ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2019, № 3, с. 164–176

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 531.2

РАСЧЕТ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ, НЕ ПОРОЖДАЮЩИЙ СИНГУЛЯРНЫХ СОСТОЯНИЙ ГИРОСИСТЕМЫ. II

© 2019 г. Б. Б. Беляев[a], И. В. Бычков[b], Э. И. Дружинин[b,*], С. А. Ульянов[b]

[a]ОАО “НПО им. С.А. Лавочкина”, Химки, Россия

[b]Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

*e-mail: druzh@icc.ru

Поступила в редакцию 27.06.2018 г.
После доработки 30.10.2018 г.
Принята к публикации 28.01.2019 г.

Работа посвящена прикладному аспекту новой технологии расчета законов программных управлений ориентацией космических аппаратов [1]. Решается краевая двухточечная задача переориентации космического аппарата посредством гиродинов. Представлены результаты численной реализации нового метода формирования программных законов переориентации, не порождающего сингулярных состояний исполнительной гиросистемы. Численная реализация проведена на примере динамической модели космического телескопа с реальными характеристиками и шестью гиродинами, составляющими три пары с коллинеарными осями прецессии. Полученные результаты демонстрируют принципиальную новизну нового метода расчета управлений: в вычисленных законах наведения телескопа отсутствуют сингулярные значения углов прецессии гироузлов исполнительных гиродинов. При попадании гироузлов в эти положения космический телескоп теряет управляемость, и процесс наведения прерывается. Отсутствие сингулярных положений гироузлов гарантирует безостановочность исполнения вычисленных законов с необходимой точностью и быстродействием.

DOI: 10.1134/S0002338819030041

0. Введение. В [1] представлен новый подход к обеспечению эффективности использования однокарданных безупорных исполнительных гироскопов – *гиродинов* (в англоязычной технической литературе – single-gimbal control moment gyros (SGCMG’s)). Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [2], посвященной развернутому изложению нового метода расчета программного управления переориентацией космических аппаратов (КА). Проблема эффективного использования однокарданных безупорных исполнительных гироскопов SGCMG’s изучается вот уже более полувека – с 1960 г. [3–5], со времени начала эксплуатации гиродинов в системах управления (СУ) ориентацией КА. В настоящей статье численная реализация нового метода выполнена на примере расчета законов программного управления переориентацией космического телескопа (КТ) с реальными динамическими характеристиками и параметрами исполнительной гиросистемы. Рассмотрена гиросистема из шести гиродинов, оси прецессии гироузлов которых составляют три коллинеарные пары. В качестве инструмента управления ориентацией в [1] впервые используется *суммарный кинетический момент гиросистемы* в движении гироузлов гироскопов *относительно* несущего корпуса КА (кратко: *гиростатический момент*). В новом методе априори фиксируется только *форма траектории* переориентации: процесс переориентации представлен в виде трех последовательных во времени перманентных поворотов. *Законы вращения* КА в этих поворотах априори *не задаются*, а вычисляются через управления в процессе решения задачи. Это обстоятельство и использование в качестве инструмента управления *гиростатического момента*, а не его *локальной производной*, позволило создать метод, *не порождающий* присутствие в законах управления сингулярных положений гироузлов, при попадании в которые КА теряет управляемость. Тем самым новый метод опровергает распространенное мнение, что проблема сингулярности исполнительной гиросистемы, сопровождающая расчет и исполнение законов управления ориентацией КА, порождена самой гиросистемой. Следовательно, разработка средств, предотвращающих попадание гиросистемы в сингулярные состояния, или средств борьбы с его последствиями – единственное направление исследований по решению проблемы сингулярности.

Переход к кинетическому моменту КА-гиростата как переменной состояния аппарата позволил проинтегрировать *уравнения перманентного вращения* КА (подробности см. в [1, 2]):

$$\omega(t)\,In + k(t) = L(\varphi(t))\,K_{p0}^{\mathrm{CCO}} \tag{0.1}$$

и свести расчет закона управления к исследованию системы двух линейных функциональных уравнений, не содержащих операции дифференцирования:

$$\omega(t)\,In + k_{\omega}(t) = 0, \tag{0.2}$$

$$k_K(t) = L(\varphi(t))\,K_{p0}^{\mathrm{CCO}}. \tag{0.3}$$

Здесь I – тензор инерции в связанной системе отчета (ССО), включающий инертную массу всех несомых аппаратом элементов; $\omega(t) = \omega(t)\,n$ – угловая скорость КА в ССО, вектор $I\omega(t)$ – кинетический момент *несущего корпуса* КА; $k(t)$ – кинетический момент гиросистемы в ее движении относительно корпуса (в дальнейшем – *гиростатический момент*), вычисленный в ССО и играющий роль *независимого параметра кинетического момента* $K_p^{\mathrm{CCO}}(t) = I\omega(t) + k(t)$, K_{p0}^{CCO} – начальное значение матрицы $K_p^{\mathrm{CCO}}(t)$, $L(\varphi(t))$ – ортогональная матрица (подробности см. в [2]). Момент $k(t) = k_{\omega}(t) + k_K(t)$ состоит из гиростатического момента *исполнительной гиросистемы* $k_{\omega}(t)$, управляющего угловой скоростью КА, и гиростатического момента $k_K(t)$ дополнительного двухкарданного гироскопа, расположенного в корпусе КА и предназначенного для компенсации влияния неразгруженного кинетического момента K_p^{CCO} на динамику КА в ССО. Инерционная масса дополнительного гироскопа так же, как и инерционная масса исполнительной гиросистемы, включена в тензор инерции КА.

Управляющий гиростатический момент $k_{\omega}(t)$ формируется конфигурационными кинематическими связями (см. (2.2) в [2]):

$$\begin{cases} k_{\omega x}(t) = 2h\left(-c\alpha_x(t)\,c\beta_x(t) + s\,\alpha_y(t)\,c\beta_y(t)\right), \\ k_{\omega y}(t) = 2h\left(-c\alpha_y(t)\,c\beta_y(t) + s\,\alpha_z(t)\,c\beta_z(t)\right), \\ k_{\omega z}(t) = 2h\left(-c\alpha_z(t)\,c\beta_z(t) + s\,\alpha_x(t)\,c\beta_x(t)\right), \end{cases} \tag{0.4}$$

где h – собственный кинетический момент роторов гиродинов, $\alpha_i(t) = (\delta_{i1}(t) + \delta_{i2}(t))/2$, $\beta_i(t) = (\delta_{i1}(t) - \delta_{i2}(t))/2$, $\delta_{ij}(t)$ – углы *реальных* прецессий гироузлов, $i = x, y, z,\ j = 1, 2$ – номер гиродина в паре (подробности см. в [2]), $c\theta \triangleq \cos\theta$, $s\theta \triangleq \sin\theta$.

