

---

---

**УПРАВЛЕНИЕ  
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

---

---

УДК 531.382

**УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОБЪЕКТА  
НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ  
ДВУХСТУПЕНЧАТОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА<sup>1</sup>**

© 2019 г. Л. Д. Акуленко<sup>a,b</sup>, Н. Н. Болотник<sup>a,\*</sup>, А. Е. Борисов<sup>a</sup>,  
А. А. Гавриков<sup>a</sup>, Г. А. Емельянов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> ИПМех РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> ФГУП ЦНИИМаш, Королев, Россия

\*e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 21.06.2019 г.

После доработки 02.07.2019 г.

Принята к публикации 22.07.2019 г.

Исследуется процесс управления поворотом объекта относительно вращающегося основания с помощью двухступенчатого электропривода, который представляет два последовательно соединенных безредукторных электропривода постоянного тока. Статор одного из электродвигателей жестко закреплен на основании, а на роторе другого двигателя закреплен объект. Между ротором и статором второго двигателя имеется крутильная пружина (торсион) с относительно малой жесткостью. Цель управления – отслеживание объектом заданной ориентации относительно основания. Строится алгоритм управления приводом с учетом неполноты информации о динамических параметрах механической системы, действующего в ней трения, законах движения основания и изменения отслеживаемой ориентации.

DOI: 10.1134/S0002338819060027

**Введение.** Проблема, рассматриваемая в данной статье, возникла в связи с разработкой системы управления поворотной платформой, которая устанавливается на орбитальном космическом аппарате и служит для прецизионного ориентирования закрепленного в ней объекта. Общий вид платформы показан на рис. 1 [1]. Основным компонентом конструкции платформы служит двухступенной подвес, состоящий из двух жестких рамок (внешней и внутренней), вращающихся вокруг взаимно перпендикулярных осей. Внешняя рамка вращается вокруг оси, жестко связанной с космическим аппаратом, а внутренняя рамка – вокруг оси, жестко связанной с внешней рамкой. Во внутренней рамке закрепляется объект, ориентация которого контролируется с помощью поворотной платформы. Управление вращением рамок осуществляется посредством двух независимых электроприводов с двигателями постоянного тока. Платформа может использоваться для различных целей, в частности для управления уровнем микроускорений в заданных зонах объекта, что важно при проведении технологических экспериментов по выращиванию монокристаллов из расплавов в условиях, близких к невесомости [2–4]. В этом случае платформа служит активным виброзащитным устройством. Термин “микроускорение” используется в литературе по космонавтике. Под микроускорением материальной частицы понимается разность между ее ускорением относительно инерциальной системы отсчета и ускорением силы тяготения в точке нахождения частицы. По физическому содержанию термин “микроускорение” совпадает с термином “кажущееся ускорение”, используемым в теории инерциальной навигации [5]. Процесс выращивания монокристаллов весьма чувствителен к так называемой боковой составляющей микроускорений, направленной перпендикулярно оси роста кристалла, и поэтому желательно поддерживать ориентацию технологического устройства, при которой ось роста кристалла будет направлена вдоль текущего направления вектора микроускорения. В [6] установлена принципиальная возможность устранения с помощью поворотной платформы боковой составляющей микроускорения в заданной точке чувствительной оси объекта и построен соот-

<sup>1</sup> Работа выполнена в соответствии с государственным заданием АААА-А17-117021310387-0 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00538).

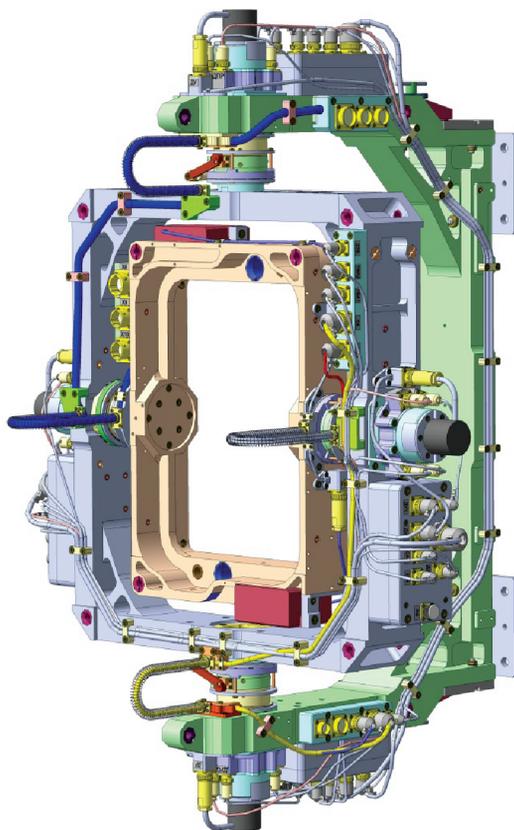


Рис. 1. Поворотная платформа с двумя степенями свободы

ветствующий “кинематический” закон управления рамками платформы, формируемый по принципу обратной связи. Для реализации этой возможности необходимо в каждый момент времени знать микроускорение в точке пересечения осей вращения рамок подвеса, угловое ускорение и угловую скорость основания, а также значения углов поворота рамок подвеса и их первых производных. Закон управления формирует значения текущих относительных угловых ускорений рамок подвеса, которые должны быть реализованы приводами.

Микроускорения, подлежащие снижению с помощью поворотной платформы, весьма малы и могут оказаться сравнимыми с ускорениями, создаваемыми трением в подшипниках осей вращения рамок подвеса платформы. Поэтому алгоритмы управления приводами рамок подвеса должны строиться на основе динамической модели с учетом трения, параметры которого (в частности, коэффициент сухого трения) заранее не известны и могут существенно (в несколько раз) изменяться в процессе движения. Такой алгоритм для упрощенной модели с одной степенью свободы предложен и исследован в [7]. Механическая система состоит из вращающегося основания и твердого тела, которое может поворачиваться относительно основания вокруг оси, совпадающей с осью вращения основания. Управление движением тела относительно основания осуществляется с помощью безредукторного электропривода. Управляющей переменной служит напряжение, подаваемое на клеммы якоря электродвигателя. Предложена динамическая модель системы, учитывающая момент сил трения в подшипниках качения относительно оси вращения. Момент сил трения качения представляется нечетной функцией угловой скорости вращения тела, имеющей разрыв первого рода в нуле, подобно характеристике сухого трения. Решается задача оптимального управления приведением тела в заданное угловое положение в отсутствие трения. Минимизируемым функционалом служит интеграл по времени от квадратичной функции управляющих и фазовых переменных. Для системы с трением построены квазиоптимальные законы управления в форме синтеза и оценены зоны застоя, обусловленные наличием сухого трения скольжения при качении. Предложены режимы управления с компенсацией неидеальностей и возмущающих факторов. Проведено математическое моделирование и определены динамические характеристики управляемого процесса.

Для повышения точности обработки требуемой ориентации рамок подвеса и изоляции рамок от непосредственного влияния трения в подшипниках предлагается двухступенчатая конструкция приводов. Двухступенчатый привод содержит два независимо управляемых электродвигателя. Статор электродвигателя первой ступени расположен на теле, относительно которого вращается соответствующая рамка (на основании, связанном с космическим аппаратом, для внешней рамки и на внешней рамке для внутренней рамки). Ротор двигателя первой ступени вращается в подшипниках, жестко закрепленных на статоре. На роторе двигателя первой ступени жестко закреплен статор двигателя второй ступени, а ротор двигателя второй ступени связан со статором посредством крутильной пружины (торсиона) относительно небольшой жесткости. Ротор двигателя второй ступени привода жестко связан с соответствующей рамкой платформы. В настоящей работе проводится исследование возможностей и качества управления ориентацией жесткого объекта относительно вращающегося основания с помощью двухступенчатого электропривода. Динамическая модель исследуемой системы отличается от модели, рассмотренной в [7], тем, что одноступенчатый электропривод заменен двухступенчатым, в результате чего система имеет две степени свободы. Предлагается закон управления, обеспечивающий желаемое качество переходных процессов в каждой ступени в отсутствие трения и других возмущений. В основе этого закона управления лежат линейные пропорционально-дифференциальные (ПД) регуляторы. Затем предложенный алгоритм управления применяется к системе, в которой имеется трение в подшипниках и, кроме того, в отличие от [7], некоторые переменные, входящие в закон управления, недоступны прямому измерению с достаточной точностью. Для этих переменных предлагается процедура оценивания на основе полиномиальной фильтрации. Проводятся численные эксперименты с целью оценки влияния трения и погрешностей измерений на качество переходных процессов в приводах и точность отслеживания объектом требуемой ориентации относительно основания, которая в общем случае изменяется со временем.

