

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.246.2

ДВУХШАГОВЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНО-ГАУССОВСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

© 2019 г. Вон Чой^{a,*}, И. Сонг^{b,**}, В. Шин^{c,***}

^a Инчонский государственный ун-т, Инчон, Республика Корея

^b Корпорация “Hanwha”, Тэджон, Республика Корея

^c Генсановский государственный ун-т, Чинджу, Республика Корея

*e-mail: choiwon@inu.ac.kr

**e-mail: com21dud@hanwha.com

***e-mail: vishin@gnu.ac.kr

Поступила в редакцию 18.09.2018 г.

После доработки 13.05.2019 г.

Принята к публикации 22.07.2019 г.

Посвящена оптимальному среднеквадратическому оцениванию нелинейной функции вектора состояния линейно-гауссовских систем, которая несет полезную информацию о системе в целях ее управления. Основная идея предложенного алгоритма оценивания состоит из двух этапов: оптимальная калмановская оценка вектора состояния, вычисленная на первом этапе, преобразуется на втором этапе с использованием этой нелинейной функции и критерия минимума среднеквадратичной ошибки. Некоторые сложные теоретические аспекты аналитического расчета оптимальной среднеквадратической оценки решаются путем использования многомерных гауссовых интегралов для специальных нелинейных функций, таких, как Евклидова норма, максимум и абсолютное значение. Детально представлено оценивание полиномиальных функций. Полиномиальная оценка имеет простую замкнутую форму, которую легко реализовать на практике. Выведены эффективные матричные формулы для точных среднеквадратических ошибок в случае оптимального и субоптимального оценивания квадратичных функционалов. Полученные результаты демонстрируются на теоретических и практических примерах с различными типами нелинейных функций. Представлен сравнительный анализ оптимальных и субоптимальных нелинейных оценок. Применение предложенных оценок демонстрирует их эффективность.

DOI: 10.1134/S0002338819060167

Введение. Теория оценивания — мощный подход для построения моделей сложных систем управления. Калмановская фильтрация и ее обобщения являются широко известными методами оценивания состояния динамических систем, используемыми в различных областях, таких, как навигация и слежение, коммуникация, биомедицина, химия и др. [1–6]. Однако во многих приложениях представляется интересным оценивать не только состояние системы $x_t \in \mathbb{R}^n$, но и нелинейную функцию вектора состояния (НФС), $z_t = f(x_t)$, которая дает практически полезную информацию для систем управления. Первым мотивационным примером такой функции служит местонахождение цели и радара. Угол (φ) и расстояние (d) от радара до цели показаны на рис. 1:

$$\varphi = f(x) = \arctg\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right),$$

$$d = f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

¹ Работа поддержана Incheon National University Research Grant in 2015–2016.

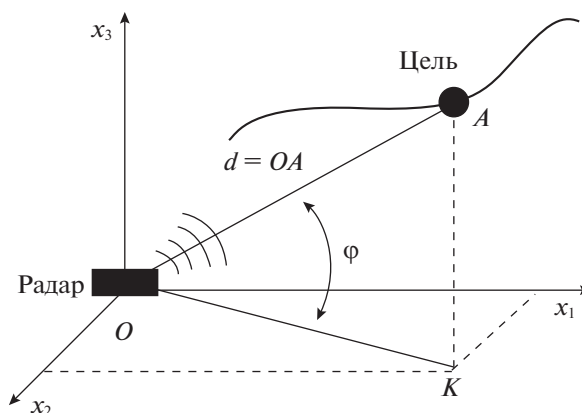


Рис. 1. Местоположение радара и цели: $A(x_1, x_2, x_3)$, $d = OA$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AK}{OK}$

Вторым примером НФС может быть произвольная квадратичная форма, $f(x_i) = x_i^T \Omega x_i$, представляющая собой энергию объекта [7] или Евклидово расстояние $f(x_i) = \|x_i - x_i^n\|$, между текущим x_i и номинальным x_i^n состояниями соответственно. Таким образом, оценивание и прогнозирование НФС может быть полезным в различных приложениях, таких, как управление системой или отслеживание целей.

Проблема оценивания нелинейных функций с неизвестными параметрами или сигналами на базе минимаксной теории оценивания хорошо изучена многими авторами ([8–11] и ссылки в них). Оценивание параметров нелинейных функциональных соотношений с известными ковариациями представлено в [12]. Минимаксная квадратическая оценка интеграла от квадрата производной периодической функции получена в [13]. В [14, 15] оптимальная матрица квадратичного функционала ищется на базе кумулянтных критериев. Оценивание штрафа, рассматриваемого как квадратичная функция потерь для гармонического осциллятора, дается в [16]. Оценивание интегралов от нелинейных функций плотности вероятности разработано в [17, 18]. Также мы упомянем оценивание нелинейных функционалов от спектральной плотности и периодограммы линейных стационарных сигналов [19–21]. Некоторое обобщение этих результатов дается в [22]. В [23] неизвестное расстояние между целью и радаром аппроксимируется рядом Тейлора с последующим оцениванием его коэффициентов. Изучение теории и алгоритмов оценивания информационной меры, представляющей собой нелинейный функционал от сигнала, приведено в [24, 25]. Однако большинство авторов не фокусируются на оценивании НФС от векторных сигналов, определяемых динамическими моделями, такими, как стохастические дифференциальные системы.

Целью статьи является разработка оптимального двухшагового среднеекватрического оценщика (estimator) для произвольной НФС в линейно-гауссовских стохастических дифференциальных системах и подробное изучение специальных полиномиальных оценщиков, для которых можно получить важные результаты по среднеекватрическому оцениванию. К основным достижениям статьи можно отнести следующие.

1. Изучение проблемы оценивания НФС в рамках модели калмановской фильтрации. Используя подход среднеекватрического оценивания, предложен оптимальный двухшаговый нелинейный оценщик.

2. Выводится оптимальный среднеекватрический оценщик для полиномиальных функций, таких, как квадратическая, кубическая и полиномиальная четвертой степени. Показано, что полиномиальный оценщик представляется в замкнутой форме, зависящей только от калмановской оценки состояния и ее ковариации.

3. Важный класс квадратичных оценщиков всесторонне исследован, включая вывод матричного выражения для истинной среднеекватрической ошибки (СКО).

4. Реализация предложенных оценщиков для типовых НФС иллюстрирует их теоретическую и практическую полезность.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 дается постановка проблемы среднеквадратического оценивания НФС в рамках калмановской фильтрации. В разд. 2 предложен оптимальный среднеквадратический оцениватель. Здесь же представлен сравнительный анализ оптимального и субоптимального оценивателей на нескольких теоретических примерах с практическими НФС. В разд. 3 изучается проблема получения оптимального оценивателя в замкнутой форме. Доказывается, что оптимальный полиномиальный оцениватель представляется в замкнутой форме через калмановскую оценку и ковариационную матрицу ошибки. Дается вывод матричных формул для СКО оптимального и субоптимального квадратичного оценивателей. Изучается эффективность квадратичных оценивателей для скалярного случайного сигнала и на реальной модели аэродинамической трубы.