1. Постановка задачи ориентации. Рассматривается задача ориентации КТ на новый объект съемки после завершения очередного рабочего режима. Целью статьи является демонстрация работоспособности *новой технологии расчета законов* программных управлений переориентацией КА как *решения краевой двухточечной задачи* в пространстве переменных состояния КА. Пространство состояний представлено парами $(\omega(t), \lambda(t))$ – прямым произведением пространства угловых скоростей вращения аппарата вокруг центра масс и пространства кватернионов, определяющих положение аппарата. Динамика аппарата рассматривается в связанной с ним системе координат (ССК), движущейся относительно инерциальной системы координат (ИСК).

Как показали исследования, важным в новой технологии для времени и точности расчета закона переориентации КА является начальное состояние аппарата: перманентный характер заданной начальной скорости $\omega^d(t_0)$. Однако при всей практической важности названных временных и точностных характеристик в процессе расчета законов программного управления переориентацией КА основным качеством при принятии в эксплуатацию новой технологии расчета является *гарантия безостановочности исполнения гиродинами вычисленных законов*.

Это *качество* рассматривается нами как *основное*, поскольку практически всем эксплуатируемым сегодня законам программной ориентации КА сопутствует так называемая “проблема сингулярных состояний” гиросистемы. Попадая в сингулярные состояния, КА теряет управляемость и рабочий процесс прерывается. При всем разнообразии используемых методов преодоления сингулярных состояний их *присутствие в вычисленных законах не позволяет гарантировать безостановочность их исполнения гиродинами*. И такой гарантии не будет, пока расчет законов программных управлений, исполняемых гиродинами, будет основываться на идеологии *прямой задачи ньютоновской динамики*. Иначе говоря, пока этот расчет будет проводиться по *априори заданному закону* движения без гарантии существования управления, при котором заданный закон движения является решением уравнений динамики КА, и пока в расчете будет использоваться *производная гиростатического* момента. Динамическая модель КА имеет нелинейную структуру, для которой пока не найдено конструктивных *достаточных* условий управляемости *в замкнутой форме*. Это обстоятельство не позволяет пользователям метода вычисления законов управления по заданному движению КА при переориентации *гарантировать существование* непрерывно исполняемого программного управления, при котором *назначенный априори закон* движения *является решением* уравнений динамики КА. Прерывание исполнения управления, вычисленного без обеспечения управляемости, свидетельствует о том, что назначенный априори закон движения решением уравнений движения не является.

Итак, *основная цель* данной статьи — *демонстрация гарантии безостановочного исполнения гиродинами законов* программных управлений, вычисленных новым методом. Вопрос *обеспечения выполнения* в *начальный момент* переориентации *условия постоянства перманентной скорости вращения* КА вокруг центра масс в этой статье не рассматривается. Обоснование выполнения этого условия, а также решение других вопросов, сопутствующих задаче программной переориентации (в частности, возможности решения задачи *сканирования заданных маршрутов с заданной точностью* как последовательности перманентных поворотов), составит предмет отдельной статьи. В свое время задача обоснования решения задачи сканирования заданного маршрута как решения последовательности краевых двухточечных задач *итерационным методом* была успешно решена [6–8].

2. О структуре процесса переориентации. В заданный момент t_0 при выключенном прецессировании гироузлов по показаниям датчиков вычисляется вектор скорости $\omega^d(t_0) = \omega^d n_0^d$, ее величина $\omega_0^d \triangleq \omega(t_0)$ и орт $n^d(t_0)$ (индекс d при параметре указывает, что это значение взято с датчика). С датчиков же снимаются значения углов *реальных* прецессий $\delta_{i0}^{1d} \triangleq \delta_i^{1d}(t_0)$, $\delta_{i0}^{2d} \triangleq \delta_i^{2d}(t_0)$, где $i = x$, y, z — имена коллинеарных пар. По полученным данным δ_{i0}^{1d}, δ_{i0}^{2d} вычисляются значения *виртуальных* прецессий α_{i0}^d, $i = x, y, z$, определяющих положение осей *виртуальных* маховиков для каждой коллинеарной пары, и значения виртуальных прецессий β_{i0}^d, определяющих величину кинетического момента $k_{\omega i}(t) = 2h\cos\beta_i(t)$ каждого виртуального маховика. Подробности о виртуальных прецессиях $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ см. в [5], п. 2 и в [9].

Задача переориентации заключается в переводе КА из начального состояния $(\omega(t_0), \lambda(t_0))$ в заданное конечное состояние $(\omega(t_f), \lambda(t_f))$. Здесь t_0 — начальный момент времени, который фиксирован, тогда как финальный момент t_f в рассматриваемой в статье постановке реально не задан и определяется в результате решения как сумма времен трех перманентных поворотов. В дальнейшем положим $t_0 = 0$.

Весь *процесс расчета* законов управления переориентацией включает два подготовительных этапа и расчет трех этапов, выполняемых гиродинами последовательно во времени и представляющих три реальных перманентных поворота. Кроме названных этапов имеется этап *виртуального* гашения заданной финальной скорости $\omega_f = \omega(t_f)$ — совершаемый *только численно*, в котором КА не участвует. Этот этап необходим для вычисления *времени* гашения T_f финальной скорости и определения значения кватерниона $\lambda(t_f - T_f)$.

Этап I. Гашение перманентной скорости аппарата $\omega_0^d = \omega^d(t_0)n_0^d$. Этап заключается в расчете по новой технологии гиростатического момента $k_\omega(t)$, исполняющего перманентное гашение. Этап *виртуального* перманентного гашения скорости ω_f проводится параллельно с этапом I для определения времени T_f гашения скорости ω_f и значения кватерниона $\lambda(t_f - T_f)$ в момент гашения скорости ω_f: $\omega(t_f - T_f) = 0$ (гасим в обратном времени).

Этап II. Перестройка гироузлов гиросистемы, необходимая для осуществления поворота КА вокруг перманентной оси Эйлера–Шаля. Этап содержит расчет стартовых значений трех виртуальных прецессий $\alpha_i(t_0^{\mathrm{III}}) \equiv \alpha_i(t_f^{\mathrm{II}})$, определяющих положение трех осей виртуальных маховиков, постоянных в процессе поворота Эйлера–Шаля. Стартовые значения $\alpha_i(t_0^{\mathrm{III}})$ индуцированы перманентной осью поворота Эйлера–Шаля. По вычисленным значениям $\alpha_i(t_0^{\mathrm{III}})$ находятся значения реальных прецессий $\delta_i^1(t_0^{\mathrm{III}})$, $\delta_i^2(t_0^{\mathrm{III}})$ и перестраиваются гироузлы гиродинов.

Этап III. Поворот Эйлера–Шаля из неподвижного положения $\boldsymbol{\lambda}(T_0)$ в неподвижное положение $\lambda(t_f - T_f)$, где T_0, T_f – *времена* гашения скоростей $\omega(t_0)$, $\omega(t_f)$ соответственно: $\omega(T_0) = 0$, $\omega(t_f - T_f) = 0$.