В [8, 9] построены альтернативные законы управления с обратной связью для модельных систем с одноступенчатым и двухступенчатым электроприводами соответственно. Эти законы обладают робастностью по отношению к малым возмущениям и ошибкам измерения и в случае отклонения объекта от желаемой ориентации обеспечивают возврат к этой ориентации за конечное время. Построенные законы управления позволяют учесть ограничения, налагаемые на управляющие переменные (входные напряжения электродвигателей), однако их алгоритмическая реализация значительно сложнее, чем реализация режимов управления, предложенных в [7] и в настоящей работе.

**1. Модель электромеханической системы.** Рассматривается система, состоящая из *основания*, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, *объекта*, который может вращаться относительно основания вокруг той же оси, и *двухступенчатого электропривода*, управляющего движением объекта относительно основания (рис. 2). Двухступенчатый электропривод представляет собой два независимых электропривода постоянного тока, объединенных в каскад. Статор электродвигателя первой ступени привода жестко связан с основанием, а с валом ротора этого двигателя жестко связан статор двигателя второй ступени. Ротор двигателя первой ступени вращается в подшипниках, закрепленных на основании. Ротор и статор двигателя второй ступени связаны посредством торсиона (крутильной пружины). На валу ротора двигателя второй ступени жестко закреплен объект. Роторы обоих электродвигателей вращаются вокруг общей оси, совпадающей с осью вращения основания. Между статором и ротором двигателя первой ступени имеется трение, вызванное контактным взаимодействием ротора с подшипниками, в которых он вращается относительно статора.

Введем обозначения:  $\varphi_0$  – угол поворота основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета,  $\varphi_1$  – угол поворота ротора двигателя первой ступени относительно основания,  $\varphi_2$  – угол поворота объекта относительно статора двигателя второй ступени,  $I_1$  – момент инерции ротора двигателя первой ступени вместе со статором двигателя второй ступени,  $I_2$  – момент инерции объекта вместе с ротором двигателя второй ступени,  $c$  – коэффициент крутильной жесткости торсиона,  $M_1$  – управляющий момент, создаваемый двигателем первой ступени и приложенный к ротору этого двигателя,  $M_2$  – управляющий момент, создаваемый двигателем второй ступени и приложенный к ротору этого двигателя,  $M_f$  – момент сил трения, действующих между статором и ротором двигателя первой ступени. Все моменты инерции и крутящие моменты вычисляются относительно общей оси вращения соответствующих тел.

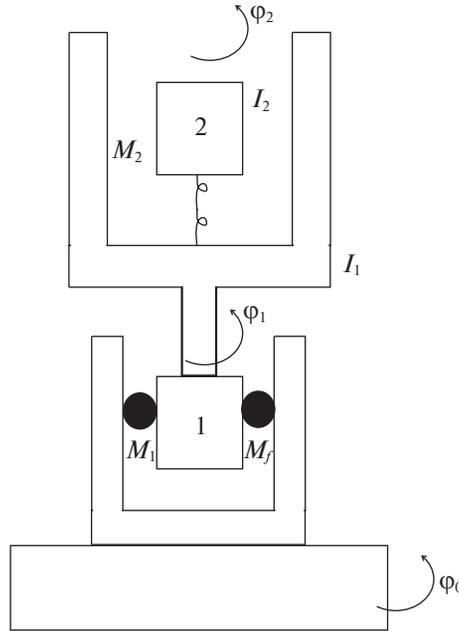


Рис. 2. Модель двухступенчатого электропривода

Движение описанной механической системы относительно основания при заданном законе  $\varphi_0(t)$  вращения последнего подчиняется уравнениям

$$I_1(\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1) = c\varphi_2 + M_1 - M_2 + M_f(\dot{\varphi}_1), \quad (1.1)$$

$$I_2(\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = M_2 - c\varphi_2. \quad (1.2)$$

Моменты  $M_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , связаны с управляющими электрическими напряжениями  $U_\alpha$  известными соотношениями для двигателей постоянного тока [10]:

$$L_\alpha \frac{di_\alpha}{dt} + R_\alpha i_\alpha + k_\alpha \dot{\varphi}_\alpha = U_\alpha, \quad M_\alpha = k_\alpha i_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.3)$$

где  $L_\alpha$  – коэффициент самоиндукции обмотки якоря соответствующего электродвигателя,  $R_\alpha$  – активное (омическое) сопротивление цепи якоря,  $k_\alpha$  – постоянный коэффициент, значение которого зависит от конструкции статора и ротора двигателя. Первое уравнение (1.3) выражает баланс напряжений в цепи якоря, а второе – пропорциональность крутящего момента, приложенного к ротору, и проходящего через его цепь тока  $i_\alpha$ .

Предположим, что электромагнитная постоянная времени электродвигателя  $L/R$  много меньше времени  $T$ , на котором рассматривается движение системы и времени выхода электропривода на стационарный режим вращения при постоянном напряжении. В этом случае можно пренебречь электродвижущей силой самоиндукции и вместо уравнений (1.3) пользоваться приближенными уравнениями

$$R_\alpha i_\alpha + k_\alpha \dot{\varphi}_\alpha = U_\alpha, \quad M_\alpha = k_\alpha i_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.4)$$

Момент сил трения  $M_f(\dot{\varphi}_1)$  будем характеризовать следующей модельной зависимостью:

$$M_f = \begin{cases} -\kappa(\dot{\varphi}_1)\text{sign}\dot{\varphi}_1, & \dot{\varphi}_1 \neq 0, \\ -M_e, & \dot{\varphi}_1 = 0, \quad |M_e| \leq \kappa(0), \\ -\kappa(0)\text{sign}M_e, & \dot{\varphi}_1 = 0, \quad |M_e| > \kappa(0), \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $\kappa(\dot{\varphi}_1)$  – четная положительная функция, а  $M_e$  – сумма моментов сил, кроме сил трения, приложенных к ротору двигателя первой ступени. В число моментов сил, составляющих  $M_e$ , входят

как моменты физических сил, так и моменты переносных сил инерции, возникающих из-за движения основания. Для модели, характеризуемой уравнениями (1.1) и (1.2),

$$M_e = M_1 - M_2 + c\varphi_2 - I_1\ddot{\varphi}_0. \quad (1.6)$$

Функция  $\kappa(\dot{\varphi}_1)$  характеризует модуль момента сил трения в зависимости от угловой скорости  $\dot{\varphi}_1$  и может сильно изменяться при изменении  $\dot{\varphi}_1$ . Величина  $\kappa(0)$  есть максимальное значение момента сил трения покоя. Выражение (1.5) обобщает закон сухого трения Кулона, для которого  $\kappa(\dot{\varphi}_1)$  – постоянная величина. Выбором подходящей функции  $\kappa(\dot{\varphi}_1)$  в выражении (1.5) можно удовлетворительно смоделировать влияние на систему момента сил трения в подшипниках качения.

Подобная модель трения использовалась в [11] при моделировании процесса прецизионного управления электромеханической системой.

**2. Основная задача и принцип формирования управления.** Обозначим через  $\Phi$  угол поворота объекта относительно основания:  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Цель управления системой – обеспечить устойчивое отслеживание объектом ориентации относительно основания, определяемой заданной функцией  $\Phi_0(t)$ . Построим, исходя из уравнений (1.1) и (1.2), управляющие моменты  $M_1$  и  $M_2$ , при которых поведение переменных  $\Psi = \Phi - \Phi_0$  и  $\varphi_2$  подчиняется независимым уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{\Psi} + a_1\dot{\Psi} + b_1\Psi = 0, \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad \Psi = \varphi_1 + \varphi_2 - \Phi_0, \quad (2.1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + a_2\dot{\varphi}_2 + b_2\varphi_2 = 0, \quad a_2 > 0, \quad b_2 > 0. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) описывает переходный процесс отслеживания объектом заданной ориентации  $\Phi_0(t)$  относительно основания, а уравнение (2.2) – динамику изменения угла  $\varphi_2$  закрутки торсиона. На этом этапе будем предполагать, что все параметры механической системы и закона трения известны точно, а фазовые переменные измеряются в каждый момент времени без погрешностей. Будем также предполагать точно известными вместе с производными нужного порядка функции  $\varphi_0(t)$  и  $\Phi_0(t)$ , характеризующие движение основания относительно неподвижной системы отсчета и отслеживаемый угол поворота объекта относительно основания соответственно.