1. Постановка проблемы. Рассмотрим калмановскую модель оценивания вектора состояния непрерывной линейно-гауссовской динамической системы с аддитивным шумом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= F_t x_t + G_t v_t, \quad t \geq 0, \\ y_t &= H_t x_t + w_t.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь $x_t \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y_t \in \mathbb{R}^m$ — вектор наблюдения, $v_t \in \mathbb{R}^r$ и $w_t \in \mathbb{R}^m$ — гауссовские белые шумы с нулевым средним и интенсивностями Q_t и R_t соответственно, т.е. $\mathbf{E}(v_t v_s^T) = Q_t \delta_{t-s}$, $\mathbf{E}(w_t w_s^T) = R_t \delta_{t-s}$, δ_t — дельта-функция, $F_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_t \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $Q_t \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R_t \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $H_t \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{E}(X)$ — оператор математического ожидания случайного вектора X .

Предположим, что начальное состояние $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$, а также шумы системы и наблюдения v_t, w_t взаимно некоррелированы.

Проблема, связанная с системой (1.1), состоит в оценивании нелинейной функции вектора состояния

$$z_t = f(x_t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\tag{1.2}$$

по результатам зашумленных наблюдений $y_0^t = \{y_s : 0 \leq s \leq t\}$.

Существует множество статистических методов оценивания неизвестной функции $z = f(x)$ по реальным наблюдениям y_0^t . Мы интересуемся выбором наилучшей оценки $\hat{z}$, минимизирующей СКО: $\min_{\hat{z}} \mathbf{E}[\|z - \hat{z}\|^2]$.

В общем случае оптимальное среднеквадратическое решение (далее “оценка” или “оцениватель”) представляет собой условное математическое ожидание, $\hat{z} = \mathbf{E}(z | y_0^t)$ [26, 27] и основная проблема состоит в том, как его вычислить. В статье дается решение этой проблемы для НФС (1.2) в рамках калмановской фильтрации.

В следующем разделе рассмотрим оптимальный и субоптимальный алгоритмы оценивания НФС и их реализацию.

2. Оптимальный двухшаговый оцениватель для произвольной НФС. Здесь выводится оптимальный двухшаговый оцениватель для произвольной НФС. Также предлагается простой субоптимальный оцениватель. Оба оценивателя состоят из двух шагов: оптимальная калмановская оценка вектора состояния $\hat{x}_t$, вычисленная на первом шаге, далее используется на втором шаге для оценивания НФС (1.2).

2.1. Оптимальный двухшаговый алгоритм.

Шаг 1 (вычисление калмановской оценки). Оценка $\hat{x}_t = \mathbf{E}(x_t | y_0^t)$ вектора состояния x_t по наблюдениям y_0^t , и ковариация ошибки $P_t = \mathbf{E}(e_t e_t^T)$, $e_t = x_t - \hat{x}_t$, описываются непрерывным фильтром Калмана–Бьюси (ФКБ) [4–6]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_t &= F_t \hat{x}_t + K_t (y_t - H_t \hat{x}_t), \quad \hat{x}_{t=0} = \bar{x}_0, \\ K_t &= P_t H_t^T R_t^{-1}, \quad \tilde{G}_t = G_t Q_t G_t^T, \\ \dot{P}_t &= F_t P_t + F_t^T P_t - P_t H_t^T R_t^{-1} H_t P_t + \tilde{G}_t, \quad P_{t=0} = P_0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Шаг 2 (оптимальный оцениватель для НФС). Оптимальная оценка НФС, $z_t = f(x_t)$ на основе наблюдений y_0^t также представляет собой условное среднее, т.е.,

$$\hat{z}_t = \mathbf{E}(z_t | y_0^t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) p_t(x | y_0^t) dx, \quad (2.2)$$

где $p_t(x | y_0^t) = \mathbb{N}(\hat{x}_t, P_t)$ — многомерная условно-гауссовская плотность распределения, определяемая условным средним $\hat{x}_t = \mathbf{E}(x_t | y_0^t)$ и ковариацией $P_t = \text{cov}(x_t, x_t | y_0^t) = \mathbf{E}(e_t e_t^T)$.

Таким образом, оценка (2.2) представляет собой оптимальный оцениватель для произвольной НФС, зависящий от калмановской оценки $\hat{x}_t$ и ковариации ошибки P_t .

На практике нелинейная функция (1.2) может зависеть не только от вектора состояния, но и от его оценки. Тогда НФС принимает вид

$$z_t = f(x_t, \hat{x}_t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Учитывая, что оценка состояния $\hat{x}_t$ представляет собой известную функцию наблюдений, $\hat{x}_t = \hat{x}_t(y_0^t)$, оптимальная среднеквадратическая оценка неизвестной функции $z_t = f(x_t, \hat{x}_t)$ задается формулой, аналогичной (2.2), а именно

$$\hat{z}_t = \mathbf{E}[f(x_t, \hat{x}_t(y_0^t)) | y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \hat{x}_t) p_t(x | y_0^t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \hat{x}_t) \mathbb{N}(\hat{x}_t, P_t) dx. \quad (2.4)$$

Далее рассмотрим несколько теоретических примеров применения общего нелинейного оценивателя (2.2).

2.2. Примеры двухшагового оценивателя. Пусть $x_t = [x_{1,t} \ x_{2,t}]^T$ — двумерный гауссовский вектор, а $\hat{x}_t \in \mathbb{R}^2$ и $P_t \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — калмановская оценка и ковариация ошибки соответственно.

Пример 1 (ожидаемое значение Евклидовой нормы). Ошибка оценивания определяется как

$$\|e_t\| = \sqrt{e_{1,t}^2 + e_{2,t}^2}, \quad e_t = x_t - \hat{x}_t, \quad e_t = [e_{1,t} \ e_{2,t}]^T. \quad (2.5)$$

Учитывая, что Евклидова норма ошибки зависит от разности между вектором состояния и его оценкой, $\|e_t\| = \sqrt{e_t^T e_t} = \sqrt{(x_t - \hat{x}_t)^T (x_t - \hat{x}_t)}$, мы преобразуем формулу (2.2) в виде

$$\hat{z}_t = \mathbf{E}[\|e_t\| | y_0^t] = \int (\sqrt{e^T e}) p_t(e | y_0^t) de = \int (\sqrt{e^T e}) \mathbb{N}(0, P_t) de,$$

где $p_t(e | y_0^t) = \mathbb{N}(0, P_t)$ — условная плотность распределения ошибки $e_t = x_t - \hat{x}_t$.

Далее, используя [28], получаем аналитическое выражение для оценки Евклидовой нормы $z_t = \|e_t\|$:

$$\begin{aligned} \hat{z}_t = \mathbf{E}(\|e_t\| | y_0^t) &= \frac{2\lambda_{1,t}\lambda_{2,t}\sqrt{\pi}}{(\lambda_{1,t} + \lambda_{2,t})^{3/2}} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 1; q_t^2\right), \\ q_t^2 &= \frac{\lambda_{1,t} - \lambda_{2,t}}{\lambda_{1,t} + \lambda_{2,t}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция, а $\lambda_{1,t}$ и $\lambda_{2,t}$ — собственные значения матрицы P_t .

