

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 681.51

**РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ
ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ БЕЗ НАКОПЛЕНИЯ
КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ГИРОСИСТЕМЫ**

© 2020 г. А. И. Игнатов^{a,*}, В. В. Сазонов^{b,**}

^a АО “ГКНПЦ им. М.В. Хруничева”, Москва, Россия

^b ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: general_z@mail.ru

**e-mail: sazonov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 17.05.19 г.

После доработки 14.06.19 г.

Принята к публикации 22.07.19 г.

Рассматривается движение искусственного спутника Земли типа “Прогресс”, “Фотон-М” № 4 в различных вариантах режима орбитальной ориентации на низкой околоземной орбите. В качестве исполнительных органов системы управления спутником используется гиросистема (комплекс двигателей-маховиков или гиродинов). Учитывается действие на спутник гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов. На принципах пропорционально-дифференцирующего регулятора построены законы управления гиросистемным моментом, позволяющие без его накопления поддерживать длительную и достаточно точную ориентацию спутника в окрестности гравитационно устойчивых и неустойчивых положений покоя, существующих в упрощенной задаче (спутник движется по неизменной круговой орбите и испытывает действие только гравитационного момента, гиросистемный момент при этом равен нулю).

DOI: 10.31857/S0002338819060064

Введение. Режим орбитальной ориентации искусственного спутника Земли (ИСЗ) применяется для решения ряда задач, в частности, он предпочтителен при проведении космических экспериментов в области микрогравитации [1]. Для поддержания достаточно точной орбитальной ориентации спутника можно использовать различные исполнительные органы системы управления: электроракетные двигатели [2], электромагнитные органы управления [3, 4], а также гиросистему (двигатели-маховики или гиродины) [1, 5]. В данной работе в качестве исполнительного органа системы управления спутника рассматривается гиросистема. При использовании гиросистемы одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления гиросистемного момента. Эта скорость определяет промежутки времени между разгрузками гиросистемы и должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки полета с малым уровнем микроускорений. Ниже рассматриваются законы управления вращательным движением спутника, позволяющие поддерживать его орбитальную ориентацию продолжительное время без насыщения кинетического момента гиросистемы.

1. Уравнения движения спутника. Спутник считаем гиросистемой, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Для описания движения спутника будем использовать три правые декартовы системы координат.

Связанная со спутником система координат $Ox_1x_2x_3$, образована его главными центральными осями инерции. Начало системы находится в центре масс спутника – точке O . Несколько упрощая модель, полагаем, что оси системы $Ox_1x_2x_3$ связаны с характерными элементами конструкции спутника. Допустим, что спутник имеет форму прямого кругового цилиндра радиусом R_c и высотой L_c с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами – солнечными батареями, суммарной площадью S_b . Ось Ox_1 совпадает с осью цилиндра. Солнечные батареи расположены в плоскости Ox_1x_3 симметрично относительно оси Ox_1 , стороны батарей параллельны осям Ox_1 и Ox_3 , ось Ox_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Координата-

ты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим $(x_c, 0, 0)$ и $(x_b, 0, 0)$ соответственно. Здесь и ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Ox_1x_2x_3$. Базисные орты системы $Ox_1x_2x_3$ обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

В орбитальной системе $OX_1X_2X_3$ оси OX_3 и OX_2 направлены соответственно вдоль геоцентрического радиус-вектора точки O и вектора кинетического момента орбитального движения спутника. Базисные орты этой системы обозначим $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$.

Начало гринвичской системы координат $CY_1Y_2Y_3$ – точка C , расположенная в центре Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена по оси вращения Земли к Северному полюсу. Полагаем, что эта система вращается с постоянной угловой скоростью ω_E вокруг оси CY_3 .

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно систем $OX_1X_2X_3$ и $CY_1Y_2Y_3$ зададим нормированными кватернионами Q_A и Q_B соответственно. Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $OX_1X_2X_3$ обозначим $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3, a_{ij} = \mathbf{E}_i \mathbf{e}_j$. Матрицу A параметризуем углами γ, δ и β , которые введем следующим образом [1]. Система $Ox_1x_2x_3$ может быть получена из системы $OX_1X_2X_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 , 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 , 3) на угол γ вокруг оси OX_1 , полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Ox_1 . Элементы матрицы A выражаются через углы γ, δ, β по формулам, приведенным в [1], а также через компоненты кватерниона Q_A по формулам, рассмотренным в [6].

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – движение относительно центра масс (вращательное движение). Первая подсистема записывается в гринвичской системе координат. Ее переменными служат компоненты геоцентрического радиус-вектора \mathbf{r} точки O и скорости этой точки \mathbf{v} относительно гринвичской системы координат [7]. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка $(16,16)$ включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается, согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, кинематическими уравнениями для кватерниона Q_B и уравнениями, описывающими изменение кинетического момента гиросистемы. В уравнениях, выражающих теорему об изменении кинетического момента, учитываются гравитационный и аэродинамический моменты. Гравитационный момент задается аналитическим выражением [8]

$$\mathbf{M}_g = 3 \frac{\mu_E}{r^5} (\mathbf{r} \times \hat{I} \mathbf{r}), \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3),$$

где I_i – моменты инерции спутника относительно осей $Ox_i, i = 1, 2, 3, \mu_E$ – гравитационный параметр Земли.

Аэродинамический момент вычислен при следующих упрощающих предположениях [8]. Молекулы атмосферы при столкновении со спутником испытывают абсолютно неупругий удар. Взаимное затенение солнечных батарей и корпуса спутника не учитывается. Формула аэродинамического момента имеет вид

$$\mathbf{M}_a = p (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1), \quad p = \rho_a (\pi R_c^2 x_c |v_1| + S_b x_b |v_2| + 2R_c L_c x_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2}),$$

где ρ_a – плотность атмосферы в точке O, v_i – компоненты вектора \mathbf{v} .

Теорема об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс выражается уравнениями

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, \quad \mathbf{K} = \hat{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \quad (1.1)$$

где \tilde{d}/dt – локальная производная вектора в системе $Ox_1x_2x_3, \mathbf{K}$ – кинетический момент спутника, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – абсолютная угловая скорость спутника, $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)^T$ – собственный кинетический момент гиросистемы (гиростатический момент спутника).

Кинематическое уравнение для кватерниона Q_B имеет вид

$$2\dot{Q}_B = Q_B \circ (0, \omega) - (0, \omega_E) \circ Q_B, \quad (1.2)$$

где $\omega_E = (0, 0, \omega_E)^T$ – вектор угловой скорости вращения Земли в гринвичской системе координат, $(0, \omega)$ и $(0, \omega_E)$ – чисто мнимые кватернионы, \circ – кватернионное произведение, точка над буквой означает дифференцирование по времени t .

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения спутника, надо добавить к (1.1) и (1.2) уравнение, описывающее изменение гиросtatического момента спутника \mathbf{H} . Это уравнение будет выписано ниже.