Разрешив уравнения (2.1) и (2.2) относительно угловых ускорений  $\ddot{\varphi}_1$  и  $\ddot{\varphi}_2$ , получим

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\Phi}_0 + a_1\dot{\Phi}_0 + b_1\Phi_0 - a_1\dot{\varphi}_1 - b_1\varphi_1 - (a_1 - a_2)\dot{\varphi}_2 - (b_1 - b_2)\varphi_2, \quad (2.3)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -a_2\dot{\varphi}_1 - b_2\varphi_2. \quad (2.4)$$

Подставив эти выражения в уравнения (1.1), (1.2), найдем управляющие моменты

$$M_1 = (I_1 + I_2)(\ddot{\Phi}_0 + a_1\dot{\Phi}_0 + b_1\Phi_0 + \ddot{\varphi}_0) - M_f(\dot{\varphi}_1) - (I_1 + I_2)[a_1(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + b_1(\varphi_1 + \varphi_2)] + I_1(a_2\dot{\varphi}_2 + b_2\varphi_2), \quad (2.5)$$

$$M_2 = I_2(\ddot{\Phi}_0 + a_1\dot{\Phi}_0 + b_1\Phi_0) + I_2[\ddot{\varphi}_0 - a_1(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) - b_1(\varphi_1 + \varphi_2)] + c\varphi_2. \quad (2.6)$$

Выражения (2.5) и (2.6) определяют управляющие моменты, формируемые по принципу обратной связи как функции текущих значений фазовых переменных  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\dot{\varphi}_1$ ,  $\dot{\varphi}_2$  и времени  $t$ .

Для того, чтобы получить соответствующие законы формирования управляющих напряжений  $U_1$  и  $U_2$  для двигателей первой и второй ступеней, нужно в левой части первого уравнения (1.4) для соответствующего  $\alpha$  сделать подстановку  $i_\alpha = M_\alpha/k_\alpha$ , где  $M_\alpha$  определяется соотношениями (2.5) и (2.6). В итоге придем к выражениям, формирующим управляющие напряжения по принципу обратной связи по переменным  $\varphi_\alpha$ ,  $\dot{\varphi}_\alpha$  и  $t$ :

$$U_\alpha = \frac{R_\alpha}{k_\alpha} M_\alpha(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t) - k_\alpha \dot{\varphi}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.7)$$

Законы управления, выражаемые равенствами (2.5)–(2.7), обеспечивают динамику переходных процессов по переменным  $\Psi$  и  $\varphi_2$ , подчиняющуюся уравнениям (2.1) и (2.2). Переходные процессы можно регулировать подбором коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2$ , входящих в законы управления, причем качество переходных процессов по переменным  $\Psi$  и  $\varphi_2$  можно регулировать неза-

висимо. Качество переходных процессов определяется корнями характеристического полинома уравнений (2.1) или (2.2), которые задаются выражениями

$$\lambda_i^\pm = \frac{-a_i \pm \sqrt{a_i^2 - 4b_i}}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Если, например, выбрать параметры, удовлетворяющие неравенству  $a_i^2 - 4b_i \geq 0$ , то оба корня будут действительными и соответствующий переходный процесс будет аperiодическим (неколебательным), а выбор параметра  $b_i$ , согласованного с параметром  $a_i$  равенством  $b_i = a_i^2/4$ , отвечает наискорейшему затуханию переходного процесса при заданном  $a_i$ . Время затухания переходного процесса при произвольных положительных  $a_i$  и  $b_i$  характеризуется величиной  $\tau_i = -1/\min[\operatorname{Re}\lambda_i^-, \operatorname{Re}\lambda_i^+]$ ;  $\tau_i > 0$ , если  $a_i > 0$  и  $b_i > 0$ . Величина  $\eta_i = -\min[\operatorname{Re}\lambda_i^-, \operatorname{Re}\lambda_i^+]$  называется степенью устойчивости линейной системы второго порядка (2.1) или (2.2). Понятие степени устойчивости для линейной системы дифференциальных уравнений произвольного порядка с постоянными коэффициентами введено в [12]. Геометрически степень устойчивости асимптотически устойчивой линейной системы с постоянными коэффициентами определяется расстоянием точки, представляющей на комплексной плоскости корень характеристического полинома с минимальным модулем вещественной части, от мнимой оси.

При настройке параметров устройства управления вращением объекта с целью поддержания требуемой его ориентации относительно вращающегося основания нужно учитывать много критериев, зачастую противоречащих друг другу: время переходного процесса по соответствующей переменной, максимальное отклонение регулируемой переменной от номинального программного значения, максимальный момент, создаваемый электродвигателем, максимально допустимое напряжение, которое можно подать на соответствующий электродвигатель, максимально допустимый ток в цепи якоря электродвигателя и другие характеристики. Кроме того, при проектировании и эксплуатации системы управления нужно учитывать неполноту информации о динамических параметрах механической системы, закона трения, а также законов движения основания  $\varphi_0(t)$  и изменения номинальной ориентации  $\Phi_0(t)$ , которую необходимо отслеживать. Величины  $\varphi_0(t)$  и  $\Phi_0(t)$  или их производные могут быть не заданными заранее, а оцениваться в ходе процесса управления по данным текущих изменений. Сказанное обуславливает целесообразность выбирать коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  исходя из результатов теоретического анализа поведения системы на основе упрощенной идеализированной модели, математического моделирования с учетом неидеальностей и экспериментальной отработки системы.

**3. Модификация основного алгоритма управления с учетом неполноты информации о параметрах системы и действующих возмущениях.** Двухступенчатый электропривод, описанный в разд. 1, был предложен для управления поворотной платформой, расположенной на орбитальном космическом аппарате и служащей для поддержания ориентации оси закрепленного на ней объекта в направлении микроускорения контрольной точки, лежащей на оси объекта.

Мгновенное значение микроускорения с достаточной степенью точности можно измерить с помощью трехосного акселерометра, расположенного вблизи контрольной точки объекта. На основе этого измерения можно определить мгновенную ориентацию вектора микроускорения. В упрощенной модели, описанной в разд. 1 и 2, этой ориентации отвечает угол  $\Phi_0(t)$ . С помощью датчиков угловых скоростей можно измерить мгновенное значение угловой скорости вращения космического аппарата. Этой величине в модели отвечает угловая скорость  $\dot{\varphi}_0(t)$ .

В дальнейшем предполагается, что величины  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\dot{\varphi}_1$  и  $\dot{\varphi}_2$  доступны точному измерению в каждый момент времени, причем эти измерения производятся без запаздывания. Входящие в закон управления (2.5), (2.6) величины  $\Phi_0$ ,  $\dot{\Phi}_0$ ,  $\ddot{\Phi}_0$  и  $\ddot{\varphi}_0$  непосредственному измерению недоступны, и вместо них в соответствующие формулы должны быть подставлены оценки  $\hat{\Phi}_0(t)$ ,  $\hat{\dot{\Phi}}_0(t)$ ,  $\hat{\ddot{\Phi}}_0(t)$  и  $\hat{\ddot{\varphi}}_0(t)$ , формирующиеся для каждого момента времени  $t$  на основе доступной к этому моменту измерительной информации о  $\Phi_0$ ,  $\dot{\Phi}_0$  и  $\ddot{\varphi}_0$ .

Кроме того, затруднено точное измерение крутильной жесткости торсиона  $c$ , которая может изменяться в процессе эксплуатации системы, и недоступно точное знание о характеристиках

трения, в частности о функции  $\kappa(\phi_1)$  в модели (1.5). Поэтому вместо  $c$  и  $M_f(\phi_1)$  будут использоваться оценки  $\hat{c}$  и  $\hat{M}_f(\phi_1)$  этих величин.