Этап IV. Перестройка осей виртуальных маховиков (углов α_i, $i = x, y, z$) для выполнения этапа разгона КА. Содержание этапа IV аналогично содержанию этапа III. Значения $\alpha_i(t_0^{\mathrm{V}}) = \alpha_i(t_f^{\mathrm{IV}})$ определены осью перманентного разгона – ортом $n_f = \omega_f / |\omega_f|$.

Этап V. Перманентный разгон аппарата вокруг оси с ортом n_f из неподвижного состояния $\omega(t_f - T_f) = 0$, $\lambda(t_f - T_f)$ до заданных значений $\omega(t_f)$, $\lambda(t_f)$. Отметим, что в расчетах поворота на этапе III используется угловая скорость $\omega_f = \omega(t_f) n_f$, в процессе гашения которой реально КА не участвует.

В соответствии с описанной структурой процесса переориентации введем следующие обозначения моментов времени начала, окончания и длительности этих этапов:

$0 \triangleq t_0^{\mathrm{I}}$ – момент начала гашения скорости;

t_f^{I} – момент времени окончания гашения: $\omega(t_f^{\mathrm{I}}) = 0$;

$T_0 = t_f^{\mathrm{I}} - t_0^{\mathrm{I}} \equiv t_f^{\mathrm{I}}$ – время гашения;

$t_f^{\mathrm{I}} = t_0^{\mathrm{II}}$ – момент окончания гашения и старта настройки параметров α_i для разворота Эйлера;

$t_f^{\mathrm{II}} = t_0^{\mathrm{III}}$ – момент окончания настройки α_i и старт разворота Эйлера;

$T^{\mathrm{II}} \triangleq t_f^{\mathrm{II}} - t_0^{\mathrm{II}}$ – время настройки α_i для разворота Эйлера;

$t_f^{\mathrm{III}} = t_0^{\mathrm{IV}}$ – момент окончания разворота Эйлера и старта настройки α_i для разгона КА;

$T^{\mathrm{III}} \triangleq t_f^{\mathrm{III}} - t_0^{\mathrm{III}}$ – время разворота Эйлера;

$t_f^{\mathrm{IV}} = t_0^{\mathrm{V}}$ – момент окончания настройки α_i и старта разгона КА;

$T_f = t_f^{\mathrm{V}} - t_0^{\mathrm{V}}$ – время продолжительности перманентного разгона;

$t_f \triangleq t_f^{\mathrm{V}}$ – момент окончания разгона КА, и финиша краевых условий на правом конце задачи переориентации, определяющий время решения краевой задачи;

$T_{or} \triangleq T_0 + T^{\mathrm{III}} + T_f$ – время непосредственной переориентации КА;

$T_{tun} = T^{\mathrm{II}} + T^{\mathrm{IV}}$ – время настройки гиросистемы на исполнение этапов II и III.

3. Гашение начальной скорости КА. По принятой постановке задачи переориентации при *выключении* прецессий гироузлов в момент t_0 и *включении* компенсаторного гироскопа с собственным кинетическим моментом ротора, равным величине неразгруженного кинетического момента КА [1, 5], начальное состояние КА представлено перманентным вращением с постоянной угловой скоростью $\omega_0^d = \omega(t_0) n_0^d$. Согласно предлагаемой новой технологии расчета программных управлений, начальная скорость определяется гиростатическим моментом $k_\omega(t_0)$ в силу уравнения (0.2). В силу предположенной в постановке задачи согласованности в начальный момент t_0 гиростатического момента $k_\omega(t_0)$ и значения ω_0^d уравнение (0.2) выполняется. Используя (0.4), запишем его в следующем виде:

$$k_\omega(t_0) = 2h \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{x0} & \sin\alpha_{y0} & 0 \\ 0 & -\cos\alpha_{y0} & \sin\alpha_{z0} \\ \sin\alpha_{x0} & 0 & -\cos\alpha_{z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_x(t_0) \\ \cos\beta_y(t_0) \\ \cos\beta_z(t_0) \end{pmatrix} = -\omega(t_0)\, I n_0^d. \tag{3.1}$$

Замечание. При исполняемом виртуально *кинематическом конфигурировании* гиросистем гиродинов роли *виртуальных* переменных $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ (см. с. 4) специфичны. Параметр $\alpha_i(t)$ определяет положение *оси прецессии виртуального маховика*, что позволяет изменять положение его оси на различных этапах исполнения рабочего режима ориентации. Внутри же этапа ось виртуального маховика остается неподвижной: $\alpha_{i0} \triangleq \alpha(t_0) \equiv \alpha(t)$, $\forall t \in T^J$ (T^J – время исполнения J-го этапа). В примере, демонстрируемом в статье, перестройка значений $\alpha_i(t)$ происходит между этапами.

Виртуальный параметр $\beta_i(t)$ исполняет роль угла *прецессии* вокруг оси *виртуального* маховика. Значение $\beta_i(t_0)$ исполняется только *в момент* t_0. Это и отражено в обозначениях начальных значений виртуальных параметров α_{i0} и $\beta_i(t_0)$. Здесь унификация в обозначениях сотрет это важное содержательное различие между α_{i0} и $\beta_i(t_0)$.

Из анализа результатов расчетов законов управления, решающих задачу переориентации нелинейной динамической модели КА итерационным методом [10, 11], основанным на обеспечении *управляемости* сходящейся последовательности линеаризованных моделей, было установлено, что в части задач полусумма вычисленных управлений – скоростей прецессий коллинеарных пар – тождественно равна нулю [5]. Это означает, что скорость изменения виртуальных прецессий α_i при переориентации КА нулевая, т.е. оси виртуальных маховиков остаются неподвижными. Исходя из этих наблюдений, было принято решение формировать законы управления на всех этапах переориентации при постоянстве значений α_{i0}, в частности, на этапе гашения скорости ω_0^d положим $\alpha_{i0}^{\mathrm{I}} = \mathrm{const}$.

