ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2019, № 5, с. 32–43

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ТРАЕКТОРИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

А. И. Калинин[a],*, Л. И. Лавринович[a],**

[a] *Белорусский государственный ун-т, Минск, Белоруссия*

**e-mail: kalininai@bsu.by*

***e-mail: lavrinovich@bsu.by*

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.
После доработки 11.03.2019 г.
Принята к публикации 20.04.2019 г.

Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной динамической системы (содержащей малый параметр при нелинейностях) с линейными терминальными ограничениями. Строятся асимптотические приближения в виде программы и обратной связи к оптимальному управлению в этой задаче. Вычисления сводятся к решению невозмущенной линейно-квадратичной задачи, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

DOI: 10.1134/S0002338819050056

Введение. Динамические системы, содержащие малые параметры при нелинейностях, принято называть квазилинейными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами (см., например, [1–6]). Интерес к квазилинейным задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных систем.

В статье рассматривается задача оптимального управления квазилинейной системой с интегральным квадратичным критерием качества при наличии линейных терминальных ограничений на траектории. Ее можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами. Целью работы является построение асимптотических приближений к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в рассмотренной задаче. Суть применяемого подхода к исследованию состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных и множителей Лагранжа – конечномерных элементов, соответствующих в силу принципа максимума [7] оптимальному управлению. Статья обобщает результаты, полученные в [8], где рассматривалась задача с фиксированным правым концом траекторий.

1. Постановка задачи. В классе многомерных управляющих воздействий с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимизации квазилинейной системы:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \tag{1.1}$$

$$Hx(t^*) = g, \tag{1.2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (x^{\mathrm{T}}Q(t)x + u^{\mathrm{T}}P(t)u)dt \to \min, \tag{1.3}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_*, t^* – заданные начальный и конечный моменты времени ($t_* < t^*$), u – r-вектор управления, x – n-вектор фазового состояния системы, g – m-вектор ($m \le n$). Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры, при этом среди линейных терминальных ограничений (1.2) нет “лишних”, т.е. rank $H = m$. В критерии качества $Q(t)$ – неотрицательно-определенная, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрические матрицы для всех $t \in T = [t_*, t^*]$. В дальнейшем для определенности будем считать управления непрерывными справа в любой момент времени.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in R^n$, $t \in T$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$.

Управление $u(t,\mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной им траектории $x(t,\mu)$, $t \in T$, системы (1.1) выполняется условие $Hx(t^*,\mu) = g$. Допустимое управление, минимизирующее функционал $J(u)$, называют оптимальным. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2, \ldots,$) в задаче (1.1)–(1.3), если оно отклоняется по критерию качества (1.3) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $x(t,\mu)$, $t \in T$, удовлетворяет терминальному ограничению (1.2) с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x,t,\mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*), $t_* < t^*$, имеет место $u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3).

В статье предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанном далее предположении оптимального управления и его асимптотических свойствах. Его суть состоит в построении полиномов Тейлора начальных значений сопряженных переменных (в момент времени t_*), которые в силу принципа максимума [7] соответствуют оптимальному управлению. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. В работе также построены асимптотически субоптимальные обратные связи нулевого и первого порядков.

2. Базовая задача. На первом этапе построения асимптотически субоптимальных управлений решается базовая задача

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \tag{2.1}$$

$$Hx(t^*) = g, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (x^{\mathrm{T}}Q(t)x + u^{\mathrm{T}}P(t)u)dt \to \min, \tag{2.2}$$

которая формально получается из исходной при $\mu = 0$ и в отличие от нее выступает задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система (2.1) является управляемой на отрезке $[\tau, t^*]$ относительно подпространства $Hx = 0$ при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ (см. [9]).

Это предположение выполняется тогда и только тогда (см., например, [10]), когда при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ и любом ненулевом m-векторе l имеет место соотношение

$$l^{\mathrm{T}}HF_0(t)B(t) \not\equiv 0, \quad \tau \leq t \leq t^*, \tag{2.3}$$

где $F_0(t)$, $t \in T$, – $(n \times n)$ – матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0A(t), \quad F_0(t^*) = E_n \tag{2.4}$$

с единичной матрицей E_n. Заметим, что условие (2.3), которое называют неявным критерием управляемости на подпространство, для стационарной динамической системы эквивалентно требованию [9]

$$rank(HB,\ HAB,\ \ldots,\ HA^{n-1}B) = m. \tag{2.5}$$

При выполнении предположения 2 в задаче (2.1), (2.2) существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение (см. [11]), которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [7] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные управление и траектория в задаче (2.1), (2.2), тогда существует такой m-вектор множителей Лагранжа λ_0, что выполняется условие

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t)B(t)u^0(t) - \frac{1}{2}u^{0\mathrm{T}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u\in R^r}\left(\psi^{0\mathrm{T}}(t)B(t)u - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right), \quad t \in T,$$

где $\psi^0(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot\psi = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi + Q(t)x^0(t), \quad \psi(t^*) = H^{\mathrm{T}}\lambda_0.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$u^0(t) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t), \quad t \in T.$$

После решения базовой задачи формируется матрица

$$I_0\left(t_*\right) = \begin{pmatrix} HF_{12}\left(t_*\right) & 0_{m\times m} \\ F_{22}\left(t_*\right) & -H^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Здесь $F_{12}\left(t\right)$, $F_{22}\left(t\right)$, $t \in T$, – блоки размеров $n \times n$ матричной функции

