{r-1}, \quad r = \overline{2, m}. \quad (1.10)$$

Тогда $s_r \geq 0$, $r = \overline{1, m}$, в силу (1.7). В силу (1.8), (1.9) имеем

$$s_1 - s_2 = S_1 - (S_2 - S_1) = 2S_1 - S_2 \geq 0,$$

$$s_r - s_{r+1} = (S_r - S_{r-1}) - (S_{r+1} - S_r) = 2S_r - S_{r-1} - S_{r+1} \geq 0, \quad r = \overline{2, m-1},$$

откуда следует (1.1). Лемма доказана.

Таким образом, величины $S_1, S_2, \dots, S_m$, по которым можно определить производительности $s_1, s_2, \dots, s_m$ процессоров, должны удовлетворять системе линейных неравенств (1.4), (1.7)–(1.9) с m переменными. Как показано в лемме 2, по величинам $S_1, S_2, \dots, S_m$ производительности $s_1, s_2, \dots, s_m$ процессоров вычисляются по формулам (1.10).

Отметим также, что в рассматриваемой задаче можно потребовать выполнение ряда дополнительных условий, как, например: 1) суммарная производительность процессоров должна быть минимальной, т.е. $s_1 + s_2 + \dots + s_m \rightarrow \min$; 2) производительность самого быстрого процессора должна быть минимальной, т.е. $s_1 \rightarrow \min$, а также других условий. В этом случае получаем задачу линейного программирования с целевой функцией соответственно $s_1 + s_2 + \dots + s_m$ и s_1 и ограничениями (1.1), (1.5), (1.6).

1.3. Парето-оптимальные решения. Рассмотрим задачу поиска парето-оптимального вектора $(s_1^0, s_2^0, \dots, s_m^0)$ с точки зрения минимизации производительностей процессоров. Будем предполагать, что выполнены неравенства $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_m$. Пусть Δ – это множество векторов $(s_1, s_2, \dots, s_m)$, удовлетворяющих неравенствам (1.5). Опишем процедуру поиска вектора $(s_1^0, s_2^0, \dots, s_m^0) \in \Delta$, для которого не существует такого вектора $(s_1, s_2, \dots, s_m) \in \Delta$, что $s_j \leq s_j^0$ при всех $j = \overline{1, m}$ и хотя бы для одного j_1 , $1 \leq j_1 \leq m$, $s_{j_1} < s_{j_1}^0$.

Все неравенства (1.5), записанные для каждой пары l_{2u-1}, l_{2u} , $u = \overline{1, r}$, и каждого подмножества $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1}l_{2u}}$, занумеруем от 1 до некоторого T и будем рассматривать их в следующем виде:

$$a_t \leq c_{1t}s_1 + c_{2t}s_2 + \dots + c_{mt}s_m, \quad t \in T. \quad (1.11)$$

Будем предполагать, что при $s_j = g_j$, $j = \overline{1, m}$, неравенства (1.11) выполняются при всех $t = \overline{1, T}$. В противном случае, как следует из леммы 1, решения не существует. Найдем минимальное значение s_m , при котором $(g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, s_m) \in \Delta$. В силу (1.11) и леммы 1 $s_m \geq (a_t - c_{1t}g_1 - c_{2t}g_2 - \dots - c_{t,m-1}g_{m-1})/c_{tm}$ при всех $t = \overline{1, T}$. Тогда полагаем $s_m^0 = \max(\min(\overline{s}_m^0, g_m), h_m)$, где $\overline{s}_m^0 = \max_{t=\overline{1, T}}(a_t - c_{1t}g_1 - c_{2t}g_2 - \dots - c_{t,m-1}g_{m-1})/c_{tm}$. Очевидно, что вектор $(g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, s_m^0)$ удовлетворяет неравенствам (1.1), (1.6), (1.11) и в силу выбора s_m^0 вектор $(g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, s_m) \notin \Delta$ при $s_m < s_m^0$, так как для него не выполнены некоторые из неравенств (1.11). Тем более, $(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m) \notin \Delta$ при $s_j < g_j$, $j = \overline{1, m-1}$, и $s_m < s_m^0$.