Приведем использованные в расчетах числовые значения параметров описанной модели. Параметры спутника: $m = 6440$ кг, $I_1 = 2600$ кгм², $I_2 = 11100$ кгм², $I_3 = 10900$ кгм², $R_c = 1.3$ м, $L_c = 5.0$ м, $S_b = 33$ м², $x_b = -1$ м, $x_c = 0.3$ м. Начальные условия движения центра масс спутника задавались в восходящем узле орбиты в момент 09:10:34 UTC 21.09.2007. Начальные элементы орбиты: высота в апогее 450 км, высота в перигее 400 км, наклонение 63.0°, аргумент широты перигея 53.5°, долгота восходящего узла (отсчитывается от точки среднего весеннего равноденствия эпохи даты). Параметры модели атмосферы: $F_{10.7} = F_{81} = 150$, $A_p = 12$.

Начальные условия уравнений (1.1), (1.2) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения. Этот момент служил началом отсчета времени – точкой $t = 0$.

2. Пассивная гравитационная ориентация спутника. Чтобы пояснить этот режим вращательного движения, упростим уравнения (1.1), (1.2), положив $\mathbf{H} = 0$ и отбросив второстепенные факторы. Будем считать, что орбита спутника – круговая радиуса r и неизменна в абсолютном пространстве, $\mathbf{M}_a = 0$. В этом случае система (1.1), (1.2) имеет 24 стационарных решения, в которых $\omega = \omega_0 \mathbf{E}_2$, орты \mathbf{e}_i совпадают с ортами $\pm \mathbf{E}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, где $\omega_0 = \sqrt{\mu_E/r^3}$ – среднее движение спутника (орбитальная частота). Эти решения описывают положения равновесия (покой) спутника в орбитальной системе координат [8].

Ограничимся рассмотрением двух стационарных решений системы, задаваемых соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_1, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_2. \quad (2.2)$$

При выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ решение (2.1) является устойчивым, а решение (2.2) – неустойчивым [8].

Устойчивое стационарное решение (2.1) можно использовать для реализации режима пассивной трехосной гравитационной ориентации спутника [9].

Исследуя этот режим, положим в (1.1), (1.2) $\mathbf{H} = 0$, остальные параметры оставим без изменений. В этом случае уравнения (1.1), (1.2) уже не имеют решения (2.1), однако они имеют решения, в которых соотношения (2.1) выполнены приближенно. Чтобы ориентированное движение спутника сохранялось более длительное время, такие решения можно выбирать из условия минимума функционала [1]

$$\Phi = \int_0^T |\omega - \tilde{\omega}_0 \mathbf{E}_2|^2 dt. \quad (2.3)$$

Здесь $\tilde{\omega}_0 = c/r^2$, c – модуль орбитального кинетического момента, $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0(t)$ (в случае неизменной круговой орбиты $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$), значение T приближенно равно нескольким орбитальным периодам $2\pi/\tilde{\omega}_0$. В упрощенной задаче, рассмотренной выше, $\Phi = 0$ для положения покоя (2.1) и $\Phi > 0$ на решениях, лежащих в окрестности этого положения и не совпадающих с ним. Интеграл в (2.3) можно заменить суммой

$$\Phi' = \sum_{n=0}^{N-1} |\omega(n\tau) - \tilde{\omega}_0 \mathbf{E}_2(n\tau)|^2, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

где N – достаточно большое число. В описываемых расчетах были взяты $T = 4\pi/\tilde{\omega}_0(0)$, $N = 80$. Минимизация Φ' по начальным условиям решения системы (1.1), (1.2) при условии $\|Q_B(0)\| = 1$

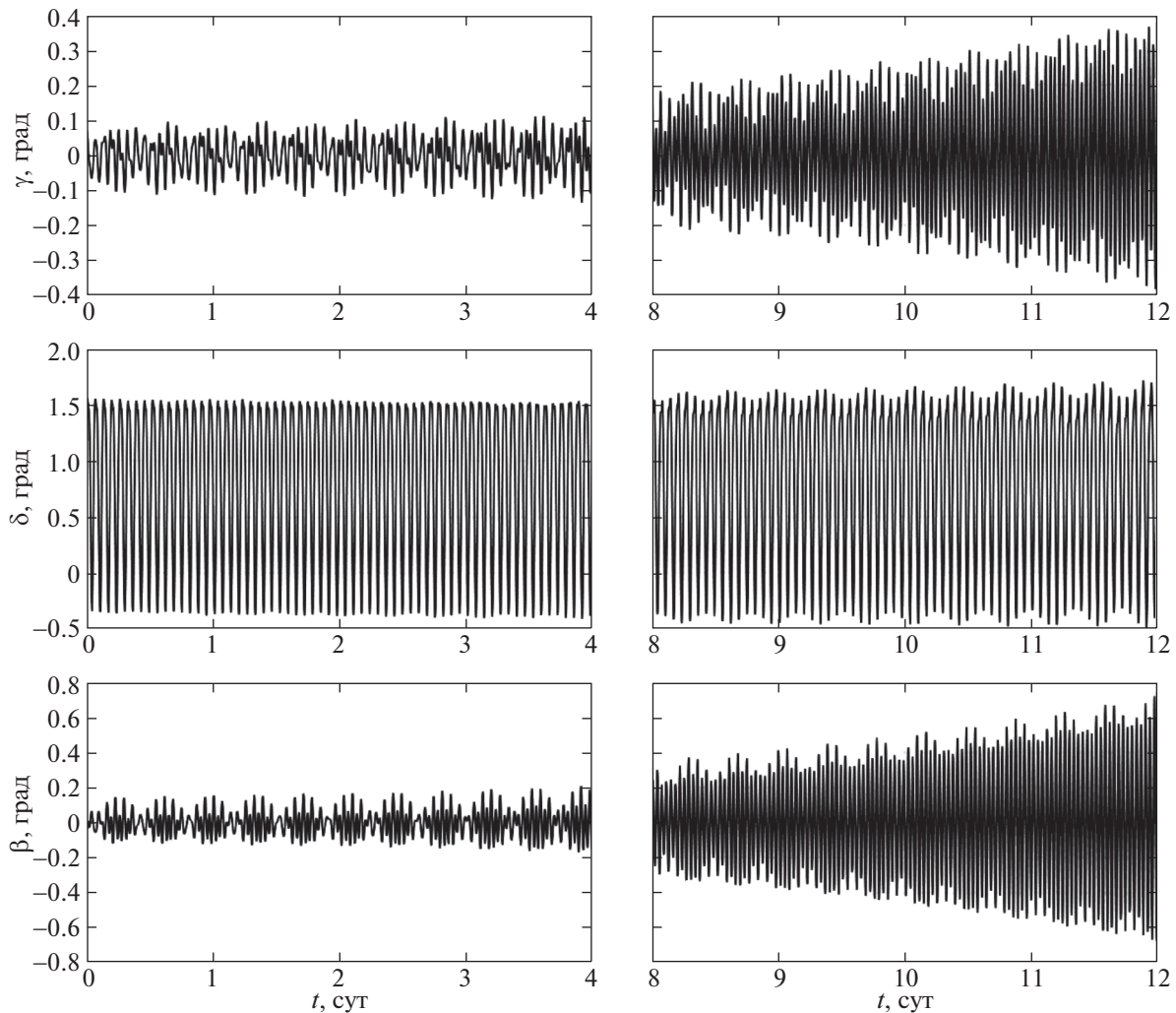


Рис. 1. Углы ориентации ИСЗ в режиме его пассивной гравитационной ориентации

проводилась методом Гаусса–Ньютона [10]. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях, в которых отбрасывались члены, характеризующие аэродинамический момент.