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\dot F = -F\bar A(t), \quad F(t^*) = E_{2n}, \tag{2.8}$$

в котором

$$\bar A(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Пусть $\nu_0 = \psi^0(t_*)$. В [10] показано, что при выполнении предположения 2 матрица (2.6) является невырожденной при $t_* < t^*$, а компоненты векторов ν_0, λ_0 – решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$I_0\left(t_*\right)\begin{pmatrix} \nu_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g - HF_{11}\left(t_*\right)x_* \\ -F_{21}\left(t_*\right)x_* \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

3. Асимптотический анализ решения исходной задачи. Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда исходная задача имеет решение. Убедимся, что при сделанных предположениях в задаче (1.1)–(1.3) с достаточно малым μ существует оптимальное управление. Доказательство будет конструктивным и предопределит дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} \dot x = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi, \quad x(t_*) = x_*, \\ \dot\psi = Q(t)x - \left(A(t) + \mu\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)^{\mathrm{T}}\psi, \quad \psi(t_*) = v, \end{gathered} \tag{3.1}$$

в которой $t \in T$. В силу теоремы о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам [12] и предположения 1 существуют такие положительные числа ε_0, μ_0, что задача (3.1) имеет единственное решение $x(t,\nu,\mu)$, $\psi(t,\nu,\mu)$, $t \in T$, принадлежащее классу C^p, если только $\|\nu - \nu_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$. Ниже будет показано, что ответ о существовании оптимального управления в исходной задаче тесно связан с разрешимостью системы конечных уравнений

$$Hx(t^*,\nu,\mu) - g = 0, \quad \psi(t^*,\nu,\mu) - H^{\mathrm{T}}\lambda = 0 \tag{3.2}$$

относительно неизвестных ν, λ при достаточно малых μ. В дальнейшем для сокращения записи будем использовать векторы $\eta = (\nu,\lambda)$, $\eta_0 = (\nu_0,\lambda_0)$, размерности $n + m$ и вектор-функцию

$$R(\eta,\mu) = \begin{pmatrix} Hx(t^*,\nu,\mu) - g \\ \psi(t^*,\nu,\mu) - H^{\mathrm{T}}\lambda \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

что позволяет записать систему (3.2) в виде

$$R(\eta,\mu) = 0. \tag{3.4}$$

Т е о р е м а. При выполнении предположений 1, 2 в задаче (1.1)–(1.3) с достаточно малым (по модулю) μ существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью и представимо в виде

$$u^0(t,\mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t,\nu(\mu),\mu), \quad t \in T. \tag{3.5}$$

Значение $\nu(\mu)$ вектора сопряженных переменных в момент t_* и m-вектор множителей Лагранжа $\lambda(\mu)$, соответствующий в силу принципа максимума оптимальному управлению, удовлетворяют уравнениям (3.2), причем $\nu(\mu) \in C^p$, $\nu(0) = \nu_0$, $\lambda(\mu) \in C^p$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что система уравнений (3.4) однозначно разрешима относительно η при достаточно малых μ. Прежде всего, заметим, что вектор-функция $R(\eta,\mu)$, определенная в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$, принадлежит классу C^p. Поскольку $x(t,\nu_0,0) = x^0(t)$, $\psi(t,\nu_0,0) = \psi^0(t)$, $t \in T$, то, как видно из (3.3), $R(\eta_0,0) = 0$. Привлекая для записи решения задачи (3.1) при $\mu = 0$ фундаментальную матрицу, а затем дифференцируя, получаем $\partial R(\eta_0,0)/\partial\eta = I_0(t_*)$ (см. формулу (2.6)). Как было отмечено в предыдущем разделе, при выполнении предположения 2 эта матрица Якоби будет невырожденной. Таким образом, для системы (3.4) или, что то же самое, (3.2) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме, в некоторой окрестности нуля $|\mu| < \mu_1$ однозначно определена вектор-функция $\eta(\mu) = (\nu(\mu),\lambda(\mu))$ из класса C^p, удовлетворяющая уравнениям (3.2) и условию $\eta(0) = \eta_0 = (\nu_0, \lambda_0)$.

Рассмотрим управление (3.5). Оно будет допустимым в исходной задаче, поскольку для порожденной им траектории $x^0(t,\mu) = x(t,\nu(\mu),\mu)$, $t \in T$, системы (1.1) выполняется терминальное ограничение $Hx^0(t^*,\mu) = g$. Вместе с тем это управление удовлетворяет принципу максимума [7] с вектором сопряженных переменных $\psi^0(t,\mu) = \psi(t,\nu(\mu),\mu)$, $t \in T$. Заметим, что управление (3.5) является нормальной экстремалью, которой соответствует m-вектор множителей Лагранжа $\lambda(\mu)$.