Таким образом, выражения (2.5) и (2.6) для управляющих моментов  $M_1$  и  $M_2$ , примут вид

$$M_1 = (I_1 + I_2)(\hat{\Phi}_0 + a_1\hat{\Phi}_0 + b_1\hat{\Phi}_0 + \hat{\phi}_0) - \hat{M}_f(\phi_1) - (I_1 + I_2)[a_1(\phi_1 + \phi_2) + b_1(\phi_1 + \phi_2)] + I_1(a_2\phi_2 + b_2\phi_2), \quad (3.1)$$

$$M_2 = I_2(\hat{\Phi}_0 + a_1\hat{\Phi}_0 + b_1\hat{\Phi}_0) + I_2[\hat{\phi}_0 - a_1(\phi_1 + \phi_2) - b_1(\phi_1 + \phi_2)] + \hat{c}\phi_2. \quad (3.2)$$

В результате переходные процессы по переменным  $\Psi$  и  $\phi_2$  будут описываться уравнениями

$$\ddot{\Psi} + a_1\dot{\Psi} + b_1\Psi = (\hat{\Phi}_0 - \Phi_0) + (\hat{\phi}_0 - \phi_0) + \frac{\hat{c} - c}{I_2}\phi_2 + a_1(\hat{\Phi}_0 - \Phi_0) + b_1(\hat{\Phi}_0 - \Phi_0), \quad (3.3)$$

$$\ddot{\phi}_2 + a_2\dot{\phi}_2 + \left[ b_2 + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}(c - \hat{c}) \right] \phi_2 = \frac{\hat{M}_f(\phi_1) - M_f(\phi_1)}{I_1}. \quad (3.4)$$

Эти уравнения в сочетании с алгоритмами оценивания величин, недоступных непосредственному измерению, будут использоваться для моделирования и оценки качества процесса управления вращением объекта с помощью двухступенчатого электропривода.

**4. Алгоритмы построения оценок неизвестных величин.** Кратко опишем используемые рекуррентные алгоритмы эквидистантной (с равноотстоящими зазорами) полиномиальной фильтрации [13, 14] динамических параметров. Для определенности и простоты описания рассматривается последовательность измерений  $z(t) = z_i$  скалярной динамической величины  $x(t)$  в эквидистантные моменты времени  $t = t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , где  $h$  – постоянный промежуток времени между двумя последовательными измерениями, который предполагается достаточно малым. Считается, что величина  $x$  измеряется с погрешностью  $\xi$ , т.е. показание измерительного прибора  $z_i$  при  $i$ -м измерении величины  $x$  задается выражением  $z_i = x_i + \xi_i$ , где  $\xi$  – центрированная случайная погрешность измерений со стационарным (нормальным) распределением. Полагается, что значения  $x_i$  функции  $x(t)$  в моменты  $t_i$  могут быть аппроксимированы некоторым простым семейством функций (полиномов типа отрезков ряда Тейлора) на достаточно большом множестве  $\{j\} \subset \mathbb{N}$ :

$$x_{i-j} \approx P_n[\alpha(i), j] = \alpha_0(i) + \alpha_1(i)\Delta + \alpha_2(i)\Delta^2/2! + \dots + \alpha_n(i)\Delta^n/n!;$$

$$j = 0, 1, \dots, N; \quad \Delta = -jh; \quad (Nh \sim 1, N \gg 1),$$

$$\alpha(i) = [\alpha_0(i), \alpha_1(i), \dots, \alpha_n(i)],$$

где  $\alpha$  – упорядоченный набор коэффициентов аппроксимации.

Величина  $N$  может быть ограниченной некоторым значением  $N = N^*$  или неограниченно возрастающей, например  $N = N(i) = i$ ; количество замеров  $N + 1$  должно быть достаточно большим для возможности приближенного определения искомым параметров  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , имеющих смысл текущих значений величины  $x$  и ее производных до порядка  $n$  включительно в момент измерения  $t_i$ :

$$\alpha_0(i) = x(t_i), \quad \alpha_1(i) = \dot{x}(t_i), \quad \alpha_2(i) = \ddot{x}(t_i), \dots, \alpha_n(i) = x^{(n)}(t_i).$$

Ограничимся параболической оценкой [13] фазового вектора  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ , достаточной для построения режимов управления, на основе модифицированного стандартного метода наименьших квадратов Гаусса.

Проводится минимизация среднеквадратического критерия по вектору параметров  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\sum_{j=0}^N \{z_{i-j} - [\alpha_0(i) + \alpha_1(i)(-jh) + \alpha_2(i)(-jh)^2/2]\}^2 \rightarrow \min.$$

При фиксированном значении величины  $N \geq 2$  искомые оптимальные параметры имеют вид оценок

$$\hat{\alpha}_{0,1,2} = \sum_{j=0}^N F_{0,1,2}(j, N) z_{i-j}. \quad (4.1)$$

Весовые функции  $F_n$ ,  $n = 0, 1, 2$ , фильтра (4.1) определяются выражениями [13, 14]

$$\begin{aligned} F_0 &= 3 \frac{3N^2 + 3N + 2 - 6(2N + 1)j + 10j^2}{(N + 1)(N + 2)(N + 3)}, \\ F_1 &= \frac{6}{h} \frac{3N(N - 1)(2N + 1) - 2(8N - 3)(2N + 1)j + 30Nj^2}{N(N^2 - 1)(N + 2)(N + 3)}, \\ F_2 &= \frac{30}{h^2} \frac{N(N - 1) - 6Nj + 6j^2}{N(N^2 - 1)(N + 2)(N + 3)}, \quad 0 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Алгоритм требует хранения в памяти более  $N \geq 2$  замеров, и их число возрастает со временем с ростом  $N$ . Поэтому естественно стремление к построению рекуррентного алгоритма, позволяющего экономить оперативную память аналогично фильтрации Калмана. В случае, когда величина  $N = N(i) = i$  неограниченно возрастает, рекуррентная процедура оценки фазового вектора при измерении  $z_{i+1}$  на  $(i + 1)$ -м шаге имеет вид формул уточнения предыдущей оценки, получаемых из сравнения формул (4.1) для  $N = i$  и  $N = i + 1$  с выражением соответствующей невязки:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0(i + 1) &= \hat{\alpha}_0(i) + \hat{\alpha}_1(i)h + \hat{\alpha}_2(i) \frac{h^2}{2} + \\ &+ \frac{3(3i^2 + 9i + 8)}{(i + 2)(i + 3)(i + 4)} \left[ z_{i+1} - \left( \hat{\alpha}_0(i) + \hat{\alpha}_1(i)h + \hat{\alpha}_2(i) \frac{h^2}{2} \right) \right], \\ \hat{\alpha}_1(i + 1) &= \hat{\alpha}_1(i) + \hat{\alpha}_2(i)h + \\ &+ \frac{18(2i + 3)}{h(i + 2)(i + 3)(i + 4)} \left[ z_{i+1} - \left( \hat{\alpha}_0(i) + \hat{\alpha}_1(i)h + \hat{\alpha}_2(i) \frac{h^2}{2} \right) \right], \\ \hat{\alpha}_2(i + 1) &= \hat{\alpha}_2(i) + \frac{60}{h^2(i + 2)(i + 3)(i + 4)} \left[ z_{i+1} - \left( \hat{\alpha}_0(i) + \hat{\alpha}_1(i)h + \hat{\alpha}_2(i) \frac{h^2}{2} \right) \right], \\ i \geq 2; \quad \hat{\alpha}_0(2) &= z_2, \quad \hat{\alpha}_1(2) = \frac{3z_2 - 4z_1 + z_0}{2h}, \quad \hat{\alpha}_2(2) = \frac{z_2 - 2z_1 + z_0}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последние слагаемые в этих выражениях имеют смысл коррекции прогноза, определяемого предшествующими слагаемыми. Для получения оценок  $\hat{\alpha}_k(i + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , на  $(i + 1)$ -м шаге требуется знать оценки, определенные на предыдущем  $i$ -м шаге, и результаты измерения  $z_{i+1}$  на  $(i + 1)$ -м шаге. Для вычисления последующих оценок хранить в памяти компьютера величины  $\hat{\alpha}_k(i)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , и  $z_{i+1}$  не нужно.

Параболическая аппроксимация переменной  $x(t_i)$  на большом (неограниченном) интервале может оказаться недостаточной, тогда потребуются более сложные выражения и увеличение числа коэффициентов аппроксимации  $\alpha(i)$ . Это может привести к резкому росту стохастических погрешностей. Для увеличения точности фильтрации понадобится согласование порядка степени полинома и числа измеряемых значений при фиксированных других конструктивных параметрах алгоритма.