Решения уравнений (1.1), (1.2), доставляющие локальный минимум функционалу Φ' и близкие положению покоя (2.1), представлены на рис. 1 графиками зависимости от времени углов γ , δ , β . Положение спутника в орбитальной системе координат в начальный момент времени задается углами $\gamma(0) = 0.06^\circ$, $\delta(0) = 1.34^\circ$, $\beta(0) = -0.07^\circ$. Начальная угловая скорость спутника:

$$\omega_1(0) = -1.35 \times 10^{-5} \text{ град/с}, \quad \omega_2(0) = 0.0655 \text{ град/с}, \quad \omega_3(0) = 8.68 \times 10^{-6} \text{ град/с}.$$

Решения уравнений найдены на интервале времени 12 сут. Графики в левой части рис. 1 показаны на интервале времени $0 \leq t \leq 4$ сут, в правой части – на интервале $8 \leq t \leq 12$ сут. Хорошо видна слабая неустойчивость режима пассивной гравитационной ориентации (см. графики функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$), которая связана с дестабилизирующим действием аэродинамического момента. Колебания спутника вызваны изменением плотности атмосферы и эллиптичностью орбиты. К сожалению, в полной мере использовать возможности режима пассивной гравитационной ориентации не удастся из-за неизбежных ошибок в задании начальных условий. Эти ошибки приводят к более быстрому разрушению ориентированного движения, чем показано на рис. 1.

3. Орбитальная ориентация спутника. Орбитальной ориентацией спутника будем называть его движение, близкое заданному положению покоя в орбитальной системе координат. В случае

спутника, рассмотренного в разд. 1, технически доступные реализации гиросtatического момента $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)^T$ не могут обеспечить существование в течение длительного времени решений уравнений (1.1), (1.2), описывающих точный покой в орбитальной системе, но они могут обеспечить решения, близкие к покою.

Уравнение, описывающее изменение гиросtatического момента спутника \mathbf{H} , представим как

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \quad (3.1)$$

где \mathbf{M}_c – управляющий момент, приложенный к корпусу спутника со стороны гиросистемы. Подстановка (3.1) в уравнение (1.1) приводит его к виду

$$\hat{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_c. \quad (3.2)$$

Рассмотрим систему уравнений (1.2), (3.2) и выберем момент \mathbf{M}_c так, чтобы эта система допускала установившиеся решения, в которых кватернион $Q_A(t)$ был бы близок к заданному постоянно кватерниону Q_0 , а величина $|\mathbf{H}|$ возрастала бы, по возможности, медленнее. Такой момент будем искать в виде

$$\mathbf{M}_c = -\xi^2 \hat{I} \boldsymbol{\theta} - 2\xi \hat{I} (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2), \quad (3.3)$$

где ξ – положительный параметр, $\boldsymbol{\theta} = -2\text{vect}(Q_0^{-1} \circ Q_A)$. При $Q_A \approx Q_0$ $\boldsymbol{\theta}$ – вектор бесконечно малого поворота, $Q_A = [(0, \boldsymbol{\theta}) \circ Q_0] / 2$, $(0, \boldsymbol{\theta})$ – чисто мнимый кватернион.

Формула (3.3) подразумевает, что на спутнике установлены датчики угловых скоростей и ориентации, по измерениям которых формируется закон управления.

Рассмотрим систему (1.2), (3.2), (3.3). Параметр ξ возьмем настолько большим, чтобы характерное время действия на спутник управляющего момента было существенно меньше аналогичного времени для гравитационного и аэродинамического моментов. Если двумя последними моментами и отличим орбиты от круговой пренебречь, то эту систему, линеаризовав ее по $\boldsymbol{\theta}$, можно привести к виду

$$\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2} + 2\xi \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \xi^2 \boldsymbol{\theta} = 0,$$

поскольку при $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$ справедливо соотношение $\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2 \approx \dot{\boldsymbol{\theta}}$. Выписанное векторное уравнение асимптотически устойчиво. Следовательно, согласно теореме об устойчивости установившихся движений при постоянно действующих возмущениях [11], можно ожидать, что асимптотически устойчивым будет и режим орбитальной ориентации. При подходящем выборе параметра ξ возмущенное движение спутника в окрестности положения, задаваемого кватернионом Q_0 , будет затухать за требуемое время.

Закон управления (3.3) в общем случае обеспечивает поддержание режима ориентации, но не обеспечивает малую скорость возрастания величины $|\mathbf{H}|$. Чтобы уменьшить эту скорость, следует специальным образом выбирать кватернион ориентации Q_0 . Например, можно взять усредненный кватернион

$$Q_0 = \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, \quad \Psi = \int_0^T Q_A(t) dt,$$

где $Q_A(t)$ – экстремаль функционала Φ' , $\|\cdot\|$ – норма кватерниона. Такой выбор можно пояснить следующим образом. Выписанное Q_0 доставляет минимум функционалу