Покажем, что экстремаль $u^0(t,\mu)$, $t \in T$, будет единственным оптимальным управлением в задаче (1.1)–(1.3), если μ достаточно мало. Предположим противное, тогда существует такая последовательность $\mu_k \to 0$, что управление $u^0(t,\mu_k)$, $t \in T$, $k = 1, 2, \ldots$, либо не является оптимальным в исходной задаче с $\mu = \mu_k$, либо существует другое оптимальное управление. Поскольку установлено, что в задаче (1.1)–(1.3) с достаточно малым μ существует допустимое управление, то эта задача имеет решение в классе измеримых функций [11]. Решение исходной задачи с $\mu = \mu_k$ отличное от $u^0(t, \mu_k)$, $t \in T$, обозначим через $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in T$, и пусть $\bar{x}(t, \mu_k)$, $t \in T$ – соответствующая оптимальная траектория. Тогда

$$J(\bar{u}(\cdot,\mu_k)) - J(u^0(\cdot,\mu_k)) \le 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

Опираясь на эти неравенства, можно убедиться в том, что последовательность измеримых вектор-функций $\bar{u}(t,\mu_k)$, $t \in T$, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $u^0(t)$, $t \in T$. Рассуждения, которые приводят к такому выводу, аналогичны тем, что использовались при доказательстве теоремы 8.1 из [6]. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность $\bar{u}(t,\mu_k)$, $t \in T$, сходится почти всюду к оптимальному управлению базовой задачи. Тогда $\bar{x}(t,\mu_k) \to x^0(t)$ равномерно на T. Поскольку управление $\bar{u}(t,\mu_k)$, $t \in T$, является оптимальным, то для него выполняется принцип максимума, т.е. существует такой ненулевой вектор множителей Лагранжа $(\bar{\lambda}_0(\mu_k), \bar{\lambda}_1(\mu_k), \ldots, \bar{\lambda}_m(\mu_k))$, $(\bar{\lambda}_0(\mu_k) \geq 0)$, что вдоль $\bar{u}(t,\mu_k)$, $\bar{x}(t,\mu_k)$ и решения $\bar{\psi}(t,\mu_k)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\begin{gathered}\dot{\psi} = -\left(A(t) + \mu_k \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t,\mu_k),t)\right)^{\mathrm{T}} \psi + \bar{\lambda}_0(\mu_k) Q(t)\bar{x}(t,\mu_k), \quad \psi(t^*) = H^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}(\mu_k), \\ \bar{\lambda}(\mu_k) = (\bar{\lambda}_1(\mu_k), \ldots, \bar{\lambda}_m(\mu_k))^{\mathrm{T}},\end{gathered} \tag{3.6}$$

почти всюду на T (за исключением, быть может, множества нулевой меры) выполняется условие

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t,\mu_k) B(t)\bar{u}(t,\mu_k) - \frac{\bar{\lambda}_0(\mu_k)}{2}\bar{u}^{\mathrm{T}}(t,\mu_k) P(t)\bar{u}(t,\mu_k) = \\ &= \max_{u \in R^r}\left(\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t,\mu_k) B(t)u - \frac{\bar{\lambda}_0(\mu_k)}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Поскольку вектор $(\bar{\lambda}_0(\mu_k), \bar{\lambda}(\mu_k))$ определен с точностью до положительного множителя, то без ограничения общности можно считать, что $\|(\bar{\lambda}_0(\mu_k), \bar{\lambda}(\mu_k))\| = \|(1,\lambda_0)\|$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда из последовательности векторов $(\bar{\lambda}_0(\mu_k), \bar{\lambda}(\mu_k))$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность сходится и обозначим ее предел через $(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda})$. Понятно, что $\bar{\lambda}_0 \geq 0$, $\|(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda})\| = \|(1,\lambda_0)\|$. Последовательность $\bar{\psi}(t,\mu_k)$, $t \in T$, как видно из (3.6), будет равномерно сходиться к решению $\bar{\psi}(t)$, $t \in T$, начальной задачи

$$\dot{\psi} = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi + \lambda_0 Q(t)x^0(t), \quad \psi(t^*) = H^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}. \tag{3.8}$$

Переходя к пределу в (3.7) при $k \to \infty$, получаем, что почти всюду на T

$$\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t) B(t)u^0(t) - \frac{\bar{\lambda}_0}{2}u^{0\mathrm{T}}(t) P(t)u^0(t) = \max_{u \in R^r}\left(\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t) B(t)u - \frac{\bar{\lambda}_0}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right). \tag{3.9}$$

В силу (3.8), (3.9) управление $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет принципу максимума с вектором множителей Лагранжа $(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda})$. В [10] показано, что при выполнении предположения 2 оптимальному управлению в задаче (2.1), (2.2) соответствует в силу принципа максимума единственный (с точностью до положительного множителя) вектор сопряженных переменных. Поэтому $\bar{\lambda}_0 = 1$, $\bar{\lambda} = \lambda_0$ и соответственно $\bar{\psi}(t) = \psi_0(t)$, $t \in T$. Поскольку $\lambda^0(\mu_k) > 0$ для достаточно больших k, то из (3.7) следует, что почти всюду на T

$$\bar{u}(t,\mu_k) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}(t,\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k).$$

Отсюда и из (1.1), (3.1), (3.6) видно, что

$$\begin{gathered}\bar{x}(t,\mu_k) = x(t, \bar{\nu}(\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k), \mu_k), \\ \bar{\psi}(t,\mu_k) = \bar{\lambda}_0(\mu_k)\psi(t, \bar{\nu}(\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k), \mu_k), \quad t \in T,\end{gathered}$$

где $\bar{\nu}(\mu_k) = \bar{\psi}(t_*,\mu_k)$. Поскольку $H\bar{x}(t^*,\mu_k) = g$, $\bar{\psi}(t^*,\mu_k) = H^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}(\mu_k)$, то вектор $(\bar{\nu}(\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k)$, $\bar{\lambda}(\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k))$ является решением системы (3.2) при $\mu = \mu_k$. В силу однозначной разрешимости этой системы в окрестности точки $(\nu_0, \lambda_0, 0)$ имеем $\nu(\mu_k) = \bar{\nu}(\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k)$, $\lambda(\mu_k) = \bar{\lambda}(\mu_k)/\bar{\lambda}_0(\mu_k)$

для достаточно больших k и соответственно $\bar{u}(t,\mu_k) = u^0(t,\mu_k)$ почти всюду на T. Поскольку получено противоречие, теорема доказана.