Рекуррентные алгоритмы полиномиальной фильтрации на основе фиксированного (заданного) числа измерений  $0 \leq j \leq N(i)$  посредством отрезков парабол по временным интервалам существенно сложнее и задаются более громоздкими выражениями:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_0(i+1) &= \left[ 1 - \frac{6(N-2)}{(N+2)(N+3)} \right] \hat{\alpha}_0(i) - 2 \frac{N(N+8)}{(N+2)(N+3)} \hat{\alpha}_1(i)h + \\
 &+ \frac{h^2}{2} \frac{N(3N^2+13N+2)}{(N+2)(N+3)} \hat{\alpha}_2(i) + 3 \frac{3N^3+9N^2+8N+4}{(N+1)(N+2)^2(N+3)} z_{i+1} - 3 \frac{z_{i-N}}{N+1}, \\
 \hat{\alpha}_1(i+1) &= \left[ 1 - \frac{6(4N^2+23N+3)}{(N-1)(N+2)(N+3)} \right] \hat{\alpha}_1(i) - \\
 &- \frac{12}{h} \frac{N^2-13N-3}{(N-1)N(N+2)(N+3)} \hat{\alpha}_0(i) + h \frac{13N^3+55N^2+19N+3}{(N-1)(N+2)(N+3)} \hat{\alpha}_2(i) + \\
 &+ \frac{18}{h} \frac{2N+1}{(N+1)(N+2)(N+3)} z_{i+1} - \frac{6}{h} \frac{4N+1}{(N-1)N(N+1)} z_{i-N}, \\
 \hat{\alpha}_2(i+1) &= \left[ 1 + 30 \frac{N^2+4N+1}{(N-1)(N+2)(N+3)} \right] \hat{\alpha}_2(i) + \\
 &+ \frac{360}{h^2(N-1)N(N+2)(N+3)} \hat{\alpha}_0(i) - \frac{60(N+5)}{h(N-1)(N+2)(N+3)} + \\
 &+ \frac{60z_{i+1}}{h^2(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{60z_{i-N}}{h^2(N-1)N(N+1)}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Начальные величины (при  $i \leq N(i)$ )  $\hat{\alpha}_0(i)$ ,  $\hat{\alpha}_1(i)$ ,  $\hat{\alpha}_2(i)$  берутся из предыдущего алгоритма. Таким образом, для получения оценок  $\hat{\alpha}_k(i+1)$ ,  $k=0,1,2$ , на  $(i+1)$ -м шаге требуется знать оценки, полученные на предыдущем  $i$ -м шаге, результаты измерения  $z_{i+1}$  на  $(i+1)$ -м шаге и результаты измерения  $z_{i-N}$  на  $(i-N)$ -м шаге. Последнее свойство существенно изменяет характер рекуррентности, поскольку нужно хранить в памяти  $N+1$  последних замеров, а для оценки на текущем шаге  $i+1$  используется замер  $z_{i-N}$ . Аналогично рекуррентным выражениям (4.2) формулы (4.3) выводятся из формул (4.1) для оценок в моменты  $i+1$  и  $i-N$  с коррекцией получаемых выражений на величину невязки.

**5. Моделирование процесса управления с учетом неидеальностей.** Будем считать доступными точному измерению текущие значения фазовых переменных  $\varphi_i$ ,  $\dot{\varphi}_i$ ,  $i=1,2$ . Будем также считать точно известными значения моментов инерции  $I_1$  и  $I_2$  соответствующих тел системы. Крутильная жесткость торсиона полагается заданной с помощью оценки  $\hat{c}$ , действительная жесткость имеет вид  $c=c(t)=\hat{c}(1+\xi)$ , где  $\xi$  – равномерно распределенная на отрезке  $[-0.05, 0.05]$  случайная величина. Таким образом, в каждый момент времени крутильная жесткость известна с погрешностью, не превышающей 5%.

Истинные значения отслеживаемого угла  $\Phi_0$  и угла поворота основания  $\varphi_0$  при моделировании задаются гармоническими функциями

$$\varphi_0(t) = a_\varphi \sin(\omega_\varphi t + \pi/4), \quad \Phi_0(t) = a_\Phi \sin(\omega_\Phi t + \pi/4).$$

Далее полагается  $a_{\varphi, \Phi} = 0.01$ ,  $\omega_\varphi = 0.01$  Гц,  $\omega_\Phi = 0.02$  Гц. Функции  $\hat{\Phi}_0$ ,  $\hat{\dot{\Phi}}_0$ ,  $\hat{\ddot{\Phi}}_0$  строятся с помощью вышеописанных алгоритмов оценивания на основе замеров  $\Phi_0(t_i) + 2\eta_e$ ,  $\dot{\Phi}_0(t_i) + 2\omega_\Phi^2 \eta_e$  и  $\ddot{\Phi}_0(t_i) + \omega_\Phi^2 \eta_e$  соответственно, где  $\eta_e = 10^{-4} \eta$ ,  $\eta$  – случайная величина со стандартным нормальным распределением.

В приводимых ниже расчетах значения величин  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $\hat{c}$  соответствуют экспериментальной установке:  $I_1 = 3.2 \times 10^{-4}$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_2 = 3.5$  кг · м<sup>2</sup>,  $\hat{c} = 3.6649 \times 10^{-4}$  Н · м/рад. Функция, характеризующая момент сил трения  $\kappa(\dot{\varphi}_1)$ , задается зависимостью

$$\kappa(\dot{\varphi}_1) = M_+ - (M_+ - M_-) |\text{th}(\dot{\varphi}_1/\nu)|,$$

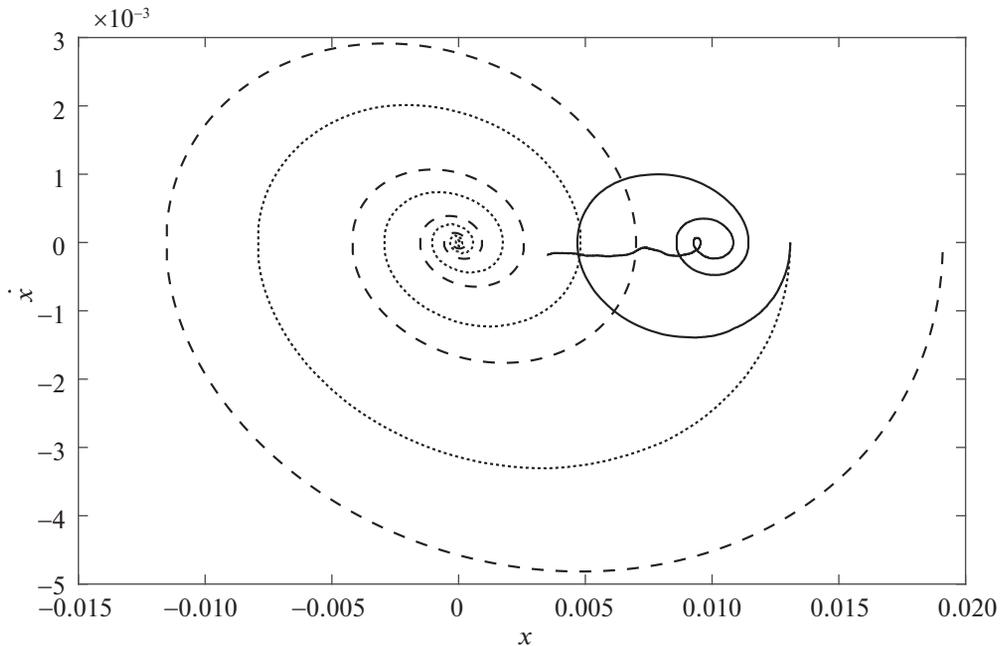


Рис. 3. Фазовые кривые колебательных переходных процессов

где  $M_+$ ,  $M_-$  – максимальное и минимальное значения момента сил трения,  $\nu$  – сглаживающий коэффициент (далее полагается  $M_+ = 6 \times 10^{-3}$  Н·м,  $M_- = 1.2 \times 10^{-3}$  Н·м,  $\nu = 10^{-3}$ ). Поскольку момент сил трения  $M_f$  зависит от управляющего момента  $M_1$ , который в свою очередь зависит от оценки момента сил трения  $\hat{M}_f$ , то для построения последней применяется следующая процедура. Оценка  $\hat{M}_f$  строится по формулам (1.5), (1.6) в предположении, что  $\hat{M}_f = 0$  в выражении для управляющего момента  $M_1$  (3.1), после чего полученное приближенное значение момента сил трения  $\hat{M}_f$  используется для определения управляющего момента  $M_1$ . Моделируемая точная величина момента сил трения  $M_f$  рассчитывается с использованием этого значения  $M_1$  и аналогично жесткости торсиона умножается на величину  $(1 + \xi)$ .