$$P = \int_0^T \|Q_0 - Q_A(t)\|^2 dt, \quad (3.4)$$

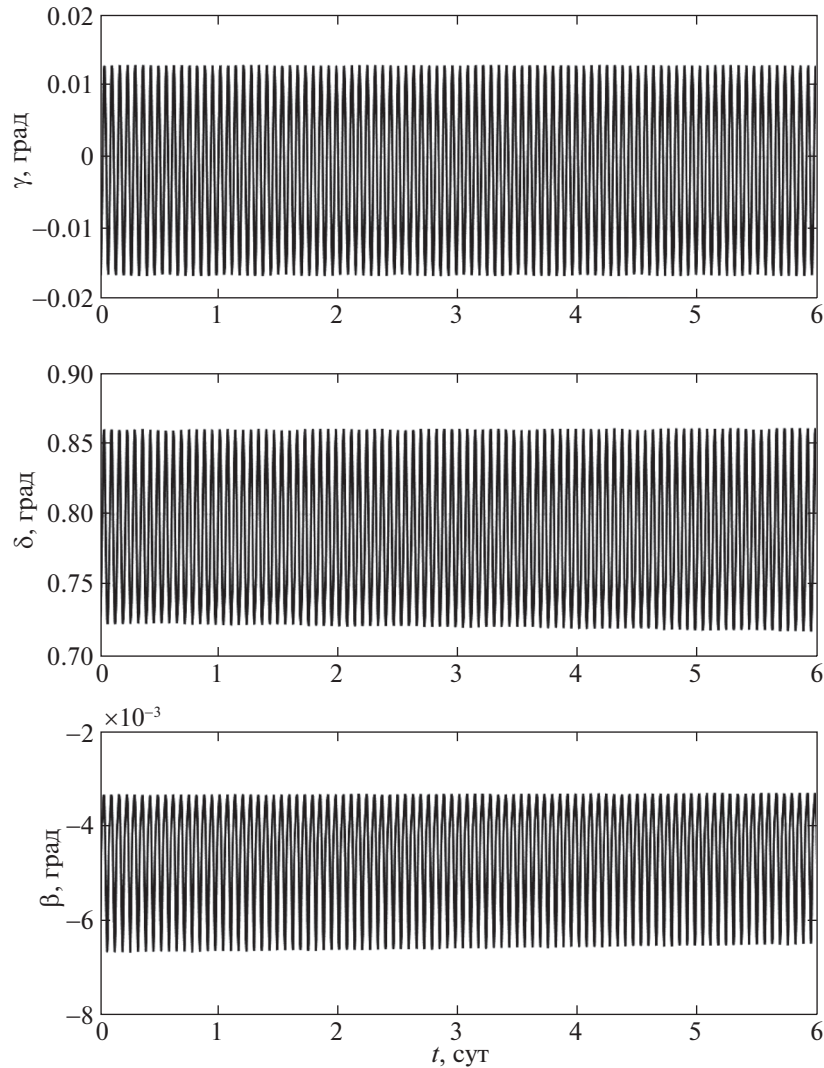


Рис. 2. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (3.3) при специальном выборе Q_0

при $Q_A \approx Q_0$ с использованием вектора бесконечно малого поворота θ выражение (3.4) можно представить в виде

$$P \approx \frac{1}{4} \int_0^T |\theta(t)|^2 dt.$$

Отсюда следует, что минимизация P означает минимизацию возмущенного движения. По смыслу этот функционал близок функционалу (2.3), который приближенно можно записать как

$$\int_0^T |\dot{\theta}(t)|^2 dt.$$

Пример использования закона (3.3) при таком выборе Q_0 приведен на рис. 2, 3. Здесь показаны решения системы (1.1), (1.2), (3.1), (3.3) при $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$ и кватернионе Q_0 , полученном усреднением кватерниона $Q_A(t)$ для режима пассивной гравитационной ориентации (см. разд. 2 и рис. 1) в случае $T = 2$ сут. Усредненные значения углов, соответствующие кватерниону Q_0 , следующие: $\gamma = -0.002^\circ$, $\delta = 0.801^\circ$, $\beta = -0.005^\circ$. Положение спутника в орбитальной системе коор-

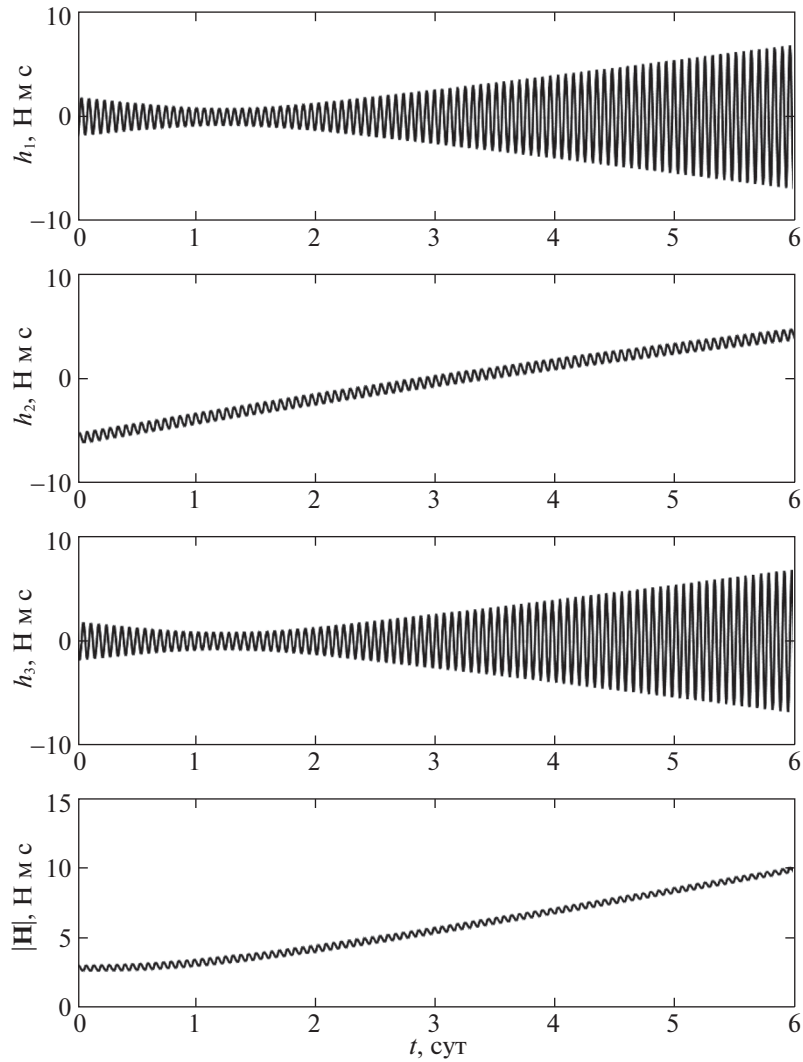


Рис. 3. Гиростатический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (3.3) при специальном выборе Q_0

динат в начальный момент времени задается этими же усредненными значениями углов γ, δ, β . Другие начальные условия решения: $\mathbf{H}(0) = 0$ и

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град/с.} \tag{3.5}$$

Начальные значения компонент угловой скорости учитывают ошибки в реализации начальных условий вращательного движения спутника. Ошибка в задании угловой скорости наиболее существенна. На рис. 2, 3 на интервалах времени 6 сут изображены графики зависимости от времени углов γ, δ, β , компонент $h_i, i = 1, 2, 3$, и модуля гиростатического момента $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок длительностью 10 мин, иллюстрирующий переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости (3.5). Колебания спутника в установившемся режиме вызваны изменением плотности атмосферы вдоль орбиты и эллиптичностью последней. Амплитуды установившихся колебаний компонент угловой скорости ограничены значениями:

$$|\omega_1| < 1 \times 10^{-4} \text{ град/с, } |\omega_2 - \omega_0| < 5 \times 10^{-4} \text{ град/с, } |\omega_3| < 3 \times 10^{-5} \text{ град/с.}$$

Следует отметить весьма медленное накопление собственного кинетического момента гиросистемы в построенном решении. Это есть следствие специального выбора кватерниона Q_0 .