4. Построение асимптотически субоптимальных управлений. Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (1.1)–(1.3), опираясь на утверждения теоремы. Пусть задано натуральное число N, $N < p$. Поскольку $\eta(\mu) = (\nu(\mu), \lambda(\mu))$ принадлежит классу C^p и $\eta(0) = (\nu_0, \lambda_0)$, то имеют место асимптотические равенства $\nu(\mu) = \nu^{(N)}(\mu) + O(\mu^{N+1})$, $\lambda(\mu) = \lambda^{(N)}(\mu) + O(\mu^{N+1})$, где

$$\nu^{(N)}(\mu) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{N} \mu^k \nu_k, \quad \lambda^{(N)}(\mu) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{N} \mu^k \lambda_k \tag{4.1}$$

есть полиномы Тейлора N-й степени. Вектор-функция

$$u^{(N)}(t,\mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t,\nu^{(N)}(\mu),\mu), \quad t \in T, \tag{4.2}$$

будет асимптотическим субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Действительно, согласно доказанной теореме, оптимальное управление представимо в виде (3.5). Вместе с тем $\nu(\mu) - \nu^{(N)}(\mu) = O(\mu^{N+1})$, а вектор-функция $\psi(t,\nu,\mu)$, как было отмечено, принадлежит классу C^p. Поэтому управление (4.2) отличается от оптимального по норме пространства непрерывных вектор-функций на величину порядка $O(\mu^{N+1})$. По доказанному оптимальная траектория в исходной задаче представима в виде $x^0(t,\mu) = x(t,\nu(\mu),\mu)$, $t \in T$, а для траектории, порожденной управлением (4.2), справедливо равенство $x^{(N)}(t,\mu) = x(t,\nu_N(\mu),\mu)$, $t \in T$. Поскольку вектор-функция $x(t,\nu,\mu)$ принадлежит классу C^p, то траектория $x^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, отличается от оптимальной по норме пространства непрерывных вектор-функций на величину порядка $O(\mu^{N+1})$. Из вышесказанного следует, что для достаточно малых (по модулю) μ имеют место оценки

$$\|\Delta u(t,\mu)\| \le \max_{t\in T} \|\Delta u(t,\mu)\| \le C|\mu|^{N+1}, \quad t \in T,$$

$$\|\Delta x(t,\mu)\| \le \max_{t\in T} \|\Delta x(t,\mu)\| \le C|\mu|^{N+1}, \quad t \in T,$$

где $\Delta u(t,\mu) = u^{(N)}(t,\mu) - u^0(t,\mu)$, $\Delta x(t,\mu) = x^{(N)}(t,\mu) - x^0(t,\mu)$, а C – некоторая положительная постоянная. Здесь и далее норму векторов и матриц считаем евклидовой. Поскольку справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\Big|x^{(N)\mathrm{T}}(t,\mu)Q(t)x^{(N)}(t,\mu) + u^{(N)\mathrm{T}}(t,\mu)P(t)u^{(N)}(t,\mu) - \\
&- x^{0\mathrm{T}}(t,\mu)Q(t)x^0(t,\mu) - u^{0\mathrm{T}}(t,\mu)P(t)u^0(t,\mu)\Big| = \\
&= \Big|2\Delta x^{\mathrm{T}}(t,\mu)Q(t)x^0(t,\mu) + \Delta x^{\mathrm{T}}(t,\mu)Q(t)\Delta x(t,\mu) + \\
&+ 2\Delta u^{\mathrm{T}}(t,\mu)P(t)u^0(t,\mu) + \Delta u^{\mathrm{T}}(t,\mu)P(t)\Delta u(t,\mu)\Big| \le \\
&\le 2\|Q(t)\|\|x^0(t,\mu)\|\|\Delta x(t,\mu)\| + 2\|P(t)\|\|u^0(t,\mu)\|\|\Delta u(t,\mu)\| + \\
&+ \|Q(t)\|\|\Delta x(t,\mu)\|^2 + \|P(t)\|\|\Delta u(t,\mu)\|^2, \quad t \in T,
\end{aligned}$$

а нормы матриц $Q(t)$, $P(t)$ и вектор-функций $x^0(t,\mu)$, $u^0(t,\mu)$ ограничены на промежутке T, то для достаточно малых (по модулю) μ левая часть неравенства ограничена сверху величиной $C_0|\mu|^{N+1}$, где C_0 – некоторая положительная постоянная. Отсюда непосредственно следует, что управление (4.2) отклоняется по критерию качества от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$. Кроме того, порожденная им траектория удовлетворяет терминальному ограничению с точностью того же порядка малости. Таким образом оно является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3).