На рис. 3–11 приведены результаты моделирования поведения исследуемой системы при различных значениях коэффициентов обратной связи. Интегрирование системы (3.3), (3.4) проводится по методу Эйлера первого порядка (выбор схемы низкого порядка обусловлен наличием разрывных членов в правой части). Шаг интегрирования (равный шагу замеров) в силу используемой схемы интегрирования выбирается достаточно малым:  $h = T/10^5$ , где  $(0, T)$  – интервал численного интегрирования системы (3.3). Для повышения качества работы фильтров (4.1)–(4.3) проводится их предварительная настройка: часть замеров, а именно на интервале  $(-T/10, 0)$ , проводится до начала движения системы и включения алгоритма управления. Размер памяти фильтра (4.3) полагается равным  $5 \times 10^4$  замеров. Поскольку при численном моделировании достоверно отразить режим движения с залипаниями, свойственный системам с сухим трением (т.е. отследить обращение в ноль величины  $\phi_1(t)$ ), представляется затруднительным, то вместо закона (1.5) используется следующее его приближение:

$$M_f = \begin{cases} -\kappa(\phi_1)\text{sign}\phi_1, & |\phi_1| > \varepsilon, \\ -M_e, & |\phi_1| < \varepsilon, \quad |M_e| \leq \kappa(0), \\ -\kappa(0)\text{sign}M_e, & |\phi_1| < \varepsilon, \quad |M_e| > \kappa(0), \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1.$$

В расчетах полагалось  $\varepsilon = h^3$ , где  $h$  – шаг интегрирования.

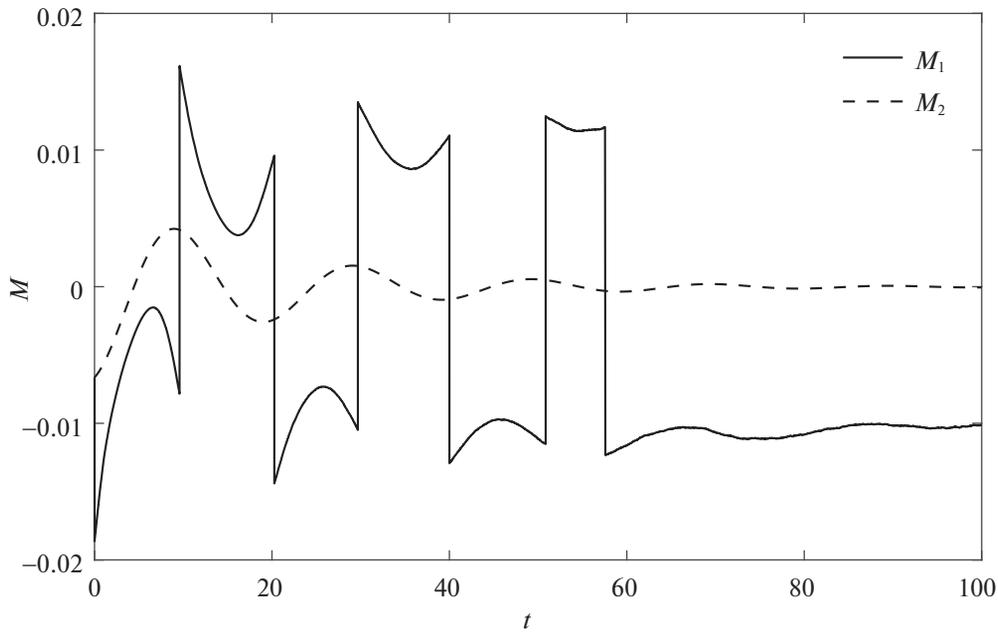


Рис. 4. Управляющие моменты для колебательных режимов

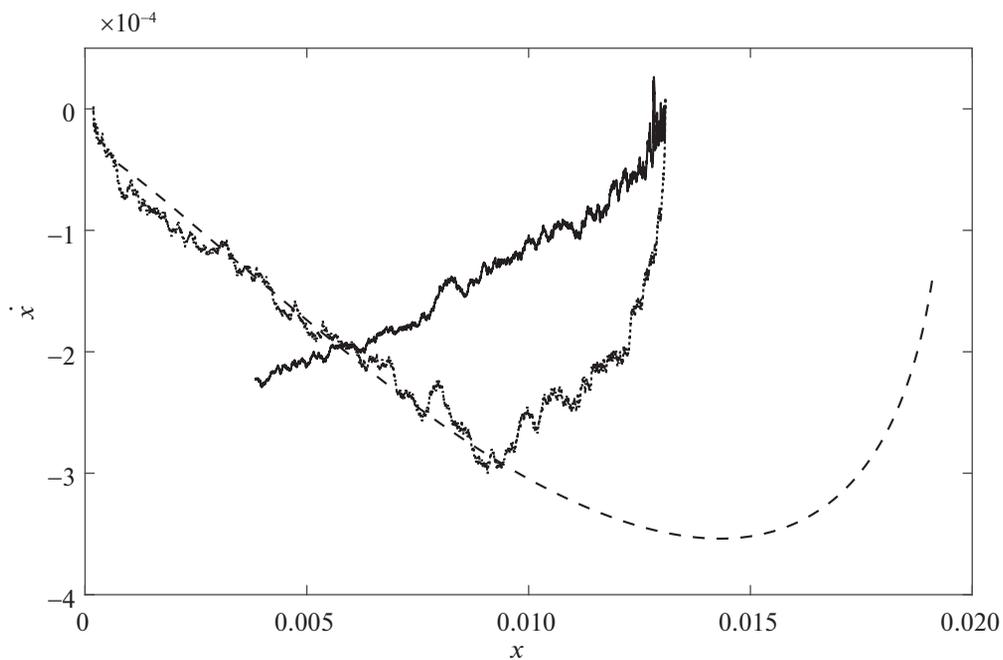


Рис. 5. Фазовые кривые неколебательных переходных процессов

На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов для колебательного переходного процесса ( $a_i = b_i = 0.1, i = 1, 2$ ), а на рис. 5, 6 – в режиме без колебаний ( $a_i = 0.1, b_i = a_i^2/4, i = 1, 2$ ). На рис. 3 и 5 изображены кривые на фазовой плоскости  $x, \dot{x}$ , где  $x$  соответствует  $\varphi_1$  (сплошные кривые),  $\varphi_2$  (точечные кривые) и  $\Psi$  (штриховые), при условии работы фильтра с ограниченной памятью (4.3). Как видно из этих рисунков, переменные  $\varphi_2, \Psi$  и их производные приходят в окрестность нуля в соответствии с целью управления. На рис. 4, 6 приведены соответствующие управляющие мо-