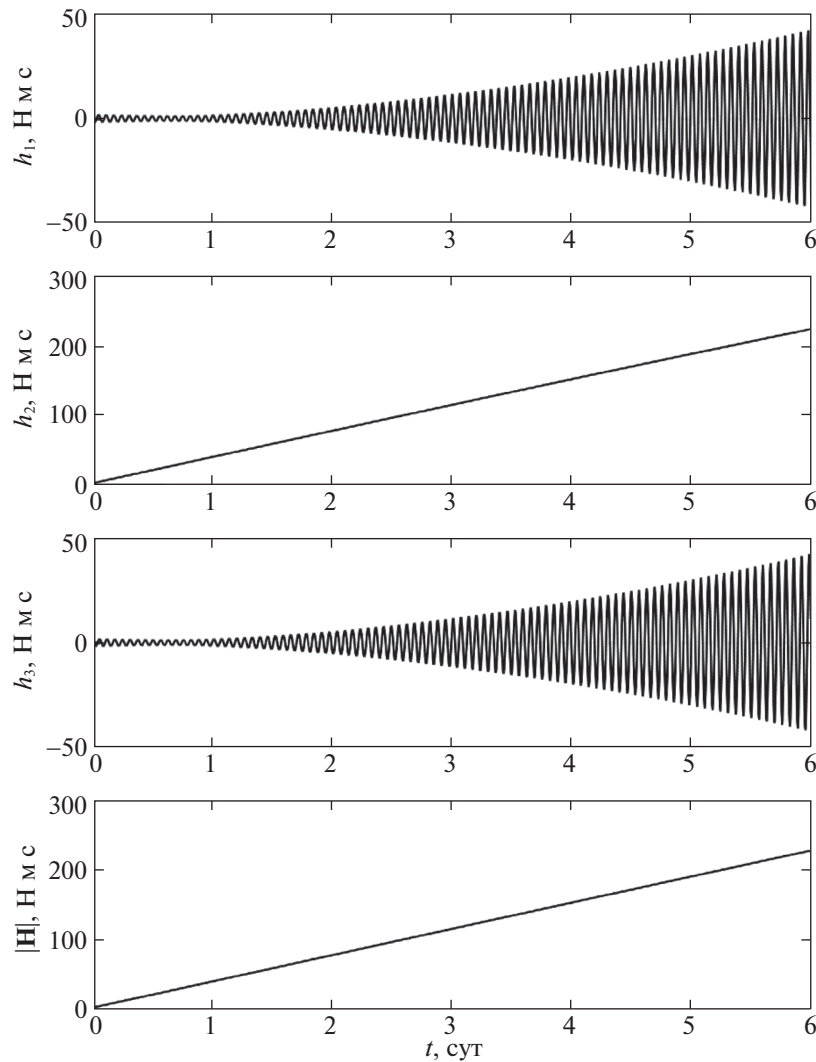


Рис. 4. Гиросtatический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (3.3) при $Q_0 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, 0)$

Для сравнения на рис. 4 приведены графики компонент h_i , $i = 1, 2, 3$, и модуля гиросtatического момента $|H|$, полученные в результате интегрирования системы (1.1), (1.2), (3.1), (3.3) с кватернионом $Q_0 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, 0)$, соответствующим положению равновесия (2.1). Интегрирование системы уравнений проводилось для начальных условий (3.5) и $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ при $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$. Сравнивая полученные результаты, видно, что использование закона управления (3.3) при специальном выборе кватерниона Q_0 позволяет уменьшить гиросtatический момент спутника, накопленный за 6 сут полета примерно в 22 раза по сравнению с гиросtatическим моментом, накопленным за аналогичное время при использовании кватерниона Q_0 , соответствующего положению равновесия (2.1). В установившемся режиме амплитуды колебаний компонент угловой скорости ω_i , $i = 1, 2, 3$, полученных с помощью специального выбора кватерниона Q_0 , практически не изменяются по сравнению с амплитудами, полученными при использовании кватерниона $Q_0 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, 0)$.

В данном случае применение специального выбора кватерниона Q_0 представляет методический интерес для оценок возможностей гиросистемы. Расчет его в реальном времени сложен хотя бы из-за необходимости учета влияния аэродинамического момента на вращательное движение спутника. Однако в использовании специального выбора кватерниона Q_0 нет необходимо-

сти. Поддержание достаточно точной орбитальной ориентации можно обеспечить без накопления гиросtatического момента [12, 13].

4. Орбитальная ориентация спутника в окрестности устойчивого положения равновесия без накопления гиросtatического момента. Сначала реализуем такую ориентацию в простейшей ситуации. Орбиту примем круговой и неизменной в абсолютном пространстве, из приложенных к спутнику внешних механических моментов будем учитывать только гравитационный. Теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс запишем в виде

$$\frac{\tilde{d}(\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 3\omega_0^2 (\mathbf{E}_3 \times \hat{I}\mathbf{E}_3). \quad (4.1)$$

Выписанные уравнения дополним уравнениями (1.2), (3.1) и выберем момент \mathbf{M}_c таким образом, чтобы полученная система имела стационарные решения, задаваемые формулами (2.1) и $\mathbf{H} = 0$. Примем простой вариант

$$\mathbf{M}_c = \hat{K}_h \mathbf{H} - \hat{K}_\omega (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2), \quad (4.2)$$

где $\hat{K}_\omega = \text{diag}(k_{\omega 1}, k_{\omega 2}, k_{\omega 3})$, $\hat{K}_h = \text{diag}(k_{h1}, k_{h2}, k_{h3})$, $k_{\omega i}, k_{hi}, i = 1, 2, 3$, – постоянные величины. Исследуем его устойчивость для стационарного решения (2.1) и $\mathbf{H} = 0$. Система (1.2), (3.1), (4.1), (4.2), линеаризованная в окрестности этого решения, разбивается на две независимых подсистемы:

$$\begin{cases} I_2 \dot{\omega}_2 = -k_{\omega 2}(\omega_2 - \omega_0) + 3\omega_0^2(I_1 - I_3)\delta + k_{h2}h_2, \\ \dot{\delta} = \omega_2 - \omega_0, \quad \dot{h}_2 = k_{\omega 2}(\omega_2 - \omega_0) - k_{h2}h_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = -k_{\omega 1}\omega_1 + \omega_0(I_2 - I_3)\omega_3 + k_{h1}h_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_0(I_1 - I_2)\omega_1 - k_{\omega 3}\omega_3 + 3\omega_0^2(I_1 - I_2)\beta + k_{h3}h_3, \\ \dot{\gamma} = \omega_1 - \omega_0\beta, \quad \dot{\beta} = \omega_3 + \omega_0\gamma, \\ \dot{h}_1 = k_{\omega 1}\omega_1 - k_{h1}h_1 - \omega_0h_3, \quad \dot{h}_3 = k_{\omega 3}\omega_3 + \omega_0h_1 - k_{h3}h_3. \end{cases} \quad (4.4)$$

Значения коэффициентов $k_{\omega i}, k_{hi}$ выберем таким образом, чтобы корни характеристического полинома системы уравнений (4.3), (4.4) лежали в левой полуплоскости комплексного переменного достаточно далеко от мнимой оси. Точнее, критерием качества закона управления (4.2) будем считать степень устойчивости системы уравнений (4.3), (4.4) – взятую с обратным знаком действительную часть самого правого корня ее характеристического полинома. В данном случае этот полином разделяется на полиномы третьего и шестого порядков, являющиеся характеристическими полиномами подсистем (4.3) и (4.4) соответственно.