Для построения управления (4.2) нужно найти коэффициенты ν_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, полинома (4.1), что можно сделать с помощью методики, изложенной в [6]. Согласно этой методике, прежде всего, нужно разложить левую часть уравнения (3.4) по степеням малого параметра. Вектор-функции $x(t,\nu,\mu)$, $\psi(t,\nu,\mu)$ в каждой точке области определения имеют частные производные по μ до порядка p включительно, поэтому они представимы в виде

$$x(t,\nu,\mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k x_k(t,\nu) + O(\mu^{N+1}), \quad \psi(t,\nu,\mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k \psi_k(t,\nu) + O(\mu^{N+1}) \tag{4.3}$$

Применяя формализм Пуанкаре к системе (3.1), составим дифференциальные уравнения для функций $x_k(t,\nu)$, $\psi_k(t,\nu)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, при фиксированном ν:

$$\dot{x}_0 = A(t)x_0 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_0, \quad x_0(t_*) = x_*,$$

$$\dot{\psi}_0 = Q(t)x_0 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_0, \quad \psi_0(t_*) = \nu;$$

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + f(x_0(t),t), \quad x_1(t_*) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1 = Q(t)x_1 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0(t),\psi_0(t),t), \quad \psi_1(t_*) = 0; \tag{4.4}$$

$$\dot{x}_2 = A(t)x_2 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t),t)x_1(t), \quad x_2(t_*) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = Q(t)x_2 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_2 - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0(t),\psi_1(t),t) - \frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}(x_0(t),\psi_0(t),t)\,x_1(t), \quad \psi_2(t_*) = 0;$$

где $h(x,\psi,t) = \psi^{\mathrm{T}} f(x,t)$.

Как видно из (4.4), нахождение коэффициентов разложений (4.3) при заданном ν сводится к последовательному решению начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений.

В силу формул (3.3), (4.3) левая часть уравнения (3.3) допускает асимптотическое представление

$$R(\eta,\mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k R_k(\eta) + O(\mu^{N+1}),$$

в котором

$$R_0(\eta) = \begin{pmatrix} Hx_0(t^*,\nu) - g \\ \psi_0(t^*,\nu) - H^{\mathrm{T}}\lambda \end{pmatrix}, \quad R_k(\eta) = \begin{pmatrix} Hx_k(t^*,\nu) \\ \psi_k(t^*,\nu) \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{4.5}$$

Составим системы линейных уравнений для векторов $\eta_k = (\nu_k,\lambda_k)$, $k = 1, 2, ..., N$. В соответствии со схемой, изложенной в [6], применим для этого метод неопределенных коэффициентов, а именно разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^{N} \mu^k R_k(\eta^{(N)}(\mu)),$$

где $\eta^{(N)}(\mu) = (\nu^{(N)}(\mu),\lambda^{(N)}(\mu))$, по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения (начиная с коэффициента при μ) к нулю. В результате с учетом того, что вектор-функции $R_k(\eta)$, $k = 0,1,2, \ldots, N$, линейны по η, получим невырожденные системы линейных уравнений для последовательного нахождения векторов $\eta_k = (\nu_k,\lambda_k)$, $k = 1, 2, ..., N$:

$$I_0(t_*)\eta_1 = -R_1(\eta_0), \quad I_0(t_*)\eta_2 = -R_2(\eta_0) - \frac{\partial R_1}{\partial \eta}(\eta_0)\,\eta_1,\ldots \tag{4.6}$$

Как видно из (4.5), чтобы сформировать правые части этих систем, необходимо знать значения функций $x_k(t,\nu)$, $\psi_k(t,\nu)$ и их частных производных по компонентам вектора ν в точке (t^*,ν_0).

Значения функций находятся посредством интегрирования уравнений (4.4). Формальным дифференцированием этих уравнений получаем начальные задачи для производных. Например,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial \nu} = A(t)\frac{\partial x_0}{\partial \nu} + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial \nu}(t_*) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} = Q(t)\frac{\partial x_0}{\partial \nu} - A^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}(t^*) = E_n.$$

При вычислении правых частей систем (4.6) следует учитывать, что $x_0(t,\nu_0) = x^0(t)$, $\psi_0(t,\nu_0) = \psi^0(t)$, $t \in T$. Тогда, как видно из (4.4), (4.5),

$$R_1(\eta_0) = \begin{pmatrix} Hx_1^0(t^*) \\ \psi_1^0(t^*) \end{pmatrix},$$

а вектор-функции $x_1^0(t)$, $\psi_1^0(t)$, $t \in T$, являются решением начальной задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A(t)x_1 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + f(x^0(t),t), \quad x_1(t_*) = 0 \\ \dot{\psi}_1 &= Q(t)x_1 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - \frac{\partial h}{\partial x}\left(x^0(t),\psi^0(t),t\right), \quad \psi_1(t_*) = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Последовательно решая системы (4.6), находим векторы $\eta_k = (\nu_k,\lambda_k)$, $k = 1, 2, ..., N$, и составляем полином (4.1). Управление (4.2), как было отмечено, является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Для его построения необходимо решить начальную задачу (3.1) при $\nu = \nu^{(N)}(\mu)$. Вместе с тем в силу (4.3) $\psi(t,\nu^{(N)}(\mu),\mu) = \overline{\psi}^{(N)}(t,\mu) + O(\mu^{N+1})$, где

$$\overline{\psi}^{(N)}(t,\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\overline{\psi}_k(t), \quad t \in T, \tag{4.8}$$

а вектор функции $\overline{\psi}_k(t)$ находятся в результате последовательного решения задач Коши, отличающихся от задач (4.4) только начальными условиями для ψ_k: $\overline{\psi}_k(t_*) = \nu_k$, $k = 0,1,\ldots,N$. Управление

$$\overline{u}^{(N)}(t,\mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\overline{\psi}^{(N)}(t,\mu), \quad t \in T, \tag{4.9}$$

наряду с (4.2) является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3).