В этой ситуации для сохранения направления вектора гиростатического момента $k_\omega(t)$ при гашении скорости достаточно, чтобы виртуальные прецессии $\beta_i(t)$ были *тождественными функциями времени для всех коллинеарных пар* гироузлов, т.е. чтобы *во все время гашения* выполнялись следующие условия: $\beta_i(t) \equiv \beta(t), i \in (x, y, z)$, а в момент старта процесса гашения: $\beta_i(t_0) \equiv \beta(t_0) = 0$. Отождествление $\beta_i(t) \equiv \beta(t)$ для трех спарок осуществляется в момент запуска исполнительной гиросистемы. Закон гашения угловой скорости $\omega(t)$, исполняемый гиростатическим моментом $k_\omega(t)$, выберем в форме $\omega(t) = \omega(t_0)\cos\beta(t)n_0^d$ и уравнения (3.1) примут вид

$$k_\omega(t) \triangleq 2h\begin{pmatrix} -\cos\alpha_{x0} & \sin\alpha_{y0} & 0 \\ 0 & -\cos\alpha_{y0} & \sin\alpha_{z0} \\ \sin\alpha_{x0} & 0 & -\cos\alpha_{z0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\beta(t) = -\omega\left(t_0\right)\cos\beta(t)\, I n_0^d. \tag{3.2}$$

Из (3.2) получим уравнения для определения направлений осей виртуальных маховиков α_{i0}, $i = x, y, z$, и, следовательно, направление вектора $k_\omega(t_0)$:

$$\begin{pmatrix} -\cos\alpha_{x0} & \sin\alpha_{y0} & 0 \\ 0 & -\cos\alpha_{y0} & \sin\alpha_{z0} \\ \sin\alpha_{x0} & 0 & -\cos\alpha_{z0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\omega^d(t_0)I}{2h}n_0^d. \tag{3.3}$$

Из уравнений (3.3) вычисляются необходимые для гашения стартовые значения виртуальных прецессий $\alpha_{i0} = \alpha_i(t_0^I)$. Однако, согласно рассматриваемой постановке задачи переориентации, уравнения (3.3) (условие согласованности $\omega(t_0)$ и $k_\omega(t_0)$) должны выполняться сразу, как только был скомпенсирован неразгруженный кинетический момент КА, т.е. при выполнении тождества: $k_K(t) \equiv L(\varphi(t))K_{p0}^{\mathrm{CCO}}$. И значения α_{i0} должны вычисляться по показаниям датчиков $\delta_i^{1d}(t_0)$, $\delta_i^{2d}(t_0)$. Таким образом, уравнения (3.3) позволяют контролировать сведения, получаемые из датчиков, о согласованности начальной скорости $\omega^d(t_0)$ и гиростатического момента $k_\omega^d(t_0)$.

При гашении начальной скорости $\omega(t_0)$ рассмотрим изменение прецессий $\beta(t)$ по линейному закону ($\beta^d(t_0) = 0$):

$$\beta(t) = \dot{\beta}^{\mathrm{I}} t + \beta^d(t_0), \quad (0 \le t \le T_0), \quad \beta(T_0) = \pi/2, \quad \beta^{\pm}(t) \triangleq \pm\beta(t).$$

4. Вычисление законов прецессий при гашении финальной скорости $\omega(t_f)$. Обеспечение в перманентном вращении $\omega(t_f - T_f) = 0$ и вычисление положения КА в момент его "остановки" $\lambda(t_f - T_f)$ проводится только аналитически: для КА процесс "гашения вращения" *реально* не осуществляется. Таким образом, на этапе "гашения" *финальной* угловой скорости $\omega_f = \omega(t_f) n_f$ *значений реальных* параметров прецессии гироузлов δ_{i1}, δ_{i2} в момент начала "гашения" $\delta_{i1}(0), \delta_{i2}(0)$ не имеется. Это позволяет при расчете времени "гашения" *финальной* скорости T_f и при вычислении величины кватерниона λ $(t_f - T_f)$ применить параметры виртуальной прецессии и структуры законов, использованные в расчете процесса гашения начальной угловой скорости ω_0. Таким образом, для "гашения" $\omega_f = \omega_f(t) n_f$ могут быть повторены расчеты, выполненные в разд. 2. При этом можно считать, что заданный вектор угловой скорости удовлетворяет условию перманентного вращения (0.2).

5. Перестройка гироузлов для поворота Эйлера–Шаля. На этапе гашения начальной угловой скорости в момент ее обнуления обнуляется и гиростатический момент. И старт и финиш при повороте Эйлера–Шаля должны начинаться и заканчиваться в неподвижном состоянии КА, поэтому значения виртуальной прецессии $\beta^{\pm}(t_f^{\mathrm{I}}) = \pm\pi/2$ для обоих гироузлов каждой спарки, обеспечившие эти нулевые значения $\omega(t_f^{\mathrm{I}}) = 0$ и $\mathbf{k}_{\omega}(t_f^{\mathrm{I}}) = 0$, должны сохраняться *до старта этапа поворота* Эйлера–Шаля. Таким образом, при *настройке* виртуальных прецессий α_i на стартовые значения разворота Эйлера–Шаля $\alpha_i(t_0^{\mathrm{III}}) = \alpha_i(t_f^{\mathrm{II}})$, значения $\beta(t_f^{\mathrm{I}})$, определяющие величины кинетических моментов каждого из трех виртуальных маховиков, сохраняют значения $\beta^{\pm}(t_f^{\mathrm{I}}) = \pm\pi/2$, полученные в момент гашения скорости КА, во все *время* $T^{\mathrm{II}} = t_f^{\mathrm{II}} - t_0^{\mathrm{II}}$ настройки значений $\alpha_i^d(t_0) \equiv \alpha_i(t_0^{\mathrm{I}})$. В результате гиростатический момент на всем промежутке времени настройки параметров $\alpha_i(t)$ остается нулевым, и, следовательно, при этой настройке состояние КА не возмущается и компенсация возмущения не нужна.

В силу этого обстоятельства задача обеспечения исполнения поворота Эйлера–Шаля заключается только в перестройке гироузлов $\alpha_i(t)$ из положений $\alpha_i(t_0^{\mathrm{I}})$ в стартовые положения $\alpha_i(t_0^{\mathrm{III}}) = \alpha_i(t_f^{\mathrm{II}})$ поворота Эйлера–Шаля, которые определены осью этого поворота. Заметим, что значения $\alpha_i(t)$ на этапе гашения скорости $\omega(t_0)$ постоянны: $\alpha_i^d(t_0) = \alpha_i(t_0^{\mathrm{I}}) = \alpha_i(t_f^{\mathrm{I}})$.

Зададим законы изменения виртуальных прецессий $\alpha_i(t)$ при перестройке их в стартовые положения $\alpha_i(t_0^{\mathrm{III}})$ поворота Эйлера–Шаля в виде:

$$\alpha_i(t) = \dot{\alpha}_i^{\mathrm{II}}(t - t_0^{\mathrm{II}}) + \alpha_i^d(t_0), \quad t_0^{\mathrm{II}} \le t \le t_f^{\mathrm{II}} = t_0^{\mathrm{III}}, \quad \dot{\alpha}_i^{\mathrm{II}} = \mathrm{const}.$$

В процессе *перестройки* законы изменения компонент $k_{\omega x}(t)$, $k_{\omega y}(t)$, $k_{\omega z}(t)$ гиростатического момента $k_{\omega}(t)$ формируются уравнениями (0.4).