Пример 2 (управление с обратной связью, зависящее от максимума переменных состояния). В механических системах кусочно-постоянное управление задается в виде

$$u_t = \begin{cases} 1, & \max(x_{1,t}, x_{2,t}) > D, \\ -1, & \max(x_{1,t}, x_{2,t}) \leq D, \end{cases}$$

где D – пороговое расстояние. Тогда среднеквадратическая оценка максимума $z_t = \max(x_{1,t}, x_{2,t})$ дается в виде [29]

$$\begin{aligned}\hat{z}_t &= \mathbf{E}[\max(x_{1,t}, x_{2,t})|y'_0] = \hat{x}_{1,t} \Phi\left(\frac{\hat{x}_{1,t} - \hat{x}_{2,t}}{\theta_t}\right) + \\ &+ \hat{x}_{2,t} \Phi\left(\frac{\hat{x}_{2,t} - \hat{x}_{1,t}}{\theta_t}\right) + \theta_t \phi\left(\frac{\hat{x}_{1,t} - \hat{x}_{2,t}}{\theta_t}\right), \\ \theta_t &= \sqrt{P_{11,t} + P_{22,t} - 2P_{12,t}}, \quad P_t = [P_{ij,t}],\end{aligned}$$

где $\phi(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ – стандартная гауссовская плотность и соответствующая функция распределения.

Пример 3 (оценивание функции синуса). Пусть θ – неизвестный случайный угол, измеряемый в присутствии аддитивного белого шума. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= 0, \quad t \geq 0, \quad x_0 = \theta \sim \mathbb{N}(m_\theta, \sigma_\theta^2), \\ y_t &= x_t + w_t, \quad 0 \leq t \leq T,\end{aligned}\tag{2.7}$$

где $x_t = \theta$, а w_t – гауссовский белый шум с нулевым средним и интенсивностью r .

Уравнения ФКБ (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_t &= P_t(y_t - \hat{x}_t)/r, \quad \hat{x}_0 = m_\theta, \\ \dot{P}_t &= -P_t^2/r, \quad P_0 = \sigma_\theta^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Решая уравнение Риккати для $P_t = \mathbf{E}[(\theta - \hat{x}_t)^2]$, получаем $P_t = \sigma_\theta^2/(1 + t\sigma_\theta^2/r)$. Далее рассмотрим функцию синуса неизвестного угла θ . Тогда НФС имеет вид $z = f(\theta) = \sin \theta$.

1. Оптимальная оценка. Используя (2.2), получаем оптимальную оценку синуса

$$\hat{z}_t = \mathbf{E}[\sin \theta | y'_0] = \int_{\mathbb{R}} \sin \theta \mathbb{N}(\hat{\theta}_t, P_t) d\theta = e^{-P_t/2} \sin \hat{\theta}_t,\tag{2.9}$$

где $\hat{\theta}_t = \hat{x}_t$ и P_t определяются в (2.8).

2. Субоптимальная оценка. Параллельно с оптимальной оценкой (2.9) рассмотрим простую субоптимальную оценку $\tilde{z}_t = f(\hat{\theta}_t) = \sin \hat{\theta}_t$.

Для сравнения точности двух оценок выведем аналитические формулы для их СКО: $P_{z,t}^{opt} = \mathbf{E}[(\sin \theta - \hat{z}_t)^2]$ и $P_{z,t}^{sub} = \mathbf{E}[(\sin \theta - \tilde{z}_t)^2]$, и приведем сравнительный анализ. Получаем

$$P_{z,t}^{opt} = k_t^{(1)} - 2e^{-P_t/2} k_t^{(2)} + e^{-P_t} k_t^{(3)}, \quad P_{z,t}^{sub} = k_t^{(1)} - 2k_t^{(2)} + k_t^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned}k_t^{(1)} &= \mathbf{E}[\sin^2 \theta] = (1 - e^{-2\sigma_\theta^2}) \cos(2m_\theta) / 2, \\ k_t^{(2)} &= \mathbf{E}[\sin \theta \sin \hat{\theta}_t] = [e^{-P_t/2} - e^{-(4\sigma_\theta^2 - 3P_t)/2} \cos(2m_\theta)] / 2, \\ k_t^{(3)} &= \mathbf{E}[\sin^2 \hat{\theta}_t] = [1 - e^{-2(\sigma_\theta^2 - P_t)} \cos(2m_\theta)] / 2.\end{aligned}$$

Рисунок 2 иллюстрирует точные значения $P_{z,t}^{opt}$ и $P_{z,t}^{sub}$ для параметров $m_\theta = 0$; $\sigma_\theta^2 = 2$; $r = 1$, а рисунок 3 показывает относительную ошибку, $\Delta_t = |(P_{z,t}^{opt} - P_{z,t}^{sub})/P_{z,t}^{opt}| \cdot 100\%$. Не является сюрпризом, что на рис. 2 и 3 оптимальная оценка лучше субоптимальной, т.е. $P_{z,t}^{opt} < P_{z,t}^{sub}$. Мы также наблюдаем, что разница между этими оценками становится незначительной по мере увеличения времени наблюдения.

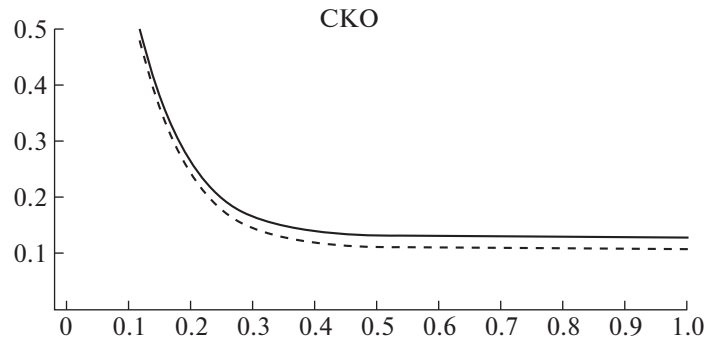


Рис. 2. Оптимальная СКО (пунктирная кривая) и субоптимальная СКО (сплошная кривая) для $z = \sin\theta$

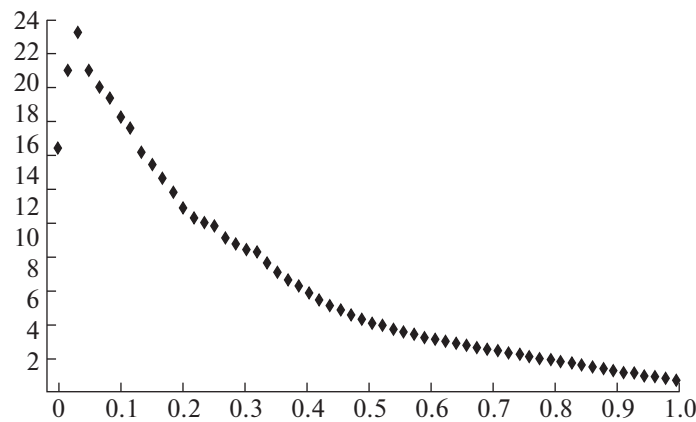


Рис. 3. Относительная ошибка Δ_r , %, между оптимальной и субоптимальной СКО для $z = \sin\theta$

Пример 4 (оценивание расстояния между случайным положением θ и фиксированной точкой a). В этом случае НФС имеет вид $z = |\theta - a|$. Используя модель (2.7) для случайного положения $x_t = \theta$, мы получаем наилучшую оценку (2.2) для расстояния $|\theta - a|$. Имеем

$$\hat{z}_t = \mathbb{E}[|\theta - a| | y_0^t] = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - a| \mathbb{N}(\hat{\theta}_t, P_t) d\theta = \sqrt{\frac{2P_t}{\pi}} \exp\left[-\frac{(a - \hat{\theta}_t)^2}{2P_t}\right] + (a - \hat{\theta}_t) \left[2\Phi\left(\frac{a - \hat{\theta}_t}{\sqrt{P_t}}\right) - 1\right],$$

где $\hat{\theta}_t = \hat{x}_t$ и P_t определяются в (2.8).