Поскольку $\overline{\psi}^{(0)}(t,\mu) = \psi^0(t)$, $t \in T$, то $\overline{u}^{(0)}(t,\mu) = u^0(t)$, $t \in T$, т.е. решение базовой задачи является асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Согласно (4.8), (4.9), асимптотически субоптимальное управление первого порядка представимо в виде

$$\overline{u}^{(1)}(t,\mu) = u^0(t) + \mu P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\overline{\psi}_1(t), \quad t \in T, \tag{4.10}$$

где $\overline{\psi}_1(t)$, $t \in T$, есть результат решения задачи Коши, отличающейся от задачи (4.7) только тем, что в ней $\psi_1(t_*) = \nu_1$. Привлекая для записи решения этой задачи фундаментальную матрицу, получаем

$$\overline{\psi}_1(t) = \psi_1^0(t) + \Phi_{22}(t,t_*)\nu_1, \quad t \in T, \tag{4.11}$$

где $\Phi_{22}(t,t_*)$, $t \in T$, – блок размеров $n \times n$ фундаментальной матрицы

$$\Phi(t,t_*) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t,t_*) & \Phi_{12}(t,t_*) \\ \Phi_{21}(t,t_*) & \Phi_{22}(t,t_*) \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi} = \overline{A}(t)\Phi, \quad \Phi(t_*) = E_{2n}, \tag{4.13}$$

в которой матрица $\overline{A}(t)$ задается формулой (2.9).

В силу (4.11) асимптотически субоптимальное управление первого порядка (4.10) может быть представлено в виде

$$\bar{u}^{(1)}(t,\mu) = u^0(t) + \mu P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)(\psi_1^0(t) + \Phi_{22}(t,t_*)\nu_1), \quad t \in T. \tag{4.14}$$

Заметим, что для всех $t \le t^*$ имеет место равенство $\Phi(t^*,t) = F(t)$ (см. (2.7), (2.8)).

Построенные асимптотические приближения корней системы уравнений (3.4) можно использовать для точного решения этой системы, а значит, и рассмотренной задачи при заданном значении μ. Для этого нужно применить процедуру доводки [13], т.е. найти с помощью метода Ньютона корни уравнения (3.2), взяв в качестве начального приближения $\eta^{(N)}(\mu)$. Чтобы упростить вычисления вместо матрицы $\partial R(\eta,\mu)/\partial\eta$, можно воспользоваться ее асимптотическим приближением $I_0(t_*)$.

5. Асимптотически субоптимальный синтез. Коэффициенты полиномов (4.1), (4.8), которые используются при построении программных асимптотически субоптимальных управлений, разумеется, зависят от начального состояния (x_*,t_*) динамической системы. Ранее такая зависимость нами не учитывалась, поскольку начальное состояние считалось заданным. В настоящем разделе, который посвящен построению асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядков, нас будет интересовать в первую очередь именно эта зависимость. Она будет учтена и в обозначениях.

Рассмотрим невырожденную систему алгебраических уравнений (2.10). В [10] показано, что $F_{22}(t_*)$ – невырожденная матрица. Тогда, как следует из системы (2.10),

$$\nu_0 = \nu_0(x_*,t_*) = F_{22}^{-1}(t_*)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)(H(F_{12}(t_*)K(t_*) - F_{11}(t_*))x_* + g) - K(t_*)x_*, \tag{5.1}$$

где

$$M(t) = HF_{12}(t)F_{22}^{-1}(t)H^{\mathrm{T}}, \quad t \in T, \tag{5.2}$$

а $K(t) = F_{22}^{-1}(t)F_{21}(t)$, $t \in T$, есть решение уравнения Риккати:

$$\dot{K} = -KA(t) - A^{\mathrm{T}}(t)K + KB(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K - Q(t), \quad K(t^*) = 0. \tag{5.3}$$

Поскольку $u^0(t)$, $t \in T$, является асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (1.1)–(1.3) и $u^0(t_*) = P^{-1}(t_*)B^{\mathrm{T}}(t_*)\nu_0$, то, как следует из формулы (5.1), вектор-функция

$$u^{(0)}(x,t) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)(F_{22}^{-1}(t)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t)(H(F_{12}(t)K(t) - F_{11}(t))x + g) - K(t)x) \tag{5.4}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в рассмотренной задаче. Строится эта линейная обратная связь по формулам (2.7)–(2.9), (5.2), (5.3).