Для вычисления кватернионов $\lambda(T_0) = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$ и $\lambda(\lambda_f - T_f) = \nu_0 + \nu_1 i_1 + \nu_2 i_2 + \nu_3 i_3$ необходимо знать орты перманентных осей n_0, n_f вращения аппарата при гашении обеих скоростей. Кватернионы $\lambda(T_0)$ и $\lambda(t_f - T_f)$ вычисляются по формулам, полученным интегрированием кинематического уравнения (заметим, что реально задан только кватернион λ_f, а время T_f не определено, оно вычисляется по формулам, представленным выше):

$$\lambda(T_0) = \left(\cos\frac{\varphi(T_0)}{2} E + \sin\frac{\varphi(T_0)}{2} N\right)\lambda_0,$$

$$\lambda\left(t_f - T_f\right) = \left(\cos\frac{\varphi(t_f - T_f)}{2}E + \sin\frac{\varphi(t_f - T_f)}{2}N\right)\lambda_f,$$

$$\varphi\left(T_0\right) \triangleq \omega_0 \int_0^{T_0} \cos\beta(\tau)d\tau, \quad \varphi\left(t_f - T_f\right) \triangleq \omega_f \int_{t_f}^{t_f - T_f} \cos\beta(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

где $\varphi\left(T_0\right)$, $\varphi\left(t_f - T_f\right)$ – углы поворота КА при перманентном гашении начальной и конечной скоростей соответственно, а E – единичная матрица.

Не останавливаясь на деталях получения этих формул, заметим, что при перманентном вращении $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \omega(t)\mathbf{n}_0$ матрица $\Lambda(\boldsymbol{\omega})$ – будет скалярной матрицей: $\Lambda(\boldsymbol{\omega}) = \omega(t)\mathbf{N}(\mathbf{n}_0)$ и известное кинематическое уравнение $2\dot{\lambda} = \Lambda(\omega)\lambda$ легко интегрируется (здесь $N(n_0)$ – постоянная кососимметрическая матрица порядка 4 × 4, составленная из компонент орта n_0 (см. [12])).

6. Вычисление оси Эйлера–Шаля и угла поворота для совмещения кватернионов λ_1 и λ_2. Для расчета оси и угла перманентного поворота КА вокруг нее до совмещения его положения при $\lambda_1 \triangleq \lambda(t_0^{\mathrm{I}})$ с положением при $\lambda_2 \triangleq \lambda(t_f - T_f)$ вычислим кватернион Эйлера–Шаля следующим образом: $\lambda_2 = \lambda_1 \circ \lambda^{\mathrm{III}}$. Откуда $\lambda^{\mathrm{III}} = \lambda_1^{-1} \circ \lambda_2$ или

$$\lambda^{III} = \left(\lambda_0 - \lambda_1 i_1 - \lambda_2 i_2 - \lambda_3 i_3\right) \circ \left(\nu_0 + \nu_1 i_1 + \nu_2 i_2 + \nu_3 i_3\right).$$

Далее, вычисляя по формулам (1.1) [12], получим:

$$\begin{cases} \lambda_0^{\mathrm{III}} = \lambda_0\nu_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3, \\ \lambda_1^{\mathrm{III}} = \lambda_0\nu_1 - \lambda_1\nu_0 + \lambda_3\nu_2 - \lambda_2\nu_3, \\ \lambda_2^{\mathrm{III}} = \lambda_0\nu_2 - \lambda_2\nu_0 + \lambda_1\nu_3 - \lambda_3\nu_1, \\ \lambda_3^{\mathrm{III}} = \lambda_0\nu_3 - \lambda_3\nu_0 + \lambda_2\nu_1 - \lambda_1\nu_2. \end{cases}$$

Орт оси поворота Эйлера–Шаля $n_{э-ш}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, задаваемый в связанной с аппаратом системе отсчета (ССО) направляющими косинусами, и угол поворота χ определяются следующими формулами [12]:

$$\cos\frac{\chi}{2} = \lambda_0^{\mathrm{III}}, \quad \cos\alpha = \frac{\lambda_1^{\mathrm{III}}}{\sin\frac{\chi}{2}}, \quad \cos\beta = \frac{\lambda_2^{\mathrm{III}}}{\sin\frac{\chi}{2}}, \ \cos\gamma = \frac{\lambda_3^{\mathrm{III}}}{\sin\frac{\chi}{2}}.$$

7. Построение законов управления при развороте Эйлера–Шаля. Начальными и конечными состояниями *гиросистемы* на этапе поворота Эйлера–Шаля служат ее конечные состояния в моменты времени t_f^{I} и $t_f - T_f$ гашения заданных *начальной* и *конечной* скоростей КА. Уравнения для расчета виртуальных прецессий α_i^{III}, $\beta(t)$ для поворота по Эйлеру имеют вид:

$$\begin{cases} k_{\omega x}(t) \equiv 2h(\sin\alpha_y^{\mathrm{III}} - \cos\alpha_x^{\mathrm{III}})\cos\beta(t) = An_x^{\mathrm{III}}\omega(t), \\ k_{\omega y}(t) \equiv 2h(\sin\alpha_z^{\mathrm{III}} - \cos\alpha_y^{\mathrm{III}})\cos\beta(t) = Bn_y^{\mathrm{III}}\omega(t), \\ k_{\omega z}(t) \equiv 2h(\sin\alpha_x^{\mathrm{III}} - \cos\alpha_z^{\mathrm{III}})\cos\beta(t) = Cn_z^{\mathrm{III}}\omega(t). \end{cases}$$

В этой ситуации структуры законов $\omega(t)$ и $k_\omega(t)$ выберем в виде $\omega(t) = \rho_0\cos\beta(t)$ (ρ_0 – постоянный параметр режима Эйлера–Шаля) и $k_\omega(t) = 2h\cos\beta(t)\nu_0$, а орт ν_0 определим значениями α_i^{III}, $i = x, y, z$, удовлетворяющими системе:

$$\begin{cases} \sin\alpha_y^{\mathrm{III}} - \cos\alpha_x^{\mathrm{III}} = -\dfrac{\rho_0 An_x^{\mathrm{III}}}{2h}, \\ \sin\alpha_z^{\mathrm{III}} - \cos\alpha_y^{\mathrm{III}} = -\dfrac{\rho_0 Bn_y^{\mathrm{III}}}{2h}, \\ \sin\alpha_x^{\mathrm{III}} - \cos\alpha_z^{\mathrm{III}} = -\dfrac{\rho_0 Cn_z^{\mathrm{III}}}{2h}. \end{cases}$$

Вращение $\omega(t) = \omega(t)\, n_0^{\mathrm{III}}$ осуществляется по закону

$$\omega(t) = \rho_0 \cos\beta(t), \quad \varphi(T^{\mathrm{III}}) = \rho_0 \int\limits_{t_0^{\mathrm{III}}}^{t_f^{\mathrm{III}}} \cos\beta(\tau) d\tau.$$

Отметим здесь, что используемое при перманентном гашении скорости и при повороте Эйлера–Шаля изменение гиростатического момента $k_\omega(t)$ при $t \in T^{\mathrm{I}} + T^{\mathrm{III}}$ только по величине не противоречит утверждению [13], что перманентные вращения аппарата в этом случае возможны *только вокруг его главных осей инерции*. Действительно, в [13] рассматривается *полный* гиростатический момент, который в решаемой задаче управления равен $k(t) = k_\omega(t) + k_K(t)$. В силу ортогональности матрицы $L(\varphi(t))$ вместе со слагаемым $k_K(t) = L(\varphi(t))\, K_0$ в процессе управления *меняет не только величину*, *но и направление*. Таким образом, используемые выше перманентные вращения в задаче переориентации аппарата-гиростата возможны вокруг любых осей, а не только вокруг главных осей инерции.