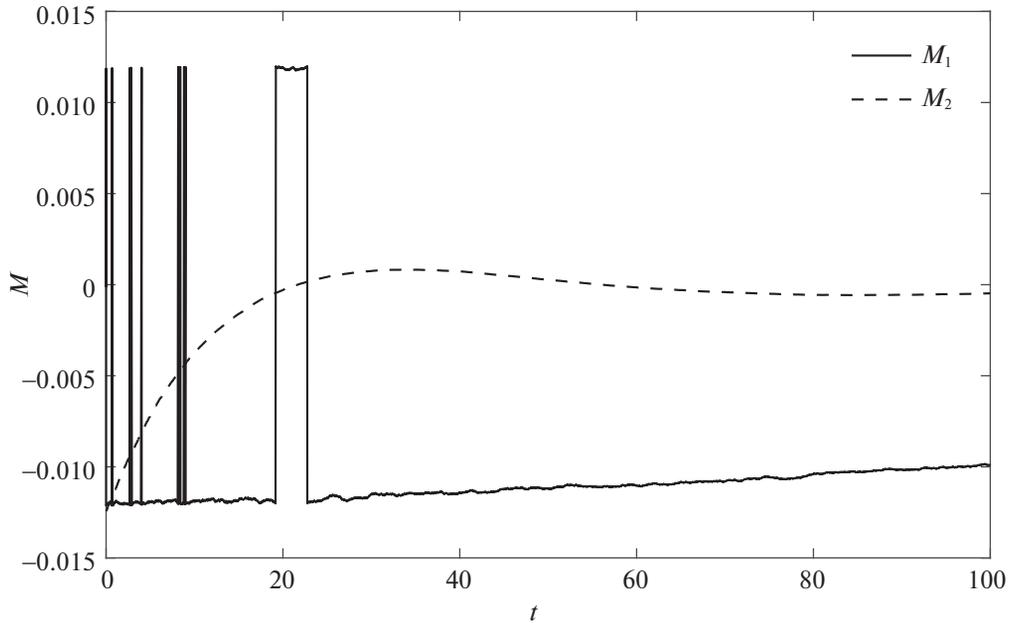


Рис. 6. Управляющие моменты для неколебательных режимов

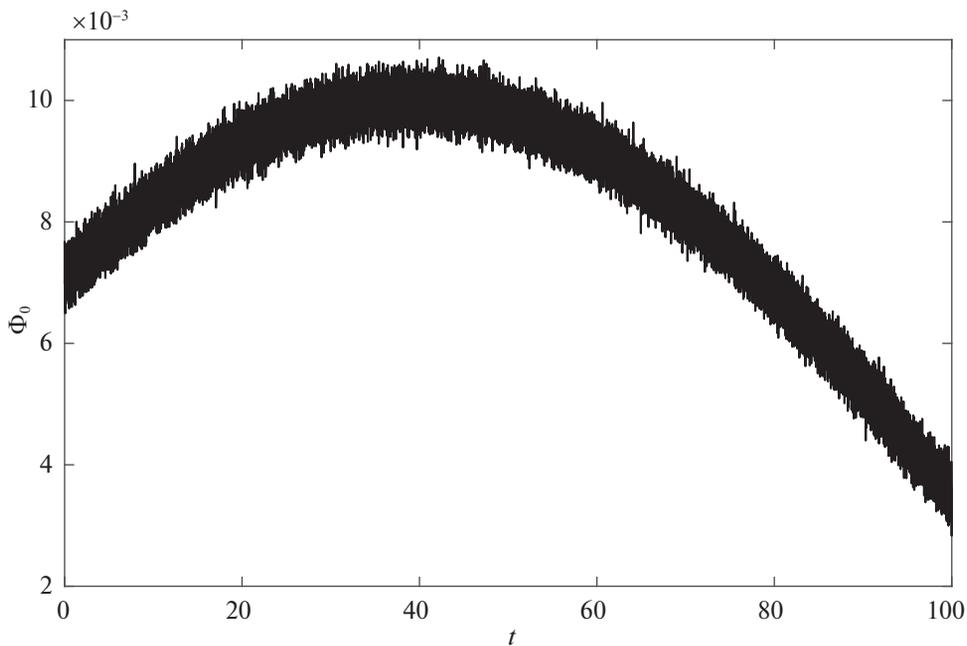


Рис. 7. Сигнал с помехами

менты  $M_1$  и  $M_2$ , причем на рис. 6 момент  $M_2$  масштабирован – изображено  $10^2 \cdot M_2$ . Рисунки 7–11 демонстрируют результаты применения алгоритмов фильтрации к зашумленным сигналам. На рис. 7 и 8 показаны зашумленный сигнал и кривая, построенная с помощью фильтра с ограниченной памятью, на рис. 9 – ошибка (разность между построенным на основании замеров с погрешностями и истинным значением) работы фильтра с фиксированной памятью (сплошная кривая) и фильтра, задаваемого рекуррентно (штриховая линия), на рис. 10 – разность между сигналами, восстановленными с помощью фильтра с нарастающей памятью и его рекуррентной

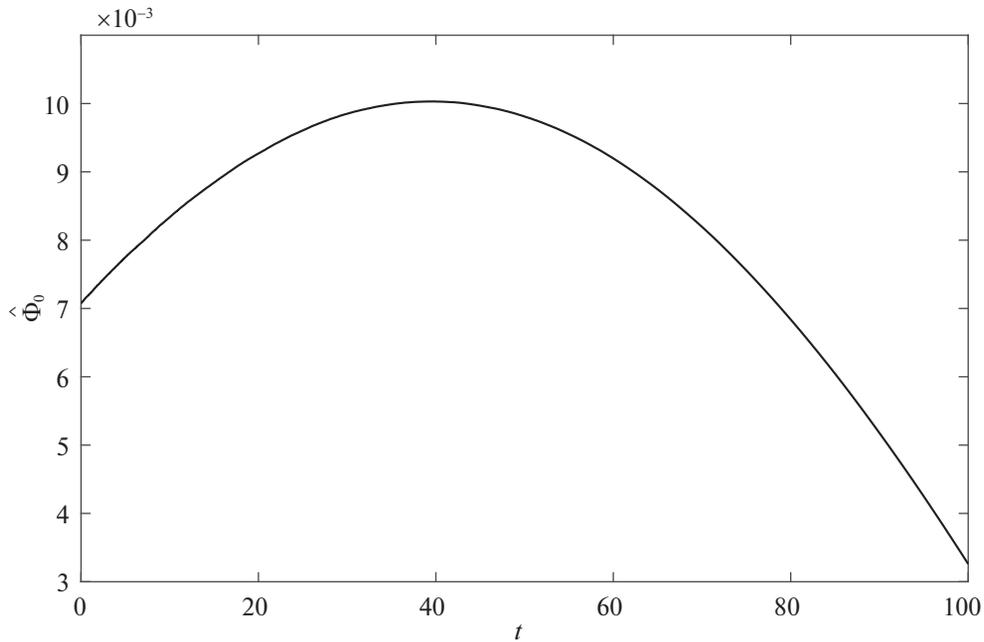


Рис. 8. Сигнал на выходе фильтра

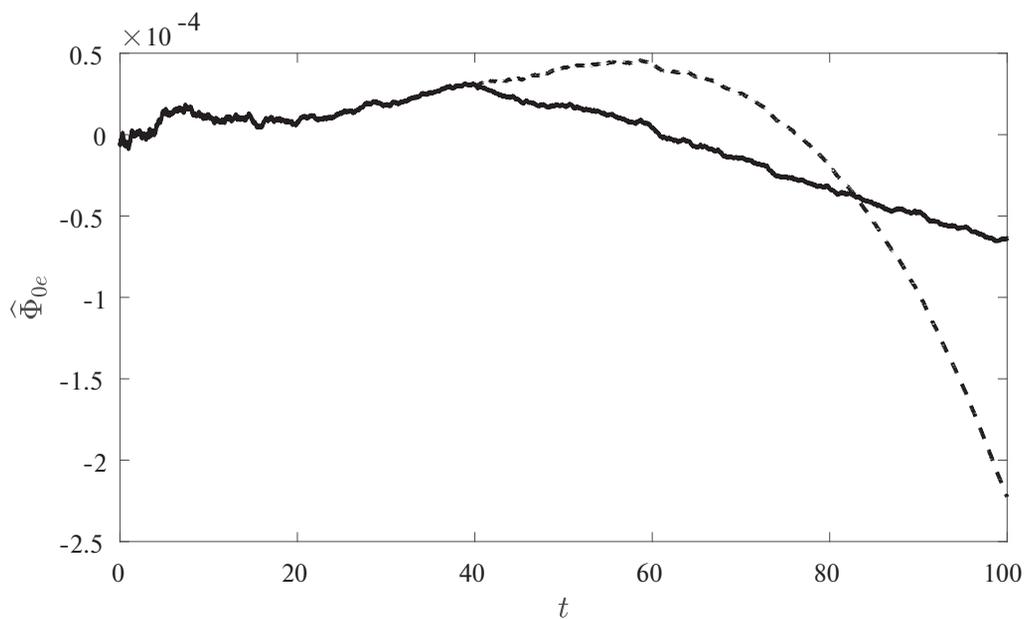
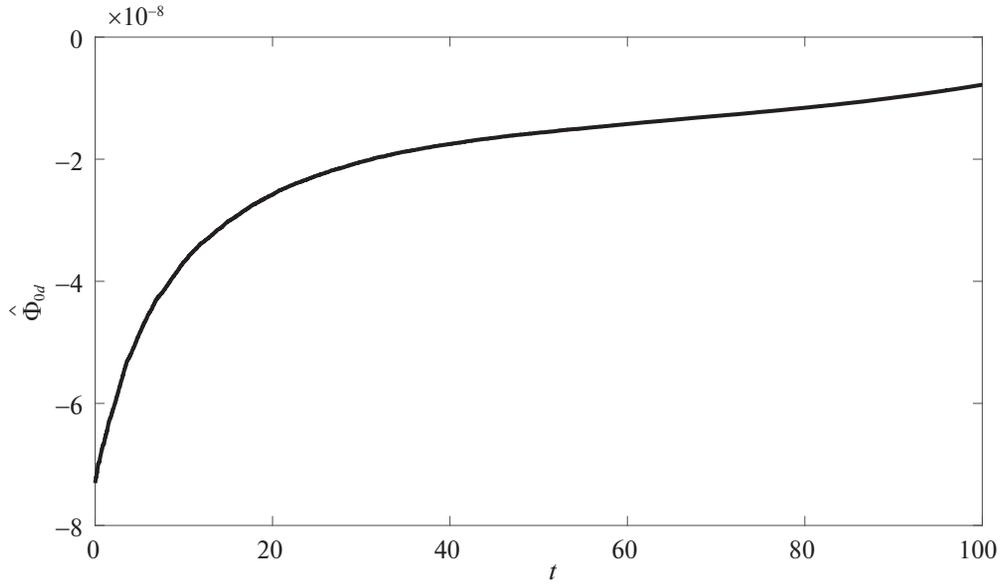