Полином третьего порядка зависит только от коэффициентов k_{h2} и $k_{\omega 2}$. Выберем их так, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень $-\alpha$, где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получаем

$$k_{h2} = \frac{\alpha}{3}, \quad k_{\omega 2} = \frac{8}{3}I_2\alpha, \quad \alpha = \omega_0 \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}.$$

Из приведенных соотношений видно, что максимальная степень устойчивости подсистемы (4.3) определяется только моментами инерции спутника и высотой его орбиты. Для рассматриваемого спутника $\omega_0 = 1.125 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 9.73 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_{h2} = 3.24 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_{\omega 2} = 28.75 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Полином шестого порядка содержит только коэффициенты $k_{h1}, k_{h3}, k_{\omega 1}$ и $k_{\omega 3}$. Примем их значения $k_{h1} = 3.00 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_{\omega 1} = 78.00 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_{h3} = 3.00 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_{\omega 3} = 26.16 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Корни полинома при этом равны

$$\begin{aligned} & -3.25 \times 10^{-4} \pm 1.01 \times 10^{-3}i \text{ с}^{-1}, \quad -3.28 \times 10^{-4} \pm 1.42 \times 10^{-3}i \text{ с}^{-1}, \\ & -1.40 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad -0.03 \text{ с}^{-1}, \end{aligned}$$

здесь i – мнимая единица. Соответственно степень устойчивости системы (4.4) $\alpha = 3.25 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, закон управления (4.2) с указанными значениями параметров $k_{hi}, k_{\omega i}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарного решения (2.3) и $\mathbf{H} = 0$ системы (1.2), (3.2),

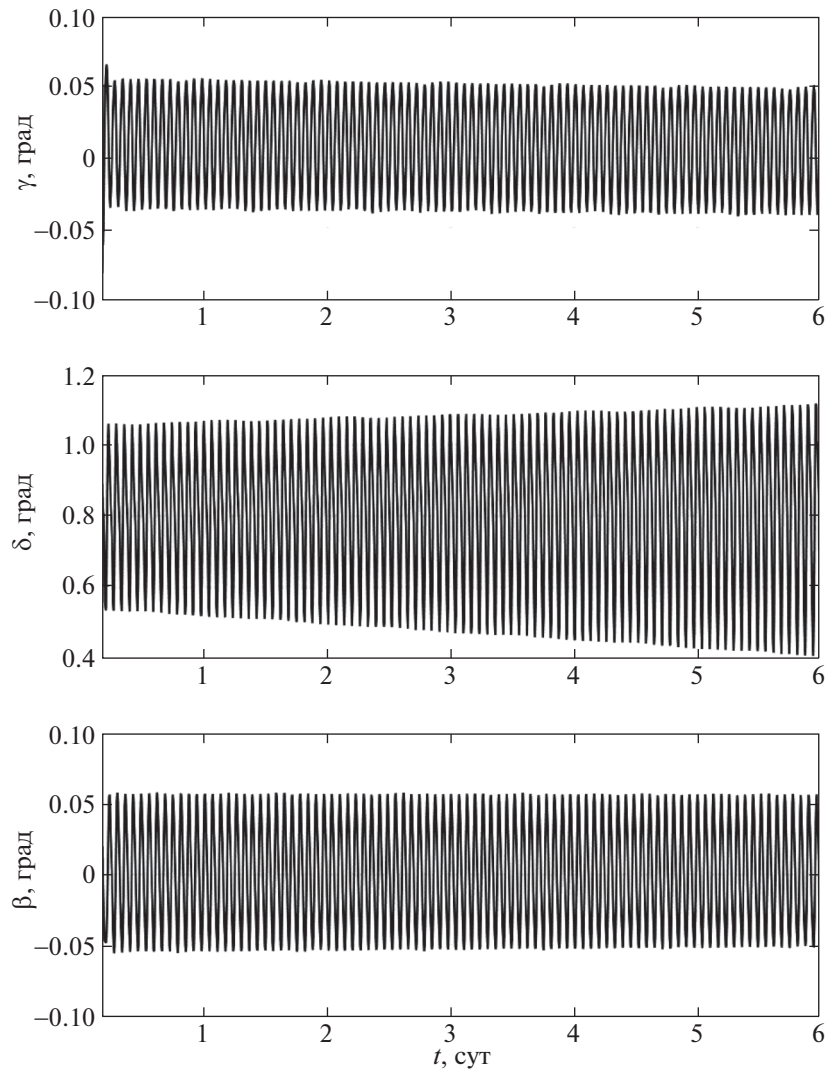


Рис. 5. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (4.2)

(4.1), (4.2). Пример использования этого закона в более сложном случае системы (1.1), (1.2), (3.1), (4.2) приведен на рис. 5, 6. Здесь показаны решения системы с начальными условиями (3.5) и $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ на интервале времени 6 сут. На рисунках изображены графики зависимости от времени углов γ , δ , β , компонент h_i , $i = 1, 2, 3$, и модуля гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок длительностью 4 ч, иллюстрирующий переходный процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости (3.5). Результаты расчетов показывают, что закон управления (4.2) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию спутника и гиросtatический момент при этом остается ограниченным. В установившемся режиме амплитуды колебаний компонент угловой скорости ограничены следующими значениями:

$$|\omega_1| < 2.5 \times 10^{-5} \text{ град/с}, \quad |\omega_2 - \omega_0| < 1.5 \times 10^{-3} \text{ град/с}, \quad |\omega_3| < 1 \times 10^{-4} \text{ град/с}.$$

На рис. 5 видимое увеличение амплитуды колебаний, а также постоянное смещение угла $\delta \approx 0.8^\circ$ вызваны сопротивлением атмосферы, зависящим от положения Солнца относительно плоскости орбиты спутника. Это положение меняется из-за прецессии плоскости орбиты с угловой скоростью ~ 5 град/с. За период времени, равный примерно 70 сут, величина постоянного смещения угла δ практически не меняется, амплитуда колебаний меняется в диапазоне от 0.1 до 0.7° , при этом максимальное значение угла δ не превышает 1.5° [14].