Условием совмещения кватернионов $\lambda(t_f^{\mathrm{III}}) = \lambda(t_f - T_f)$ при повороте КА вокруг оси Эйлера–Шаля является равенство $\lambda = \lambda_1^{-1} \circ \lambda_2$. Откуда угол поворота аппарата вокруг оси Эйлера–Шаля χ^{III}, при котором это совмещение происходит, находится из равенства $\cos(\chi^{\mathrm{III}}/2) = \lambda_0^{\mathrm{III}}$.

При выборе на этапе поворота закона изменения $\beta(t)$ в виде

$$\beta^{\pm}(t) = \dot\beta^{\mathrm{III}}(t - t_0^{\mathrm{III}}) + \beta(t_0^{\mathrm{III}}), \quad (t_0^{\mathrm{III}} \le t \le t_0^{\mathrm{III}} + T^{\mathrm{III}}), \quad \beta(t_0^{\mathrm{III}}) = -\pi/2,$$

где время поворота T^{III} определится из равенства

$$\rho_0 \int\limits_0^{T^{\mathrm{III}}} \cos(\dot\beta^{\mathrm{III}}\tau - \pi/2)\, \mathrm{d}\,\tau \triangleq \chi^{\mathrm{III}}.$$

8. Перманентный разгон КА до заданного финального состояния. Перманентный разворот КА из положения $\lambda_2 \triangleq \lambda(t_f - T_f)$ вокруг оси n_f *за время* T_f на угол

$$\chi_f = \varphi(T_f) \triangleq \omega_f \int\limits_{t_f - T_f}^{t_f} \cos\beta(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

очевидно, восстановит аппарат в заданном положении $\lambda(t_f)$. В силу четности функции $\lambda_{f0} = \cos(\chi_f/2)$ это восстановление положения $\lambda(t_f)$ после поворота на угол χ_f от направления вращения не зависит.

9. Численная реализация расчета законов управления переориентацией. Продемонстрируем применение описанной выше технологии расчета программных управлений в решении задачи переориентации жесткого КА с тензором инерции $I = \mathrm{diag}\{12000;\ 21000;\ 23000\}$ (кгм^2) и собственным кинетическим моментом каждого их шести роторов $h = 100$ нмс. Пусть требуется перенацелить КА из начального состояния $(\omega(t_0), \lambda(t_0))$, где $\omega(t_0)$ = [0.00043633; 0.00087266; 0.00034907] (рад/с) и $\lambda(t_0)$ = [0.92388; 0; 0; 0.38268], в конечное состояние $(\omega(t_f), \lambda(t_f))$, где $\omega(t_f)$ = [0.00043633; 0.00087266; 0.00034907] (рад/с) и $\lambda(t_f)$ = [0.70711; 0; 0; 0.70711], таким образом, необходимо осуществить поворот КА, равный $\pi/4$ рад.

В разд. 2 были описаны основные этапы процесса переориентации: три *основных* шага – перманентные вращения при переориентации (этапы I, III, V) и два *вспомогательных* действия – перестройки гиросистемы перед этапами поворота Эйлера–Шаля (этап II) и разгона КА (этап IV).

На этапах перестройки II и IV решалась задача приведения гиросистемы в стартовые состояния для исполнения соответственно поворота КА и его разгона до конечного состояния. Как показано в разд. 5, углы прецессии гиродинов $\beta_i(t) \triangleq \beta\ (t)$ на этапах перестройки (этапы II, IV) яв-

Таблица 1. Параметры закона управления для этапов перестройки гиросистемы

Этап	α_{x0}^J	$\dot\alpha_x^J$	α_{y0}^J	$\dot\alpha_y^J$	α_{z0}^J	$\dot\alpha_z^J$	β_0^J	T^J, с
II	0.8018	–0.0082	0.7332	0.0105	0.7094	–0.0047	–1.5708	37.74
IV	0.4921	0.0082	1.1284	–0.0105	0.5310	0.0047	1.5708	37.74

Таблица 2. Параметры закона управления для основных этапов переориентации КА

Этап	α_x^J	α_y^J	α_z^J	$\dot\beta_0$	β_0	ρ_0, рад/с	T_s, с
I	0.8018	0.7332	0.7094	–0.0105	0	0.0010	150
III	0.4921	1.1284	0.5310	0.0094	–1.5708	0.0035	333.58
V	0.8018	0.7332	0.7094	–0.0105	1.5708	0.0010	150

ляются постоянными: $\beta(t) \equiv \beta_0^J$ $(J \in \{\mathrm{II},\mathrm{IV}\})$ и $\dot\beta(t) = 0$, а углы прецессии $\alpha_i(t)$, $i = x, y, z$, изменяются по линейному закону:

$$\alpha_i(t) = \dot\alpha_i^J(t - t_0^J) + \alpha_{i0}^J, \quad (t_0^J \le t \le t_f^J = t_0^J + T^J), \quad \alpha_{if}^J = \alpha_i(t_f^J), \tag{9.1}$$

где α_{i0}^J, α_{if}^J – значения углов прецессии гироузлов в начальный и конечный момент этапа перестройки, T^J – длительность этапа перестройки.

Значения параметров $\dot\alpha_i^J$ в законе (9.1) и длительность перестройки будем определять таким образом, чтобы в процессе перестройки выполнялось неравенство $|\dot\alpha_i(t)| + |\dot\beta(t)| \le \bar{\dot\delta}$, где $\bar{\dot\delta}$ – максимальная для спарок скорость вращения гироузлов. В расчетах принималось $\bar{\dot\delta} = 6$ об/мин (0.0105 рад/с). Таким образом, длительность этапа настройки, исходя из ограничений на скорость прецессии гироузлов, можно определить как $T^J = \max(|\alpha_{if}^J - \alpha_{i0}^J|/\bar{\dot\delta})$, $i \in \{x, y, z\}$, а параметры $\dot\alpha_i^J$ в законе (9.1) вычислить по формулам $\dot\alpha_i^J = (\alpha_{if}^J - \alpha_{i0}^J)/T^J$.

Вычисленные значения параметров законов настройки гиросистемы на этапах II, IV приведены в табл. 1.