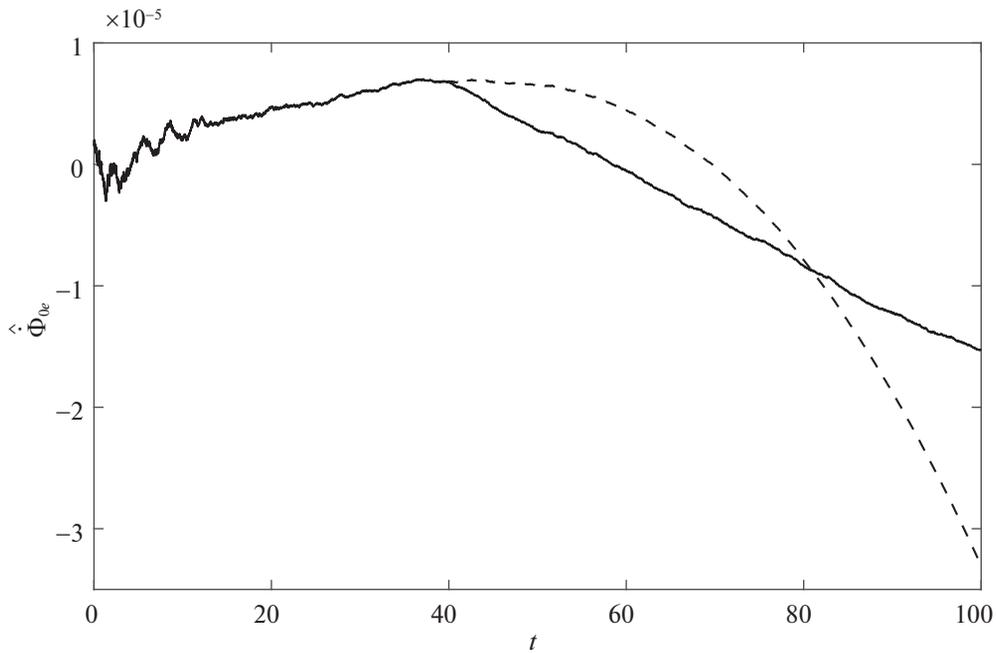
Рис. 9. Погрешности алгоритма фильтрации

модификацией. На рис. 11 представлены кривые, демонстрирующие ошибку оценки производной  $\hat{\Phi}_0$ , построенной на основании замеров  $\Phi(t_i)$  и используемой в алгоритме управления для рекуррентной модификации фильтра с неограниченной памятью (штриховая кривая) и фильтра с ограниченной памятью (сплошная линия).

Из проведенных расчетов следует, что при колебательном переходном процессе влияние различных типов алгоритмов фильтрации не сильно сказывается, хотя алгоритм фильтрации с фиксированной памятью показывает меньшие ошибки приближения как сигнала, так и его производной. Отметим также небольшое количество моментов переключения (разрывов) управляю-



**Рис. 10.** Разность между выходными сигналами фильтров с неограниченной памятью и с рекуррентным алгоритмом фильтрации по переменной  $\Phi_0$



**Рис. 11.** Погрешность восстановления величины  $\Phi_0$  по данным измерений  $\Phi_0$

щего воздействия  $M_1$ . При режиме без колебаний влияние выбора алгоритма фильтрации сказывается значительней, особенно при малых значениях величины  $\dot{\phi}_1$ . В этом случае погрешности и незначительные ошибки фильтрации приводят к неточной оценке величины момента сил трения и, как следствие, к построению управляющего момента, не полностью компенсирующего возмущения. Этим же вызвано и большее число переключений момента  $M_1$  в алгоритме управления. В силу этого колебательный режим может оказаться предпочтительным.

Отметим, что на поведении управляющих моментов в режиме приведения величин  $\Psi$ ,  $\varphi_2$  к нулю существенным образом сказывается амплитуда функции  $\Phi_0(t)$ . Действительно, при малых  $\Psi$ ,  $\varphi_2$  имеем  $\varphi_1 \approx \Phi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1 \approx \dot{\Phi}_0$ , и, значит, малые значения  $\dot{\Phi}_0$  приведут к движениям с залипаниями соответственно используемому закону трения, а следовательно, к переключениям управляющего момента  $M_1$ . Случайные возмущения при измерении  $\Phi_0$  при этом ухудшают ситуацию, поскольку малые погрешности в оценке  $\dot{\Phi}_0$  приведут к дополнительным переключениям. Таким образом, на выбор предпочтительной стратегии управления (в колебательном режиме или в режиме без колебаний) при стремлении уменьшить воздействия на электродвигатель и полезную нагрузку, вызываемые резкими изменениями управляющего момента, значительным образом сказывается характер возмущения, моделируемого функцией  $\Phi_0(t)$ .

**Заключение.** Анализ и компьютерное моделирование динамического поведения объекта, связанного с вращающимся основанием двухступенчатым электроприводом с торсионом, свидетельствуют о возможности использования такого привода в системах прецизионной ориентации объектов. Предложенные алгоритм управления на основе пропорционально-дифференциальных регуляторов и методика оценивания переменных и параметров, недоступных непосредственному точному измерению, позволяют осуществлять отслеживание объектом желаемой переменной ориентации с высокой степенью точности. Целесообразно провести экспериментальную отработку предложенной методики управления на физическом образце поворотной платформы, предназначенной для прецизионной ориентации закрепленных в ней объектов на борту орбитальных космических аппаратов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Автоматическая поворотная виброзащитная платформа](https://ru.wikipedia.org/wiki/Автоматическая_поворотная_виброзащитная_платформа).
2. *Борисов А.Е., Иванов А.И., Федосеев С.В. и др.* Пат. 2369535 РФ, МПК Н 04 В64G1/22 (2006.01), В64G1/36 (2006.01). Способ оптимизации динамических условий функционирования гравитационно-чувствительных установок в условиях остаточных микроускорений на борту орбитальных космических аппаратов и устройство для его реализации. 2008107131/11, заяв. 28.02.2008, опуб. 10.10.2009, Бюл. 28.
3. *Борисов А.Е., Иванов А.И., Емельянов Г.А.* Поворотная платформа для стабилизации углового положения технологической установки по вектору микроускорения // Матер. XLVI научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Наша типография, 2011. С. 124–125.
4. *Борисов А.Е., Левтов В.Л., Романов В.В., Тарасенко Н.В.* Комплекс технических средств обеспечения контролируемых динамических условий при проведении исследований гравитационно-чувствительных систем // Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 4 (49). С. 168–173.
5. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
6. *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Борисов А.Е., Гавриков А.А., Емельянов Г.А.* Управление кажущимся ускорением твердого тела, закрепленного в двухступенном подвесе на подвижном основании // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 3. С. 3–12.
7. *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Борисов А.Е., Гавриков А.А., Емельянов Г.А.* Квазиоптимальное управление поворотом твердого тела вокруг неподвижной оси с учетом трения // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 3–20.
8. *Ананьевский И.М., Ишханян Т.А.* Управление поворотной платформой на подвижном основании в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3. С. 154–162.
9. *Ананьевский И.М., Ишханян Т.А.* Управление двухкаскадной электромеханической системой, подверженной возмущениям // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 515–524.
10. *Чиликин М.Г., Сандлер А.С.* Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 577 с.
11. *Акуленко Л.Д., Каушинис С.К., Костин Г.В.* Влияние сухого трения на управление движением электромеханических систем // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 1. С. 65–74.
12. *Цыпкин Я.З., Бромберг П.В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. Сер. ОТН. 1945. № 12. С. 1163–1168.
13. *Чернявский Г.М., Чернов А.А.* Лазерные системы в космосе. М.: Радио и связь, 1995. 224 с.
14. *Акуленко Л.Д.* Квазиоптимальный алгоритм обнаружения и определения параметров маневра динамического объекта // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 2. С. 47–52.