В общем случае, предположим, что уже определены значения $s_{v+1}^0, \dots, s_m^0$, $1 \leq v \leq m-1$. Найдем минимальное значение s_v , при котором $(g_1, \dots, g_{v-1}, s_v, s_{v+1}^0, s_m^0) \in \Delta$. В силу (1.11) и леммы 1 $s_v \geq (a_t - c_{1t}g_1 - c_{2t}g_2 - \dots - c_{t,v-1}g_{v-1}, c_{t,v+1}s_{v+1}^0 - \dots - c_{tm}s_m^0)/c_{tv}$ при всех $t = \overline{1, T}$. Тогда полагаем $s_v^0 = \max(\min(\overline{s}_v^0, g_v), s_{v+1}^0, h_v)$, где $\overline{s}_v^0 = \max_{t=\overline{1, T}}(a_t - c_{1t}g_1 - c_{2t}g_2 - \dots - c_{t,v-1}g_{v-1}, c_{t,v+1}s_{v+1}^0 - \dots - c_{tm}s_m^0)/c_{tv}$. Очевидно, что $(g_1, \dots, g_{v-1}, s_v^0, s_{v+1}^0, s_m^0)$ удовлетворяет неравенствам (1.1), (1.6), (1.11) и в силу выбора s_v^0 вектор $(g_1, \dots, g_{v-1}, s_v, s_{v+1}^0, s_m^0) \notin \Delta$ при $s_v < s_v^0$, так как для него не выполнены некоторые из неравенств (1.11). Тем более, $(g_1, \dots, g_{v-1}, s_v, s_{v+1}^0, s_m^0) \notin \Delta$ при $s_j < g_j$, $j = \overline{1, v-1}$, и $s_v < s_v^0$. Следовательно, вектор $(s_1^0, s_2^0, \dots, s_m^0)$ является парето-оптимальным в смысле минимизации производительностей процессоров, так как ни одну из величин s_j^0 нельзя уменьшить без увеличения некоторых величин s_v^0 , $v = \overline{1, m}$, $v \neq j$, оставаясь при этом во множестве Δ .

2. Задача с нефиксированными объемами работ. В этом разделе наряду с предположениями, сделанными в разд. 1, дополнительно будем предполагать, что помимо процессоров в системе имеется K типов дополнительных ресурсов невозобновляемого типа. Суммарное количество k -го типа этого ресурса составляет R_k , $k = \overline{1, K}$. Если заданию $i \in N$ выделено r_{ik} единиц дополнительного ресурса k -го типа, $i \in N$; $k = \overline{1, K}$, то объем работы процессоров по выполнению задания i составляет

$$Q_i = d_i - \sum_{k=1}^K a_{ik} r_{ik}, \quad (2.1)$$

$$r_{ik} \in [0, \bar{r}_{ik}], \quad i \in N, \quad \sum_{i \in N} r_{ik} \leq R_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.2)$$

где a_{ik} , d_i , $\bar{r}_{ik}$ — заданные величины, $a_{ik} \geq 0$, $d_i > 0$, $\bar{r}_{ik} \geq 0$,

$$d_i - \sum_{k=1}^K a_{ik} \bar{r}_{ik} > 0,$$

d_i — объем работы процессоров по выполнению задания i в случае, если ей дополнительных ресурсов не выделено. Требуется найти такое распределение ресурсов r_{ik}^0 , $i \in N$, $k = \overline{1, K}$, и производительности $s_1, s_2, \dots, s_m$ процессоров, при которых существует допустимое расписание. При этом указанное распределение ресурсов должно удовлетворять ограничениям (2.1, 2.2). Примеры подобных задач содержатся в [11, 12]. В этом случае неравенство (1.5) преобразуется в неравенство

$$\sum_{i \in \tilde{N}_u} (Q_i - \sum_{k=1}^K a_{ik} r_{ik}) \leq G_{u1} s_1 + G_{u2} s_2 + \dots + G_{um} s_m \quad (2.3)$$

для любой пары l_{2u-1}, l_{2u} , $u = \overline{1, r}$, и любого подмножества $\tilde{N}_u \subseteq N_{l_{2u-1}, l_{2u}}$. Таким образом, решение поставленной задачи сведено к решению системы линейных ограничений (1.1), (2.1)–(2.3) с $m + nK$ переменными.