На этапах гашения, поворота и разгона (этапы I, III, V) закон виртуальной прецессии гиродинов $\beta_i(t)$, $i \in \{x, y, z\}$, по доказанному берется одинаков для трех пар в виде

$$\beta(t) = \dot\beta^J(t - t_0^J) + \beta_0^J, \quad (t_0^J \le t \le t_f^J = t_0^J + T^J), \tag{9.2}$$

где $J \in \{\mathrm{I}, \mathrm{III}, \mathrm{V}\}$ – номер основного этапа; закон изменения величины угловой скорости при этом определяется выражением $\omega(t) = \rho_0^J \cos\beta(t)$. Для этапов гашения и разгона параметр ρ_0^J совпадает с величиной угловой скорости соответственно в начальный и конечный моменты времени, а на этапе разворота этот параметр имеет смысл максимально возможной скорости вращения КА и назначается исходя из возможностей гиросистемы обеспечивать эту скорость. Параметр $\dot\beta^J$ в законе (9.2) берется так, чтобы удовлетворялось равенство $\left|\dot\beta^J\right| = \bar{\dot\delta}$.

Как отмечалось ранее, на основных этапах углы виртуальной прецессии α_i^J, $i = x, y, z$, постоянны и находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} s\,\alpha_y^J - c\,\alpha_x^J = -\dfrac{\rho_0^J}{2h} A\, n_x^0, \\ s\,\alpha_z^J - c\,\alpha_y^J = -\dfrac{\rho_0^J}{2h} B\, n_y^0, \\ s\,\alpha_x^J - c\alpha_z^J = -\dfrac{\rho_0^J}{2h} C\, n_z^0. \end{cases} \tag{9.3}$$

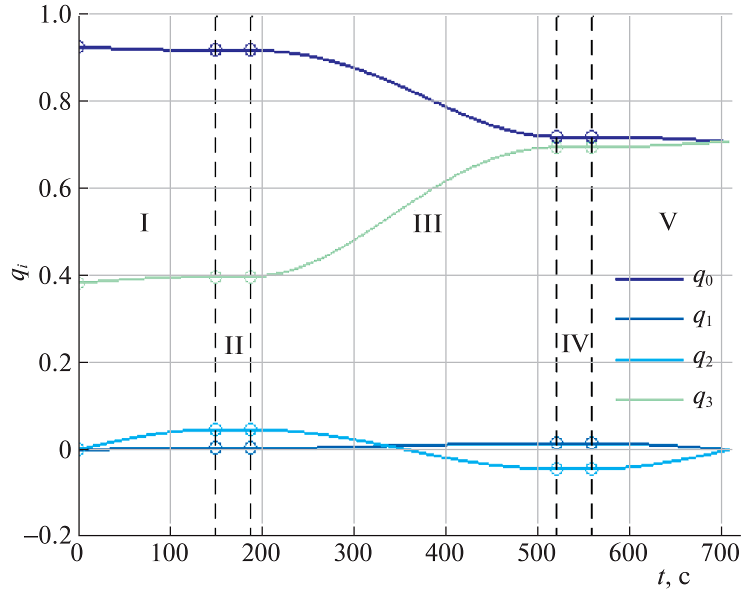

Рис. 1. Изменение компонентов кватерниона

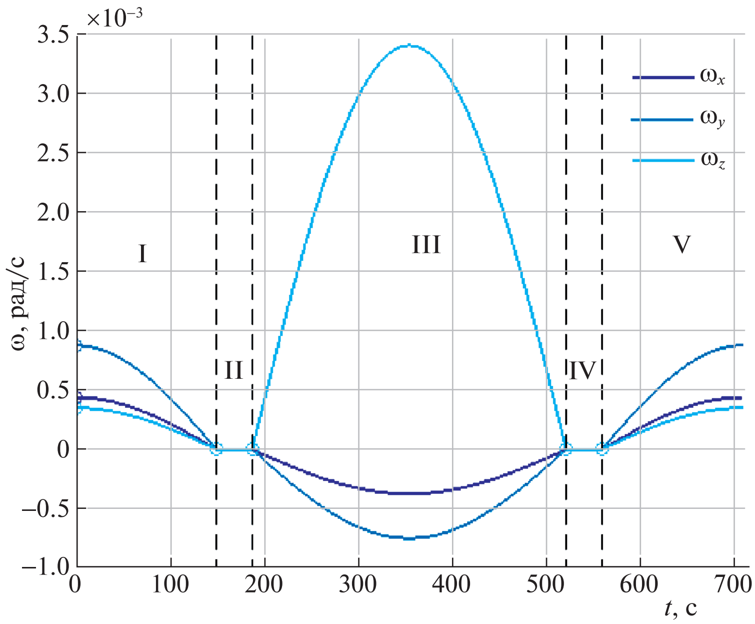

Рис. 2. График угловой скорости

При расчетах для решения системы (9.3) использовались стандартные средства системы *Matlab*.

Ключевым шагом алгоритма вычисления законов виртуальной прецессии для этапа III является определение оси Эйлера–Шаля, относительно которой осуществляется поворот КА и которая задается ортом $n_0^{\text{Э–Ш}}$, а также угла поворота χ^{III}. Расчет этих величин выполнялся по формулам, приведенным в разд. 6.

Наконец, для этапов гашения I и V время исполнения находилось по формуле $T^J = \pi/(2\bar{\dot{\delta}})$, а для этапа III – $T^J = \pi\chi^J/(2\rho_0^J)$.

Параметры законов управления, вычисленные для трех основных этапов, приведены в табл. 2.