В частном случае, когда $a = 0$ оптимальная оценка неизвестного модуля $z = f(\theta) = |\theta|$ принимает вид

$$\hat{z}_t = \sqrt{\frac{2P_t}{\pi}} \exp\left(-\frac{\hat{\theta}_t^2}{2P_t}\right) + \hat{\theta}_t \left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\hat{\theta}_t}{\sqrt{P_t}}\right)\right].$$

В дополнение рассмотрим простую субоптимальную оценку модуля $\tilde{z}_t = f(\hat{\theta}_t) = |\hat{\theta}_t|$.

Для изучения поведения СКО $P_t^{opt} = \mathbb{E}[|\theta| - \hat{z}_t]^2$ и $P_t^{sub} = \mathbb{E}[|\theta| - \tilde{z}_t]^2$ положим $m_\theta = 1$; $\sigma_\theta^2 = 1$; $r = 0.2$. Метод Монте-Карло с 1000 реализаций был применен для их вычисления. Как показано на рис. 4, оптимальная оценка $\hat{z}_t$ имеет существенные преимущества над субоптимальной $\tilde{z}_t$.

2.3. Альтернативная идея субоптимального оценивания НФС. В отличие от предложенного оптимального СКО решения (2.1) и (2.2) имеется альтернативная идея для оценивания НФС. В этом случае НФС $z_t = f(x_t)$ рассматривается как дополнительная переменная

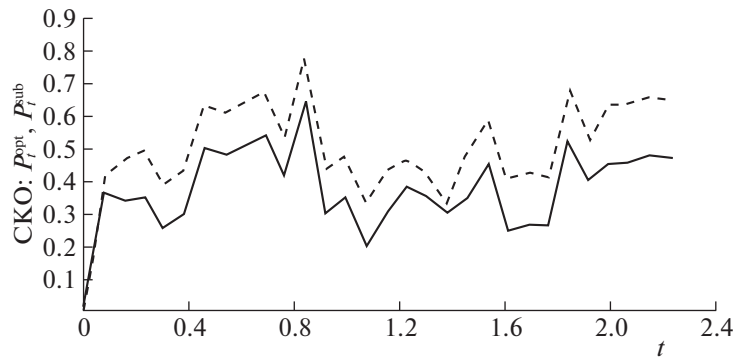


Рис. 4. СКО для оценок модуля $z = |\theta|$: P_t^{opt} (сплошная кривая), P_t^{sub} (пунктирная кривая)

ная состояния z_t , которая описывается нелинейным стохастическим уравнением $\dot{z}_t = a(x_t, z_t) + b(x_t, z_t)v_t$, в котором коэффициент сноса $a(x_t, z_t)$ и матрица диффузии $b(x_t, z_t)$ определяются формулой Ито, примененной к сложной функции $f(x_t)$, в которой аргумент задается уравнением $\dot{x}_t = F_t x_t + G_t v_t$ [30]. Добавляя z_t в исходный вектор состояния $x_t \in \mathbb{R}^n$, получаем систему с расширенным вектором состояния $X_t = [x_t^T \ z_t^T]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, проблема оценивания НФС сводится к проблеме нелинейной фильтрации путем замены исходного состояния x_t на расширенное X_t . И далее приближенные методы нелинейной фильтрации могут быть использованы для одновременного оценивания x_t и z_t . Огромное количество нелинейных приближенных фильтров предложено в [5, 6, 30–35], среди которых выделим расширенный фильтр Калмана [5], условно оптимальный фильтр Пугачева с заданной и оптимальной структурой [30–32] и сигма-точечный фильтр [33]. Но их вычислительная сложность значительно превышает сложность линейного ФКБ. Предложенная двухшаговая процедура оценивания (2.1) и (2.2) более обещающая, чем нелинейное оценивание расширенного вектора состояния X_t .

2.4. Простая субоптимальная оценка НФС. Параллельно с оптимальной оценкой $\hat{z}_t = \mathbf{E}(z_t | y_0^t)$ мы предлагаем простую субоптимальную оценку для НФС, например $\tilde{z}_t = f(\hat{x}_t)$, которая зависит только от калмановской оценки вектора состояния $\hat{x}_t$ и не требует знания ковариации ошибки P_t в отличие от оптимальной оценки $\hat{z}_t$. Численные результаты показывают, что субоптимальная оценка $\tilde{z}_t$ может быть как близкой к оптимальной оценке (пример 3), так и сильно отличающейся от нее (пример 4 и далее пример 6).

2.5. О реализации оптимального оценивателя в реальном времени. Ковариация ошибки P_t может быть предварительно вычислена (до проведения эксперимента), потому что она не зависит от сенсорных наблюдений $y_0^t = \{y_s : 0 \leq s \leq t\}$, а зависит только от статистики шумов Q_t, R_t , матриц системы F_t, G_t, H_t и от начальной ковариации P_0 , которые являются частью динамической модели (1.1). Таким образом, после того, как расписание наблюдений будет установлено, реализация оценивателя в реальном времени $\hat{z}_t = \hat{z}_t(\hat{x}_t, P_t)$ требует только вычисления калмановской оценки вектора состояния $\hat{x}_t$.

2.6. Замкнутая форма для СКО оценивателя. Для произвольной НФС $z_t = f(x_t)$ вычисление оптимальной оценки сводится к вычислению многомерного интеграла (2.2). Аналитическое вычисление этого интеграла (или замкнутая форма СКО оценивателя) возможно лишь в специальных случаях, таких, как в примерах 1–4.

Далее рассмотрим полиномиальную функцию от вектора состояния, для которой возможно получение простой среднеквадратической оценки в замкнутой форме, зависящей только от калмановской статистики $(\hat{x}_t, P_t)$.

3. Оптимальная замкнутая форма оценителя для полиномиальной функции. Рассмотрим специальный класс НФС (1.2), представляющий собой многомерную полиномиальную функцию (полиномиальная форма), такую, как:

$$\begin{aligned} \text{а) линейная форма:} & \quad f(x) = Ax; \\ \text{б) квадратичная форма:} & \quad f(x) = x^T Ax, \quad A = A^T; \\ \text{в) кубическая форма:} & \quad f(x) = Axx^T Bx; \\ \text{г) полином четвертой степени:} & \quad f(x) = x^T Axx^T Bx, \\ & \quad A = A^T, \quad B = B^T, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Для простоты опустим в этом разделе индекс t .

3.1. Оптимальные полиномиальные оценители. В случае полиномиальных форм (3.1) оптимальный оценитель $\hat{z} = \mathbf{E}[f(x)|y_0']$ имеет замкнутую форму, так как условное математическое ожидание зависит только от моментов высокого порядка условно-гауссовского распределения $\mathbb{N}(\hat{x}_t, P_t)$, которые могут быть явно вычислены через моменты первого и второго порядков, а именно калмановскую оценку и ковариацию ошибки $(\hat{x}, P)$. Следующая теорема описывает наилучшие полиномиальные оценители.