П р и м е р. Рассмотрим пример, когда $n = 3$, $N = \{1, 2, 3\}$, $m = 2$, $b_1 = 0$, $f_1 = 2$, $b_2 = 1$, $f_2 = 2$, $b_3 = 2$, $f_3 = 4$, $Q_1 = 8$, $Q_2 = 4$, $Q_3 = 10$, $h_1 = 4$, $g_1 = 6$, $h_2 = 1$, $g_2 = 3$. В этом случае $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$, $I_1 = (0, 1]$, $I_2 = (1, 2]$, $I_3 = (2, 4]$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 2$, $N = N_{12} \cup N_{33}$, $N_{12} = \{1, 2\}$, $N_{33} = \{3\}$, $I_{12} = I_1 \cup I_2$, $I_{33} = I_3$. Система неравенств (1.4) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 2S_1 \geq 8, \\ S_1 \geq 4, \\ S_1 + S_2 \geq 12, \\ 2S_1 \geq 10. \end{cases}$$

Запишем систему неравенств (1.1), (1.5), (1.6):

$$\begin{cases} s_1 \geq 5, \\ s_1 \leq 6, \\ s_2 \geq 12 - 2s_1, \\ s_2 \geq 1, \\ s_2 \leq 3, \\ s_2 \leq s_1. \end{cases}$$

На рисунке выделенная область (пятиугольник $ABCDE$) определяет допустимые пары значений производительностей процессоров s_1, s_2 . Так, например, точка A имеет координаты $s_1 = 5$, $s_2 = 2$, а точка B — координаты $s_1 = 5.5$, $s_2 = 1$. Обе эти точки (а также их выпуклые линейные комбинации) определяют парето-оптимальные решения (вектора производительностей процессоров): $(5; 2)$, $(5.5; 1)$.

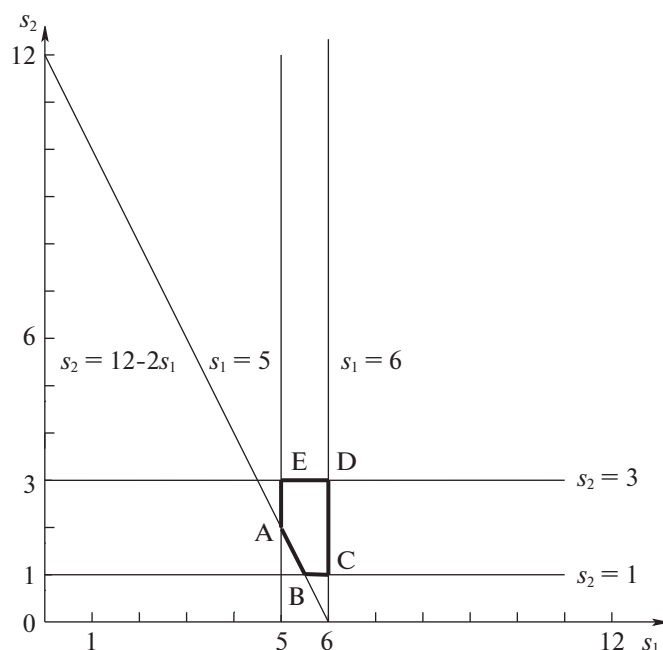


Рисунок. Допустимые значения s_1 и s_2 в рассматриваемом примере

Заключение. Исследована задача синтеза вычислительной системы, заключающаяся в нахождении производительностей процессоров при построении допустимых расписаний с прерываниями и директивными интервалами. Рассмотрена постановка с фиксированными объемами заданий, а также задача распределения дополнительных ресурсов, влияющих на длительности выполнения работ. Разработан метод нахождения парето-оптимальных решений. Предложенные алгоритмы основаны на построении системы линейных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
2. Gonzales T., Sahni S. Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems // J. Association for Computing Machinery. 1978. V. 25. № 1. P. 92–101.
3. Federgruen A., Groenevel H. Preemptive Scheduling of Uniform Machines by Ordinary Network Flow Technique // Management Science. 1986. V. 32. № 3. P. 341–349.
4. Martel C. Preemptive Scheduling with Release Times, Deadlines, and Due Times // J. ACM. 1982. V. 29. № 3. P. 812–829.
5. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007. 371 с.
6. Tsurkov V.I. Decomposition Principle for Block-separable Systems // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1979. V. 246. № 1. P. 27–31.
7. Миронов А.А., Цурков В.И. Транспортные задачи с минимаксным критерием // ДАН. 1996. Т. 346. № 2. С. 342.
8. Миронов А.А., Цурков В.И. Минимакс в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями. I // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 4. С. 69–81.
9. Миронов А.А., Федорчук В.В., Цурков В.И. Минимакс в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями. II // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 5. С. 66–86.
10. Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы анализа и синтеза многопроцессорных вычислительных систем реального времени // Программирование. 2014. № 1. С. 36–44.
11. Фуругян М.Г. Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТМ. 2015. № 3. С. 144–150.
12. Фуругян М.Г. Оптимальная коррекция директивных интервалов в задаче построения многопроцессорного расписания с дополнительным ресурсом // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 2. С. 107–116.