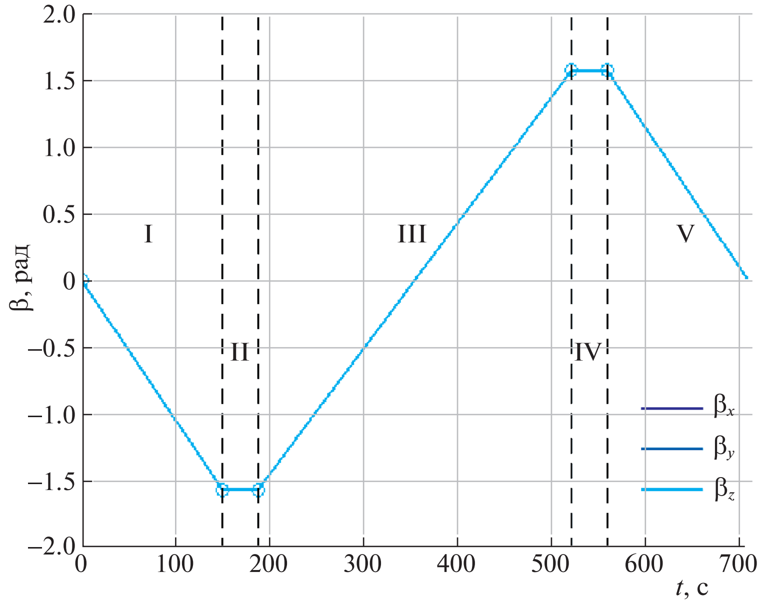

Рис. 3. Изменение виртуальных углов прецессии β_i

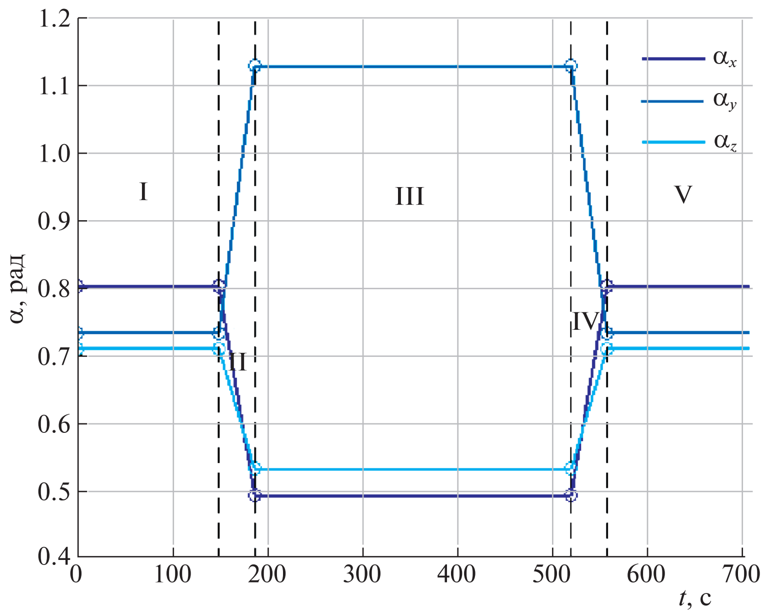

Рис. 4. Изменение виртуальных углов прецессии α_i

Проверка рассчитанных с помощью описанной выше технологии законов управления для рассматриваемого примера осуществлялась путем интегрирования полной модели КА

$$I\dot{\omega}(t) + \dot{k}(t) = -\omega(t) \times (I\omega(t) + k(t)), \tag{9.4}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\omega \circ \lambda, \tag{9.5}$$

где $\omega(t) = \omega(t)n_0$ – перманентный закон вращения; λ – кватернион ориентации КА; $k(t) = k_\omega(t) + k_K(t)$ и компоненты $k_\omega(t)$ в соответствии с описанной технологией определены формулами (0.4).

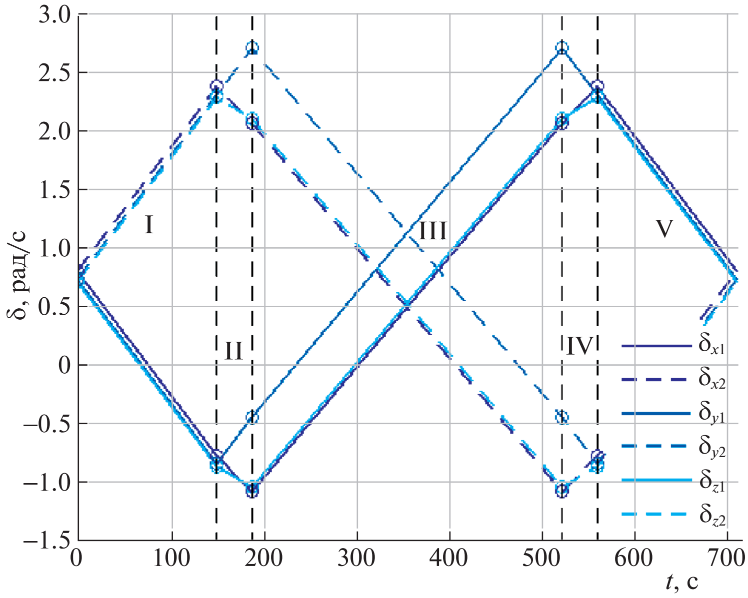

Рис. 5. Изменение реальных углов прецессии гиродинов

На рис. 1–5 представлены полученные в результате интегрирования модели (9.4), (9.5) графики изменения элементов кватерниона положения λ, компонент вектора угловой скорости ω, законы виртуальных прецессий β_i, α_i и соответствующих им реальных прецессий δ_{i1} и δ_{i2}. Римскими цифрами на рисунках обозначены соответствующие этапы переориентации, описанные в разд. 2.

Отметим, что время расчета законов управления для всех этапов решения задачи переориентации на персональном компьютере Intel Core2 Quad CPU Q9400 2.66 ГГц в сумме не превышает 0.2 с. Это позволяет сделать вывод о том, что предлагаемая технология расчета программных управлений имеет перспективу быть реализованной на борту. **Финальная ошибка** реализации всех этапов (ошибка попадания КА в конечное состояние по положению и угловым скоростям) при численном интегрировании нелинейной модели КА (9.4), (9.5) с вычисленными управлениями сопоставима с ошибками используемого метода интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дружинин Э.И.* Расчет программных управлений, безостановочно исполняемых гиродинами // ДАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 22–25.
2. *Дружинин Э.И.* Новая конечношаговая технология расчета программных управлений, безостановочно исполняемых гиродинами. I // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2.
3. *Amster M.N., Anderson R.P., Williams H.M.* Analysis of Twin-gyro Attitude Controller; Final Summary Report // EL-EOR-13005. Dallas Texas: Chance Vought Aircraft, Inc., 1960.
4. *Lopez A.E., Ratcliff J.W., Havill J.R.* Results of Studies on a Twin-Gyro Attitude-Control System for Space Vehicles // J. Spacecraft. 1964. V. 1. № 4. P. 399–402.
5. *Crenshaw J.W.* 2-SPEED, A Single–Gimbal Control Moment Gyro Attitude Control System // AIAA Paper. № 895. 1973. P. 1–10.
6. *Васильев С.Н., Воронов В.А., Дружинин Э.И.* Новая вычислительная технология формирования программных управлений в нелинейных системах // Тр. XIII Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО “Концерн “ЦНИИ Электроприбор”, 2006. С. 48–56.
7. *Дружинин Э.И.* Обусловленность прямых алгоритмов расчета программных управлений нелинейными системами // Тр. Междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби”. Т. 2. Екатеринбург: Изд-во Уральск. ун-та. 2006. С. 136–142.
8. *Дружинин Э.И.* Об устойчивости прямых алгоритмов расчета программных управлений в нелинейных системах // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 4. С. 14–20.

9. *Бычков И.В., Воронов В.А., Дружинин Э.И., Козлов Р.И., Ульянов С.А., Беляев Б.Б., Телепнев П.П., Ульяшин А.И.* Синтез комбинированной системы прецизионной стабилизации обсерватории “Спектр-УФ” I // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 3. С. 204–213.
10. *Дружинин Э.И., Дмитриев А.В.* Метод Ньютона–Канторовича в задаче управления конечным состоянием нелинейного объекта // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука. СО. 1984. С. 251–254.
11. *Дружинин Э.И., Дмитриев А.В.* К теории нелинейных краевых задач управляемых систем // Дифференциальные уравнения и численные методы. Новосибирск: Наука. СО. 1986. С. 179–187.
12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
13. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // ПММ. 1999. Т. 63. № 5. С. 875–876.