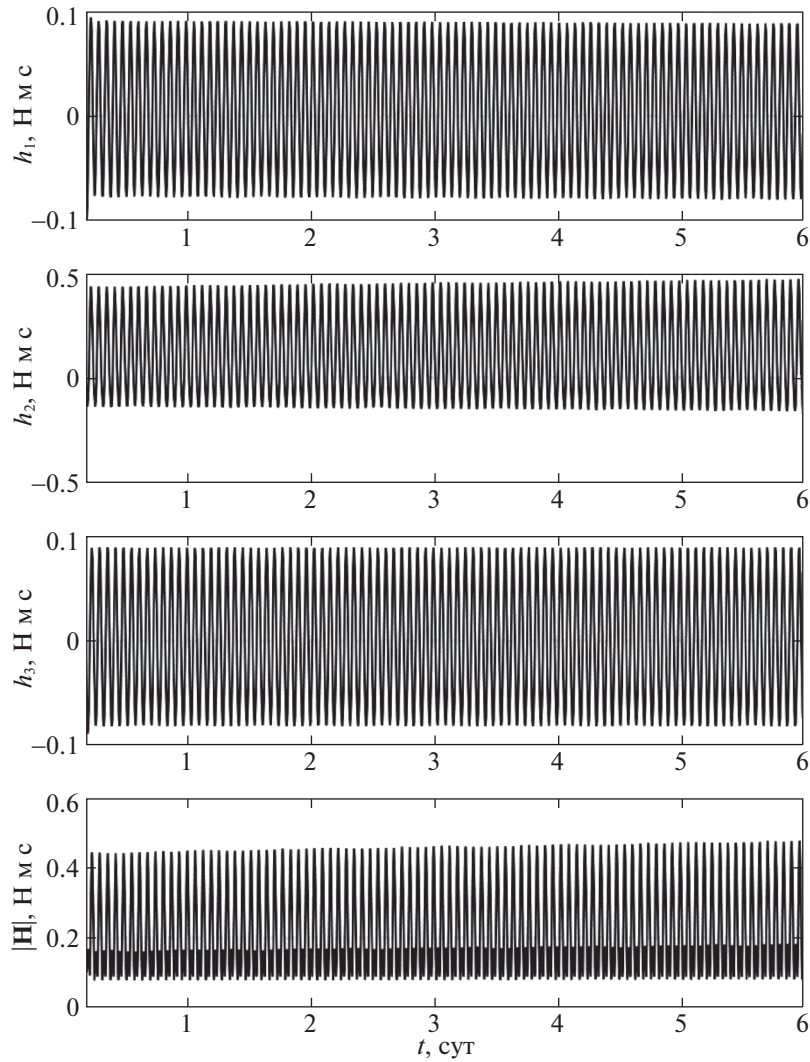


Рис. 6. Гиросtatический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (4.2)

Достоинством закона управления (4.2) (и похожих законов в [1, 15]) является сравнительная простота – для его реализации не нужна информация об ориентации спутника. Недостатки закона (4.2): он поддерживает орбитальную ориентацию только в окрестности устойчивого положения равновесия; характеризующая этот закон степень устойчивости ограничена. Последний недостаток можно устранить, введя в (4.2) слагаемое $\hat{K}_a \theta$ с подходящей матрицей $\hat{K}_a = \text{diag}(k_{a1}, k_{a2}, k_{a3})$. Способ выбора этой матрицы аналогичен способу, рассмотренному далее в разд. 5.

5. Орбитальная ориентации спутника в окрестности неустойчивого положения равновесия без накопления гиросtatического момента. Закон управления гиросtatическим моментом возьмем в виде

$$M_c = \hat{K}_a \theta - \hat{K}_\omega (\omega - \omega_0 E_2) + \hat{K}_h H, \tag{5.1}$$

где матрицы \hat{K}_a , \hat{K}_ω и \hat{K}_h имеют вид и смысл, указанный в разд. 4. В данном случае в формуле, определяющей вектор θ , кватернион $Q_0 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0, 0)$. Стабилизируемое положение соответствует положению (2.2). Сначала рассмотрим закон (5.1) в упрощенной ситуации: орбиту спутника считаем круговой и неизменной в абсолютном пространстве, из приложенных к спутнику внешних механических моментов учитываем только гравитационный. Систему уравнений вращательного движения спутника запишем в виде (1.2), (3.1), (4.1), (5.1). Эта система имеет ста-

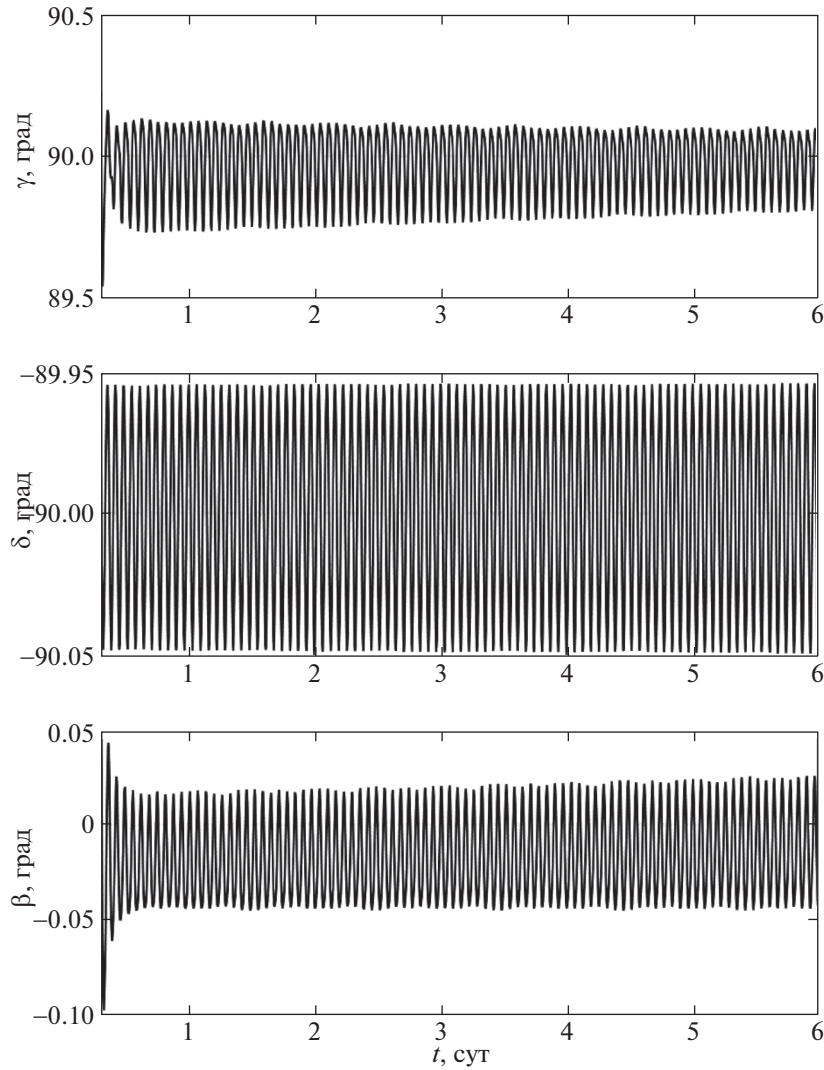


Рис. 7. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (5.1)