Теорема 1. Оптимальные среднеквадратические оценители $\hat{z} = \mathbf{E}[f(x)|y_0']$ для полиномиальных форм (3.1) описываются следующими аналитическими формулами:

$$\begin{aligned} \text{а) линейный оценитель:} & \quad \hat{z} = A\hat{x}; \\ \text{б) квадратичный оценитель:} & \quad \hat{z} = \text{tr}(AP) + \hat{x}^T A\hat{x}; \\ \text{в) кубический оценитель:} & \quad \hat{z} = 2APB\hat{x} + A\hat{x}\hat{x}^T B\hat{x} + A\hat{x}\text{tr}(BP); \\ \text{г) оценитель четвертой степени:} & \quad \hat{z} = 2\text{tr}(APBP) + 4\hat{x}^T APB\hat{x} + \\ & \quad + [\text{tr}(AP) + \hat{x}^T A\hat{x}][\text{tr}(BP) + \hat{x}^T B\hat{x}]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вывод оценок (3.2) дается в Приложении.

Пример 5 (оптимальное и субоптимальное оценивание Евклидовой нормы). Для определения относительного местоположения в беспроводных сенсорных сетях нам нужно оценить функцию потерь, представляющую собой Евклидову норму ошибки:

$$z = \|e\| = \sqrt{e^T e},$$

где $e \in \mathbb{R}^n$ — случайный вектор ошибки, $e \sim \mathbb{N}(0, P)$.

При $n = 2$ оптимальная оценка $\hat{z}$ определяется формулами (2.5) и (2.6):

$$\hat{z} = \mathbf{E}(e_t|y_0') = \frac{2\lambda_1\lambda_2\sqrt{\pi}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{3/2}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}; 1; q^2\right), \quad q = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3.3)$$

При $n > 2$ трудно вывести аналитическую формулу для оптимальной оценки $\hat{z}$, аналогичную (3.3). В этом случае можно предложить простую субоптимальную оценку $\tilde{z}$ для Евклидовой нормы. Вначале, используя квадратичный оценитель из (3.2), вычисляем оптимальную оценку квадрата нормы $\|e\|^2 = e^T e$, а далее извлекаем квадратный корень из полученной оценки. Имеем

$$\tilde{z} = \sqrt{\|\hat{e}^2\|} = \sqrt{\mathbf{E}(e^T e|y_0')} = \sqrt{\text{tr}(P)}, \quad (3.4)$$

где $\text{tr}(P)$ — след матрицы P .

Для изучения точности оптимальной и субоптимальной оценок (3.3) и (3.4) при $n = 2$ положим

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \\ q = -\frac{1}{3}, \quad {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 1; q^2\right) = 1.1169.$$

Тогда $\hat{z} = 1.524$, $\tilde{z} = 1.732$. Относительная ошибка $\left|\frac{\tilde{z} - \hat{z}}{\tilde{z}}\right| \cdot 100\% = 13.6\%$ показывает, что субоптимальная оценка $\tilde{z}$ значительно хуже оптимальной оценки $\hat{z}$.

3.2. Точные матричные формулы для квадратичных оценивателей. Рассмотрим произвольную квадратичную форму (КФ):

$$z_t = f(x_t) = x_t^T A x_t. \quad (3.5)$$

Применяя теорему 1, оптимальный квадратичный оцениватель в (3.2) явно выражается через оценку вектора состояния и ковариацию ошибки P_t , т.е.

$$\hat{z}_t = \text{tr}(A P_t) + \hat{x}_t^T A \hat{x}_t. \quad (3.6)$$

Параллельно с оптимальной оценкой предложим субоптимальную оценку $\tilde{z}$ для КФ, которая зависит только от калмановской оценки $\hat{x}_t$ и не зависит от ковариации ошибки P_t в отличие от (3.6). Предложенная субоптимальная оценка получается путем прямого вычисления КФ в точке $x_t = \hat{x}_t$. Имеем

$$\tilde{z}_t = f(\hat{x}_t) = \hat{x}_t^T A \hat{x}_t. \quad (3.7)$$

Далее сравним точность оптимальной (3.6) и субоптимальной (3.7) оценок. Следующая теорема определяет СКО этих оценок:

$$P_{z,t}^{opt} = \mathbf{E}[(z_t - \hat{z}_t)^2], \\ P_{z,t}^{sub} = \mathbf{E}[(z_t - \tilde{z}_t)^2].$$

Теорема 2. СКО $P_{z,t}^{opt}$ и $P_{z,t}^{sub}$ находятся как

$$P_{z,t}^{opt} = 4\text{tr}(A P_t A C_t) - 2\text{tr}(A P_t A P_t) + 4\mu_t^T A P_t A \mu_t, \quad (3.8)$$

и

$$P_{z,t}^{sub} = 4\text{tr}(A P_t A C_t) - 2\text{tr}(A P_t A P_t) + \text{tr}^2(A P_t) + 4\mu_t^T A P_t A \mu_t \quad (3.9)$$

соответственно. Здесь безусловные среднее $\mu_t = \mathbf{E}(x_t)$ и ковариация $C_t = \text{cov}(x_t, x_t)$ вектора состояния x_t определяются уравнениями метода моментов [6]:

$$\dot{\mu}_t = F_t \mu_t, \quad t \geq 0, \quad \mu_0 = \bar{x}_0, \\ \dot{C}_t = F_t C_t + C_t F_t^T + G_t Q_t G_t^T, \quad C_0 = P_0. \quad (3.10)$$

Вывод СКО (3.8) и (3.9) дается в Приложении.

Заметим, что разница между $P_{z,t}^{opt}$ и $P_{z,t}^{sub}$ равняется $P_{z,t}^{sub} - P_{z,t}^{opt} = \text{tr}^2(A P_t)$.

Таким образом, уравнения (3.8)–(3.10) полностью определяют истинные СКО оптимального и субоптимального квадратичного оценивателей.

3.3. Теоретические и практические примеры применения квадратичных оценивателей.

Пример 6 (теоретический пример – оценивание мощности скалярного сигнала). Пусть x_t – скалярный случайный сигнал, измеряемый с аддитивным белым шумом. Тогда модель системы имеет вид

$$\dot{x}_t = a x_t + v_t, \quad t \geq 0, \quad a < 0, \\ y_t = x_t + w_t,$$

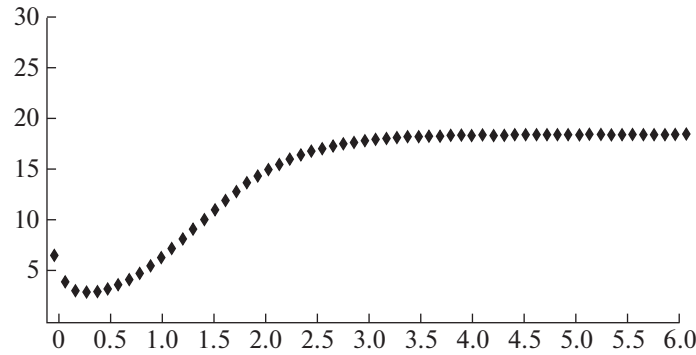


Рис. 5. Относительная ошибка Δ_t , %, между оптимальной и субоптимальной СКО для квадратического оценивателя

где v_t и w_t — некоррелированные гауссовские белые шумы с интенсивностями q и r , соответственно и $x_0 \sim \mathbb{N}(m_0, \sigma_0^2)$.