Перейдем к построению асимптотически субоптимальной обратной связи первого порядка. Как видно из формулы (4.10), для асимптотически субоптимального управления первого порядка

$$\bar{u}^{(1)}(t_*,\mu) = P^{-1}(t_*)B^{\mathrm{T}}(t_*)(\nu_0 + \mu\nu_1). \tag{5.5}$$

Решив первую из систем (4.6), получаем

$$\begin{gathered}\nu_1 = \nu_1(x_*,t_*) = \\ = -F_{22}^{-1}(t_*)(H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)H(F_{12}(t_*)F_{22}^{-1}(t_*)\psi_1^0(t^*,x_*,t_*) - x_1^0(t^*,x_*,t_*)) - \psi_1^0(t^*,x_*,t_*)),\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $x_1^0(t,x_*,t_*)$, $\psi_1^0(t,x_*,t_*)$, $t \in T$, – решение начальной задачи (4.7), в которой $x^0(t) = x^0(t,x_*,t_*)$, $\psi^0(t) = \psi^0(t,x_*,t_*)$, $t \in T$, – траектории прямой и сопряженных систем, соответствующих оптимальному управлению в базовой задаче. Они являются решением первой из начальных задач (4.4), где $\nu = \nu_0(x_*,t_*)$. Привлекая для записи решения этой задачи фундаментальную матрицу (4.12) и учитывая (5.1), будем иметь

$$x^0(t,x_*,t_*) = C_1(t,t_*)x_* + C_2(t,t_*), \quad \psi^0(t,x_*,t_*) = C_3(t,t_*)x_* + C_4(t,t_*), \tag{5.7}$$

где

$$
\begin{gathered}
C_1(t,t_*) = \Phi_{11}(t,t_*) + \Phi_{12}(t,t_*)(F_{22}^{-1}(t_*)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)H\left(F_{12}(t_*)K(t_*) - F_{11}(t_*)\right) - K(t_*)),\\
C_2(t,t_*) = \Phi_{12}(t,t_*)F_{22}^{-1}(t_*)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)g,\\
C_3(t,t_*) = \Phi_{21}(t,t_*) + \Phi_{22}(t,t_*)(F_{22}^{-1}(t_*)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)H(F_{12}(t_*)K(t_*) - F_{11}(t_*)) - K(t_*)),\\
C_4(t,t_*) = \Phi_{22}(t,t_*)F_{22}^{-1}(t_*)H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t_*)g.
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

Из формул (5.1), (5.4)–(5.6) следует, что асимптотически субоптимальная обратная связь первого порядка представима в виде

$$
\bar{u}^{(1)}(x,t,\mu) = u^{(0)}(x,t) + \mu u^{(1)}(x,t),
\tag{5.9}
$$

где

$$
\begin{gathered}
u^{(1)}(x,t) = -P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)F_{22}^{-1}(t)\times\\
\times(H^{\mathrm{T}}M^{-1}(t)\,H(F_{12}(t)\,F_{22}^{-1}(t)\,\psi_1^0(t^*,x,t) - x_1^0(t^*,x,t)) - \psi_1^0(t^*,x,t)).
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

Записав решение начальной задачи (4.7) по формуле Коши с учетом (5.7), получаем формулу, которой можно пользоваться при вычислении значений вектор-функции (5.10):

$$
\begin{gathered}
x_1^0(t^*,x,t) = \int_t^{t^*}(F_{11}(\tau)\,f\,(C_1(\tau,t)\,x + C_2(\tau,t),\tau) -\\
- F_{12}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x}(C_1(\tau,t)\,x + C_2(\tau,t), C_3(\tau,t)\,x + C_4(\tau,t),\tau)\Big)d\tau.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\psi_1^0(t^*,x,t) = \int_t^{t^*}(F_{21}(\tau)\,f\,(C_1(\tau,t)\,x + C_2(\tau,t),\tau) -\\
- F_{22}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x}(C_1(\tau,t)\,x + C_2(\tau,t), C_3(\tau,t)\,x + C_4(\tau,t),\tau)\Big)d\tau.
\end{gathered}
$$

Матричные функции $C_1(\tau,t)$, $C_2(\tau,t)$, $C_2(\tau,t)$, $C_4(\tau,t)$ определены ранее формулами (5.8).

В задаче оптимального управления с закрепленным правым концом траектории, которая является частным случаем задачи (1.1)–(1.3) $\left(H = E_n,\ \mathrm{g} = 0\right)$, формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей упрощаются. Обратная связь нулевого порядка, как легко убедиться, принимает вид $u^{(0)}(x,t) = -P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)F_{12}^{-1}(t)\,F_{11}(t)\,x$ (см. также [8]). Относительная управляемость в данном случае означает полную управляемость [1].