Уравнения ФКБ (2.1) запишем как

$$\begin{aligned}\hat{x}_t &= a\hat{x}_t + P_t(y_t - \hat{x}_t)/r, & \hat{x}_0 &= m_0, \\ \dot{P}_t &= 2aP_t - P_t^2/r + q, & P_0 &= \sigma_0^2.\end{aligned}$$

Рассмотрим мощность сигнала x_t , которая пропорциональна его квадрату. Тогда $z_t = f(x_t) = x_t^2$. Используя (3.6) и (3.7), получаем оптимальную и субоптимальную оценки мощности сигнала соответственно:

$$\hat{z}_t = \hat{x}_t^2 + P_t, \quad \tilde{z}_t = f(\hat{x}_t) = \hat{x}_t^2.$$

Сравним точность этих оценок. Используя теорему 2, получаем истинные СКО:

$$\begin{aligned}P_{z,t}^{opt} &= 4P_t C_t - 2P_t^2 + 4\mu_t^2 P_t, \\ P_{z,t}^{sub} &= 4P_t C_t - P_t^2 + 4\mu_t^2 P_t,\end{aligned}$$

где среднее μ_t и ковариация C_t сигнала x_t определяются уравнениями (3.10):

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_t &= a\mu_t, & \mu_0 &= m_0, \\ \dot{C}_t &= 2aC_t + q, & C_0 &= \sigma_0^2.\end{aligned}$$

Рисунок 5 показывает относительную ошибку $\Delta_t = |(P_{z,t}^{opt} - P_{z,t}^{sub})/P_{z,t}^{opt}| \cdot 100\%$ для значений параметров $a = -1$, $q = 0.5$, $m_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 4$, $r = 0.1$. Из него видно, что относительная ошибка Δ_t изменяется от 3 до 6% в интервале $t \in [0.1; 1.1]$ и далее она возрастает. В установившемся режиме $t > 4$ эта ошибка достигает значения $\Delta_\infty = 20.4\%$, на этом интервале времени абсолютные значения СКО равны $P_\infty^{opt} = 0.1029$ и $P_\infty^{sub} = 0.1239$. Таким образом, численные расчеты показали, что субоптимальная оценка $\tilde{z}_t = \hat{x}_t^2$ может быть значительно хуже оптимальной оценки $\hat{z}_t = \hat{x}_t^2 + P_t$.

Пример 7 (практический пример — модель аэродинамической трубы). Рассматривается экспериментальный анализ квадратичного оценивателя на примере расчета общей кинетической энергии высокоскоростной аэродинамической системы закрытого типа [36]. Вектор состояния $x_t \in \mathbb{R}^3$ включает три переменные x_{1t} , x_{2t} и x_{3t} , представляющие собой отклонения от вы-

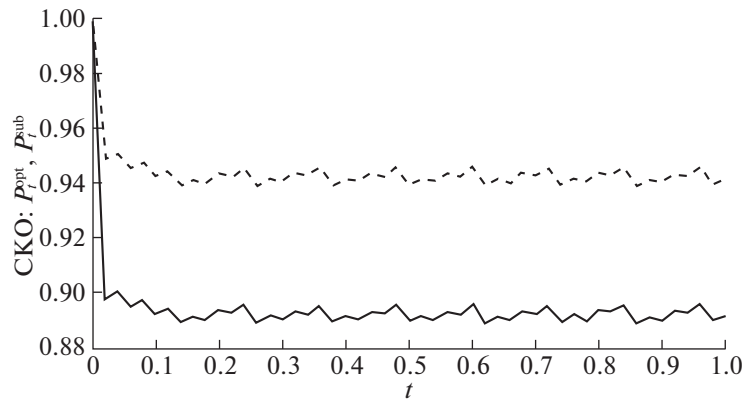


Рис. 6. Сравнение СКО для общей кинетической энергии z_t с использованием оптимального и субоптимального квадратического оценивателей: P_t^{opt} (сплошная кривая), P_t^{sub} (пунктирная кривая)

бранного положения равновесия: x_1 — число Маха, x_2 — угол наклона направляющей лопатки привода при движении вентилятора, и x_3 — скорость привода. Тогда модель системы имеет вид

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0.4032 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1245 & 0.0701 \\ 0 & -2.5247 & -0.5488 \end{bmatrix} x_t + v_t,$$

где начальные значения $\bar{x}_0 = [3 \ 28 \ 10]^T$ и $P_0 = \text{diag}[1 \ 1 \ 0]$.

Двухсенсорная модель измерения имеет вид

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + w_t.$$

Интенсивности белых шумов $v_t \in \mathbb{R}^3$ и $w_t \in \mathbb{R}^2$ равны $Q = \text{diag}[0.01 \ 0.01 \ 0.01]$ и $R = \text{diag}[0.05 \ 0.05]$ соответственно.

Общая кинетическая энергия привода выражается в виде суммы поступательной энергии центра масс $E^{tr} = mv_t^2/2$ и вращательной энергии вокруг центра масс $E^r = \mathbf{I}\omega_t^2/2$, где $\mathbf{I}$ — инерция вращения, $\omega_t = \dot{x}_{2t}$ — угловая скорость, m — масса привода, и $v_t = x_{3t}$ — линейная скорость. Тогда общая кинетическая энергия может быть представлена как КФ:

$$z_t = E^r + E^{tr} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \dot{x}_{2,t}^2 + \frac{1}{2} m x_{3,t}^2 = X_t^T A X_t,$$

$$X_t = [x_{1,t} \ x_{2,t} \ x_{3,t} \ \dot{x}_{2,t}]^T,$$

$$A = \text{diag}[0 \ 0 \ m/2 \ \mathbf{I}/2],$$

где $X_t \in \mathbb{R}^4$ — расширенный вектор состояния $\mathbf{I} = 0.136 \text{ кгм}^2$, и $m = 7.39 \text{ кг}$.

Используя теорему 1, оптимальный и субоптимальный квадратичные оцениватели принимают вид

$$\hat{z}_t = \text{tr}(AP_t) + \hat{X}_t^T A \hat{X}_t, \quad \tilde{z}_t = \hat{X}_t^T A \hat{X}_t,$$

где оценка вектора состояния $\hat{X}_t \in \mathbb{R}^4$ и ковариация ошибки $P_t \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ определяются в (2.1).

Мы интересуемся поведением СКО $P_{z,t}^{opt} = \mathbf{E}[(z_t - \hat{z}_t)^2]$ и $P_{z,t}^{sub} = \mathbf{E}[(z_t - \tilde{z}_t)^2]$, которые вычисляются с применением теоремы 2. Из рис. 6 видно, что оптимальный оцениватель более эффективный, чем субоптимальный: $P_{z,t}^{opt} < P_{z,t}^{sub}$. Относительная ошибка Δ_t изменяется от 6.2 до 10% в интервале работы системы $t \in [0.02; 0.07]$, и далее она уменьшается. В интервале $t > 0.07$

значения СКО и относительной ошибки равны $P_{z,t}^{opt} = 0.89$, $P_{z,t}^{sub} = 0.94$ и $\Delta_t = 5.6\%$ соответственно.

В результате, можно констатировать, что предложенный оптимальный квадратичный оценщик более подходит для обработки данных на практике.

Заключение. В некоторых прикладных задачах нелинейная функция переменных состояния содержит полезную информацию для целей систем управления. Для ее оценки предложен оптимальный двухшаговый СКО алгоритм оценивания. На первом шаге рассчитывается предварительная оценка вектора состояния путем применения стандартного ФКБ. Затем полученная оценка используется на втором шаге для оценивания исходной функции.