Значительно проще строятся асимптотически субоптимальные обратные связи в задаче (1.1)–(1.3) и случае, когда $Q(t) = 0,\ t\in T$. В этом случае $F_{21}(t) = K(t) = 0,\ F_{11}(t) = F_0(t),\ F_{22}^{-1}(t) = F_0^{\mathrm{T}}(t)$, $M(t) = C(t),\ t\in T$. Матричная функция $F_0(t)$ является решением начальной задачи (2.4), а

$$
C(t) = \int_t^{t^*} L(\tau)B(\tau)\,P^{-1}(\tau)\,B^{\mathrm{T}}(\tau)\,L^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau,\quad t\in T,
$$

где $L(t),\ t\in T$, – решение начальной задачи $\dot{L} = -LA(t),\ L(t^*) = H$. Тогда формула (5.4) для асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка принимает вид

$$
u^0(x,t) = -P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)L^{\mathrm{T}}(t)C^{-1}(t)\left(L(t)\,x - g\right).
$$

6. Пример. В классе управляющих воздействий $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right),\ t\in[t_*,t^*],\ 0\le t_* < t^*$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу

$$
\dot{x}_1 = \mu x_2 x_3 + u_1,\quad \dot{x}_2 = \mu x_1 x_3 + u_2,\quad \dot{x}_3 = -2\mu x_1 x_2 + u_3,
$$

$$x_i(t_*) = \omega_i, \quad i = 1,2,3, \quad x_1(t^*) = 0, \quad x_2(t^*) = 0,$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (x_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)dt \to \min,$$

которая, в частности, моделирует процесс управления вращениями твердого тела, близкого к сферически симметричному. Построим асимптотически субоптимальные обратные связи нулевого и первого порядка в этой задаче. Условие (2.5) в данном случае выполняется.

С помощью формул (2.8), (2.9) находим

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t^* - t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t^* - t & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch}(t^* - t) & 0 & 0 & \operatorname{sh}(t^* - t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh}(t^* - t) & 0 & 0 & \operatorname{ch}(t^* - t) \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее под ch, sh, th понимаются гиперболические косинус, синус и тангенс соответственно. Тогда согласно (5.2), (5.3) получаем

$$M(t) = \begin{pmatrix} t^* - t & 0 \\ 0 & t^* - t \end{pmatrix}, \quad K(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{th}(t^* - t) \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка (5.4) в данном случае задается формулой

$$\bar{u}^{(0)}(x,t) = \left(\frac{-x_1}{t^* - t}, \frac{-x_2}{t^* - t}, -\operatorname{th}(t^* - t)\, x_3\right).$$

Перейдем к построению асимптотически субоптимальной обратной связи первого порядка (5.9). Для этого остается найти вектор-функцию (5.10). В данном случае

$$C_1(t,t_*) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^* - t}{t^* - t_*} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{t^* - t}{t^* - t_*} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\operatorname{ch}(t^* - t)}{\operatorname{ch}(t^* - t_*)} \end{pmatrix}, \quad C_3(t,t_*) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{t^* - t_*} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{t^* - t_*} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\operatorname{sh}(t^* - t)}{\operatorname{ch}(t^* - t_*)} \end{pmatrix},$$

$$C_2(t,t_*) = C_4(t,t_*) = 0.$$

Используя равенства (5.7), (5.10), получаем

$$u_1^{(1)}(x,t) = \frac{(6\operatorname{ch}(-t^* + t) + (3(t^* - t)\operatorname{sh}(-t^* + t) - 6)x_2 x_3}{\operatorname{ch}(-t^* + t)(-t^* + t)},$$

$$u_2^{(1)}(x,t) = \frac{(6\operatorname{ch}(-t^* + t) + (3(t^* - t)\operatorname{sh}(-t^* + t) - 6)x_1 x_3}{\operatorname{ch}(-t^* + t)(-t^* + t)}, \quad u_3^{(1)}(x,t) = 0.$$

Для оценки точности построенных асимптотических приближений были найдены невязки в терминальных ограничениях на траектории, порожденные субоптимальными обратными связями нулевого и первого порядков при конкретных значениях начальных данных и малого параметра. Результаты вычислений приведены в таблице (с точностью до 10^{-6}). В левом столбце таблицы указан порядок субоптимальных обратных связей, а в остальных столбцах приведены невязки в терминальных ограничениях для траекторий, порожденных этими связями. Судить о близости по критерию качества невозможно, поскольку неизвестно его оптимальное значение.

Таблица. Результаты вычислений

$t_* = 0,\ t^* = 3,\ \omega_1 = -1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 1$	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.01$	
Субоптимальные обратные связи	$x_1(t^*)$	$x_2(t^*)$	$x_1(t^*)$	$x_2(t^*)$
Нулевого порядка	0.192306	−0.078842	0.014561	−0.007208
Первого порядка	0.044495	0.004701	0.000529	−0.000129
$t_* = 1,\ t^* = 3,\ \omega_1 = -1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 1$	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.01$	
Субоптимальные обратные связи	$x_1(t^*)$	$x_2(t^*)$	$x_1(t^*)$	$x_2(t^*)$
Нулевого порядка	0.142878	−0.061882	−0.012217	−0.006050
Первого порядка	0.012584	−0.001784	0.000130	−0.000036

Заключение. В статье предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в рассмотренной задаче. При их использовании вычисления сводятся к решению линейно-квадратичной задачи оптимального управления, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. *Киселев Ю.Н.* Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для систем управления близких к линейным // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. № 1. С. 31–34.
3. *Falb P.L., Jong J.L.* Some Successive Approximation Methods on Control and Oscillation Theory. N. Y., L.: Acad. Press, 1969.
4. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
5. *Калинин А.И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.
6. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
8. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 2. С. 3–12.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
10. *Калинин А.И.* О проблеме синтеза оптимальных систем управления // ЖВМ и МФ. 2018. Т. 58. № 3. С. 397–402.
11. *Мордухович Б.Ш.* Существование оптимальных управлений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1976. Т. 6.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Минск: Университетское, 1984.