Особое внимание уделено полиномиальным функциям вектора состояния. В этом случае можно получить оптимальную полиномиальную оценку в замкнутой форме, которая зависит только от статистики ФКБ. Интерпретация квадратичной функции как мощность или энергия объекта рассматривается в примерах 6 и 7.

Ввиду важности нелинейной функции для практики предложенные алгоритмы оценивания иллюстрируются на теоретических и численных примерах для реальных нелинейных функций. Примеры показывают, что оптимальный оценщик дает достаточно хорошую точность.

Используя среднеквадратический подход, предложен оптимальный двухшаговый нелинейный оценщик. Установлено, что полиномиальный оценщик (квадратичный, кубический, четвертой степени и т.д.) может быть представлен в компактной замкнутой форме, зависящей только от выходных характеристик ФКБ (теорема 1). Важный класс квадратичных функций подробно исследован, включая вывод матричных уравнений для истинной СКО (теорема 2). Эффективность предложенных оценщиков для реальных функций показывает их практическую и теоретическую полезность.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Вывод полиномиальных оценщиков (3.2) основан на лемме 1.

Лемма 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ — гауссовский случайный вектор $x \sim \mathbb{N}(\mu, S)$ и $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольные матрицы. Тогда

$$\begin{aligned} E(Ax) &= A\mu; \\ E(x^T Ax) &= \text{tr}(AS) + \mu^T A\mu, \quad A = A^T; \\ E(Axx^T Bx) &= 2ASB\mu + A\mu\mu^T B\mu + A\mu \text{tr}(BS); \\ E(x^T Axx^T Bx) &= 2\text{tr}(ASBS) + 4\mu^T ASB\mu \\ &+ [\text{tr}(AS) + \mu^T A\mu][\text{tr}(BS) + \mu^T B\mu], \quad A = A^T, \quad B = B^T. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Вывод формул (П.1) базируется на их скалярных версиях [37, 38] и стандартных преобразованиях над случайными векторами. Это завершает доказательство леммы 1.

Далее, заменяя в (П.1) безусловные математические ожидания и ковариации на их условные версии, например $\mu \rightarrow E(x|y_0') = \hat{x}$, $S \rightarrow \text{cov}(\hat{x}, \hat{x}|y_0') = P$, получаем (3.2). Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Вывод формул для СКО основан на лемме 2.

Лемма 2. Пусть $X \in \mathbb{R}^{3n}$ — составной многомерный гауссовский вектор $X^T = [U^T \ V^T \ W^T]$:

$$\begin{aligned} X &\sim \mathbb{N}(\mu, S), \quad U, V, W \in \mathbb{R}^n, \\ \mu &= \begin{bmatrix} \mu_u \\ \mu_v \\ \mu_w \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uv} & S_{uw} \\ S_{vu} & S_{vv} & S_{vw} \\ S_{wu} & S_{wv} & S_{ww} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Тогда векторные моменты третьего и четвертого порядков составного вектора X вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 E(U^T V W) &= \mu_u^T \mu_v \mu_w + \text{tr}(S_{uv}) \mu_w^T + \mu_v^T S_{uw} + \mu_u^T S_{vw}; \\
 E(U^T U V^T V) &= \mu_u^T \mu_u \mu_v^T \mu_v + 2\text{tr}(S_{uv} S_{vu}) + \text{tr}(S_{uu}) \text{tr}(S_{vv}) + \\
 &\quad + \text{tr}(S_{uu}) \mu_v^T \mu_v + \text{tr}(S_{vv}) \mu_u^T \mu_u + 4\mu_u^T S_{uv} \mu_v; \\
 E(U^T V V^T U) &= \mu_u^T \mu_v \mu_v^T \mu_u + \text{tr}(S_{uu} S_{vv}) + \text{tr}(S_{uv}) \text{tr}(S_{vu}) + \\
 &\quad + \text{tr}(S_{uv}^2) + \mu_v^T S_{uu} \mu_v + \mu_u^T S_{vv} \mu_u + \mu_u^T S_{uv} \mu_u + \mu_u^T S_{vu} \mu_v + 2\text{tr}(S_{uv}) \mu_u^T \mu_v; \\
 E(U^T V W^T U) &= \mu_u^T \mu_v \mu_w^T \mu_u + \text{tr}(S_{uv}) \text{tr}(S_{uw}) + \text{tr}(S_{uu} S_{vw}) + \\
 &\quad + \text{tr}(S_{uw} S_{uv}) + \text{tr}(S_{uv}) \mu_u^T \mu_w + \text{tr}(S_{uw}) \mu_u^T \mu_v + \\
 &\quad + \mu_v^T S_{uu} \mu_w + \mu_v^T S_{uw} \mu_u + \mu_u^T S_{vu} \mu_w + \mu_u^T S_{vw} \mu_u.
 \end{aligned} \tag{П.3}$$

Вывод векторных формул (П.3) опирается на их скалярные версии и стандартные матричные операции:

$$\begin{aligned}
 E(x_i x_j x_k) &= \mu_i \mu_j \mu_k + \mu_i S_{jk} + \mu_j S_{ik} + \mu_k S_{ij}; \\
 E(x_i x_j x_k x_\ell) &= \mu_i \mu_j \mu_k \mu_\ell + S_{ij} S_{k\ell} + S_{ik} S_{j\ell} + S_{i\ell} S_{jk} + \mu_i \mu_j S_{k\ell} + \mu_i \mu_k S_{j\ell} + \mu_i \mu_\ell S_{jk} + \\
 &\quad + \mu_j \mu_k S_{i\ell} + \mu_j \mu_\ell S_{ik} + \mu_k \mu_\ell S_{ij},
 \end{aligned} \tag{П.4}$$

где $\mu_h = E(x_h)$, $S_{pq} = \text{cov}(x_p, x_q)$. Это завершает доказательство леммы 2.

Далее выведем формулу (3.8). Используя (3.5) и (3.6), ошибка может быть записана как

$$\begin{aligned}
 e_z = z - \hat{z} &= x^T A x - \text{tr}(AP) - \hat{x}^T A \hat{x} = (e + \hat{x})^T A (e + \hat{x}) - \hat{x}^T A \hat{x} - \text{tr}(AP) = \\
 &= e^T A e + 2e^T A \hat{x} - \text{tr}(AP), \quad e = x - \hat{x}, \quad \hat{x}^T A e = e^T A \hat{x}.
 \end{aligned} \tag{П.5}$$

Учитывая свойства несмещенности и ортогональности калмановских оценок $E(e) = E(e \hat{x}^T) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 P_z^{\text{opt}} &= E(e^T A e e^T A e) + 2E(e^T A \hat{x} e^T A e) - \\
 &\quad - \text{tr}(AP) E(e^T A e) + 2E(e^T A e e^T A \hat{x}) + \\
 &\quad + 4E(e^T A \hat{x} e^T A \hat{x}) - 2\text{tr}(AP) E(e^T A \hat{x}) - \\
 &\quad - \text{tr}(AP) E(e^T A e) - 2\text{tr}(AP) E(e^T A \hat{x}) + \text{tr}^2(AP).
 \end{aligned} \tag{П.6}$$

Применяя лемму 2, можно вычислить моменты высокого порядка в (П.6). Имеем

$$\begin{aligned}
 E(e^T A e) &= \text{tr}(AP), \quad E(e^T A \hat{x}) = 0, \quad E(e^T A e e^T A e) = \text{tr}^2(AP) + 2\text{tr}(APAP), \\
 E(e^T A \hat{x} e^T A e) &= E(e^T A e e^T A \hat{x}) = 0, \quad E(e^T A \hat{x} e^T A \hat{x}) = E(e^T A \hat{x} \hat{x}^T A e) = \text{tr}(PAC_{\hat{x}\hat{x}}A) + \mu^T AP\mu,
 \end{aligned} \tag{П.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mu &= E(x) = E(\hat{x}), \quad \text{cov}(Ae, Ae) = APA^T, \\
 C_{\hat{x}\hat{x}} &= C - P, \quad P = \text{cov}(e, e), \quad C = \text{cov}(x, x).
 \end{aligned} \tag{П.8}$$

Подставляя (П.7) в (П.6), после небольших преобразований получаем оптимальную СКО (3.8).

В случае субоптимальной оценки $\tilde{z}$ вывод формулы (3.9) аналогичный. Это завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davari N., Gholami A. An Asynchronous Adaptive Direct Kalman Filter Algorithm to Improve Underwater Navigation System Performance // IEEE Sensors J. 2017. V. 17. № 1. P. 1061–1068.
2. Rajaram T., Reddy J.M., Xu Y. Kalman Filter Based Detection and Mitigation of Subsynchronous Resonance with SSSC // IEEE Trans. on Power Systems. 2017. V. 32. № 2. P. 1400–1409.
3. Deng X., Zhang Z. Automatic Multihorizons Recognition for Seismic Data Based on Kalman Filter Tracker // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2017. V. 14. № 3. P. 319–323.
4. Grewal M.S., Andrews A.P., Bartone C.G. Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration. New Jersey: Wiley&Sons, 2013.

5. *Simon D.* Optimal State Estimation. New Jersey: Wiley&Sons, 2006.
6. *Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation. N.Y.: Wiley&Sons, 2001.
7. *Arnold V.I.* Mathematical Methods of Classical Mechanics. N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
8. *Cai T.T., Low M.G.* Optimal Adaptive Estimation of a Quadratic Functional // The Annals of Statistics. 2006. V. 34. № 5. P. 2298–2325.
9. *Robins J., Li L., Tchetgen E., Vaart A.* Higher Order Influence Functions and Minimax Estimation of Nonlinear Functionals // Probability and Statistics. 2008. V. 2. P. 335–421.
10. *Jiao J., Venkat K., Han Y., Weissman T.* Minimax Estimation of Functionals of Discrete Distributions // IEEE Trans. on Information Theory. 2015. V. 61. № 5. P. 2835–2885.
11. *Jiao J., Venkat K., Han Y., Weissman T.* Maximum Likelihood Estimation of Functionals of Discrete Distributions // IEEE Trans. on Information Theory. 2017. V. 63. № 10. P. 6774–6798.
12. *Amemiya Y., Fuller W.A.* Estimation for the Nonlinear Functional Relationship // The Annals of Statistics. 1988. V. 16. № 1. P. 147–160.
13. *Donoho D.L., Nussbaum M.* Minimax Quadratic Estimation of a Quadratic Functional // J. Complexity. 1990. V. 6. № 3. P. 290–323.
14. *Grebakov D.S.* Optimal and Suboptimal Quadratic Forms for Noncentered Gaussian Processes // Physical Review. 2013. V. E88. Article ID 032140.
15. *Laurent B., Massart P.* Adaptive Estimation of a Quadratic Functional by Model Selection // The Annals of Statistics. 2000. V. 28. № 5. P. 1302–1338.
16. *Vladimirov I.G., Petersen I.R.* Directly Coupled Observers for Quantum Harmonic Oscillators with Discounted Mean Square Cost Functionals and Penalized Back-action // Proc. IEEE Conf. on Norbert Wiener in the 21st Century. Melbourne, Australia, 2016. P. 78–83.
17. *Sricharan K., Raich R., Hero A.O.* Estimation of Nonlinear Functionals of Densities with Confidence // IEEE Trans. on Information Theory. 2012. V. 58. № 7. P. 4135–4159.
18. *Wisler A., Berisha V., Spanias A., Hero A.O.* Direct Estimation of Density Functionals Using a Polynomial Basis // IEEE Trans. on Signal Processing. 2018. V. 66. № 3. P. 558–588.
19. *Taniguchi M.* On Estimation of Parameters of Gaussian Stationary Processes // J. Applied Probability. 1979. V. 16. № 3. P. 575–591.
20. *Zhao-Guo C., Hanman E.J.* The Distribution of Periodogram Ordinates // J. Time Series Analysis. 1980. V. 1. № 1. P. 73–82.
21. *Janas D., Sachs R.* Consistency for Non-linear Functions of the Periodogram of Tapered Data // J. Time Series Analysis. 1995. V. 16. № 6. P. 585–606.
22. *Fay G., Moulines E., Soulier P.* Nonlinear Functionals of the Periodogram // J. Time Series Analysis. 2002. V. 23. № 5. P. 523–553.
23. *Noviello C., Fornaro G., Braca P., Martorella M.* Fast and Accurate ISAR Focusing Based on a Doppler Parameter Estimation Algorithm // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2017. V. 14. № 3. P. 349–353.
24. *Wu Y., Yang P.* Minimax Rates of Entropy Estimation on Large Alphabets Via Best Polynomial Approximation // IEEE Trans. on Information Theory. 2016. V. 62. № 6. P. 3702–3720.
25. *Wu Y., Yang P.* Optimal Entropy Estimation on Large Alphabets Via Best Polynomial Approximation // Proc. IEEE Inter. Sympos. on Information Theory. Hong Kong, 2015. P. 824–828.
26. *Haykin S.O.* Adaptive Filtering. New Jersey: Prentice Hall, 2013.
27. *Moon T.K., Stirling W.C.* Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
28. *Coluccia A.* On the Expected Value and Higher-order Moments of the Euclidean Norm for Elliptical Normal Variates // IEEE Communications Letters. 2013. V. 17. № 12. P. 2364–2367.
29. *Nadarajah S., Kotz S.* Exact Distribution of the Max/min of Two Gaussian Random Variables // IEEE Trans. on Very Large Scale Integration Systems. 2008. V. 16. № 2. P. 210–212.
30. *Пугачев В.С., Сеницын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. 2-е изд. М.: Наука, 1990.
31. *Пугачев В.С.* Оценивание состояния и параметров непрерывных нелинейных систем // АИТ. 1979. № 6. С. 63–79.
32. *Руденко Е.А.* Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 6. С. 25–51.
33. *Julier S.J., Uhlmann J.K.* Unscented Filtering and Nonlinear Estimation // Proc. IEEE. 2004. V. 92. № 3. P. 401–422.
34. *Ito K., Xiong K.* Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2000. V. 45. № 5. P. 910–927.
35. *Doucet A., Freitas N.D., Gordon N.* Sequential Monte Carlo Methods in Practice. L.: Springer-Verlag, 2001.
36. *Armstrong E.S., Tripp J.S.* An Application of Multivariable Design Techniques to the Control of the National Transonic Facility // NASA Technical Paper. V. 1887. Washington, NASA, 1981. P. 1–36.
37. *Kan R.* From Moments of Sum to Moments of Product // J. Multivariate Analysis. 2008. V. 99. № 3. P. 542–554.
38. *Holmquist B.* Expectations of Products of Quadratic Forms in Normal Variables // Stochastic Analysis and Applications. 1996. V. 14. № 2. P. 149–164.