ционарное решение, задаваемое соотношениями (2.2) и $\mathbf{H} = 0$. Матрицы \hat{K}_a , \hat{K}_ω и \hat{K}_h выберем так, чтобы это решение было асимптотически устойчивым и характеризовалось достаточно большой степенью устойчивости. Линеаризуем систему уравнений (1.2), (3.1), (4.1), (5.1) в его окрестности. Обозначим $\Delta\delta = \delta + \pi/2$, $\Delta\gamma = \gamma - \pi/2$. Вектор $\boldsymbol{\theta} = (\Delta\gamma, \beta, \Delta\delta)^\top$. Линеаризованная система разбивается на две независимых подсистемы:

$$\begin{cases} I_3 \dot{\omega}_3 = -k_{\omega 3}(\omega_3 + \omega_0) + [3\omega_0^2(I_1 - I_2) + k_{a3}]\Delta\delta + k_{h3}h_3, \\ \Delta\dot{\delta} = -(\omega_3 + \omega_0), \quad \dot{h}_3 = k_{\omega 3}(\omega_3 + \omega_0) - k_{a3}\Delta\delta - k_{h3}h_3; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = -k_{\omega 1}\omega_1 + \omega_0(I_3 - I_2)\omega_2 + [3\omega_0^2(I_2 - I_3) + k_{a1}]\Delta\gamma + k_{\omega 1}\omega_0\beta + k_{h1}h_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_0(I_1 - I_3)\omega_1 - k_{\omega 2}\omega_2 - k_{\omega 2}\omega_0\Delta\gamma + k_{a2}\beta + k_{h2}h_2, \\ \Delta\dot{\gamma} = \omega_1 - \omega_0\beta, \quad \dot{\beta} = \omega_2 + \omega_0\Delta\gamma, \\ \dot{h}_1 = k_{\omega 1}\omega_1 - k_{a1}\Delta\gamma - k_{\omega 1}\omega_0\beta - k_{h1}h_1 - \omega_0h_2, \\ \dot{h}_2 = k_{\omega 2}\omega_2 + k_{\omega 2}\omega_0\Delta\gamma - k_{a2}\beta + \omega_0h_1 - k_{h2}h_2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Значения коэффициентов $k_{\omega i}$, $k_{a i}$, $k_{h i}$ выберем так, чтобы степень устойчивости каждой из них была достаточно большой. Характеристический полином подсистемы (5.2) имеет третий порядок.

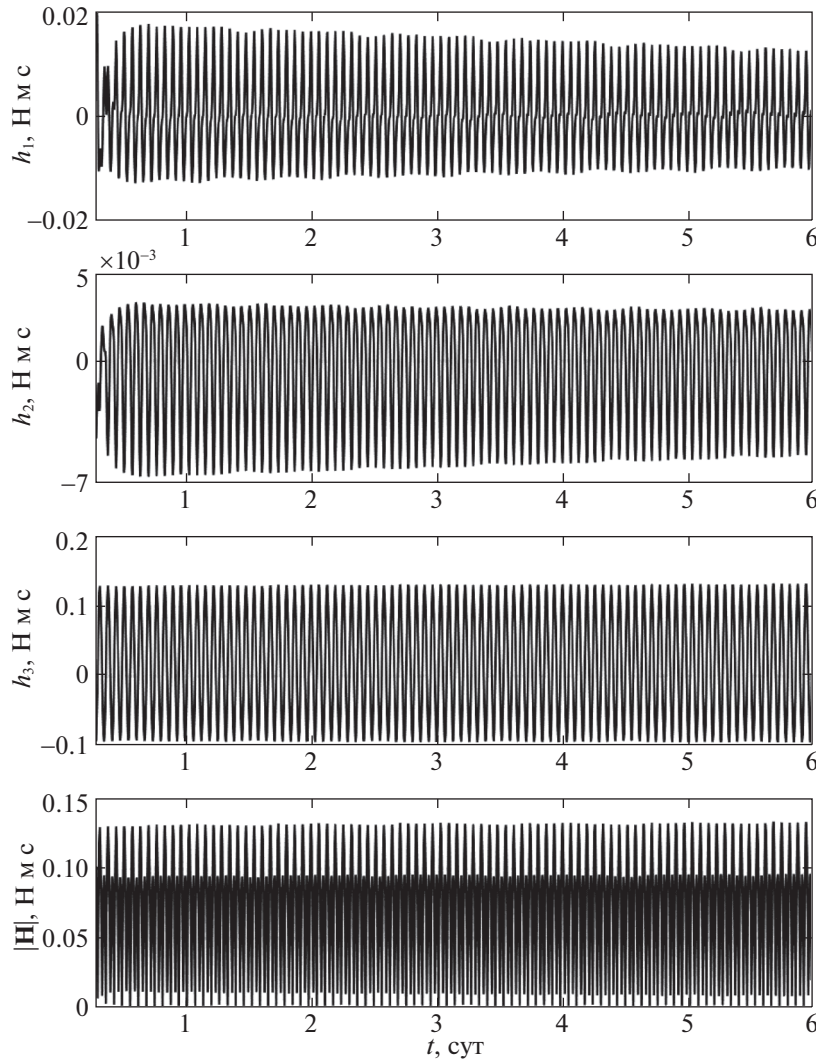


Рис. 8. Гиросtatический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (3.1), (5.1)

Потребуем, чтобы он имел действительный корень кратности 3. Отсюда находим коэффициенты k_{a3} , $k_{\omega3}$ и k_{h3} :

$$k_{h3} = \frac{\alpha^3 I_3}{3\omega_0^2 (I_1 - I_2)}, \quad k_{\omega3} = I_3 (3\alpha - k_{h3}), \quad k_{a3} = 3[I_3 \alpha^2 - \omega_0^2 (I_1 - I_2)],$$

где α – степень устойчивости этого полинома. В данном случае значение α можно задать. Примем $\alpha = 5.30 \times 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, тогда $k_{h3} = -0.05 \text{ c}^{-1}$, $k_{\omega3} = 721.26 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_{a3} = 0.95 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Подсистема (5.3) имеет порядок 6. Вычисляя характеристические числа ее матрицы, примем следующие значения коэффициентов: $k_{h1} = -0.1 \text{ c}^{-1}$, $k_{\omega1} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_{a1} = -0.11 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $k_{h2} = 0.05 \text{ c}^{-1}$, $k_{\omega2} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_{a2} = -0.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Характеристические числа при этом равны:

$$\begin{aligned} & -2.01 \times 10^{-4} \pm 1.13 \times 10^{-3} i \text{ c}^{-1}, \quad -8.85 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}, \quad -2.21 \times 10^{-3} \text{ c}^{-1}, \\ & -0.012 \text{ c}^{-1}, \quad -0.077 \text{ c}^{-1}, \end{aligned}$$

степень устойчивости системы (5.3) $\alpha = 2.01 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$.

Выбранный закон изменения кинетического момента гиросистемы обеспечивает трехосную орбитальную ориентацию спутника в окрестности положения (2.2). С этой целью вычислим решение системы (1.1), (1.2), (3.1), (5.1). Решения этой системы с начальными условиями $\gamma(0) = -\delta(0) = 90^\circ$, $\beta(0) = 0$, $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ и $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) + \omega_0 = 0.01 \text{ град/с}$ на интервале времени 6 сут представлены на рис. 7 графиками зависимости от времени углов γ , δ , β .

На рис. 8 изображены графики зависимости от времени углов компонент h_i , $i = 1, 2, 3$, и модуля гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок, длительностью 7 ч, иллюстрирующий переходной процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Как и в предыдущих примерах, представленные здесь установившиеся колебания вызваны изменением плотности атмосферы и эллиптичностью орбиты. Амплитуды установившихся колебаний компонент угловой скорости ограничены значениями:

$$|\omega_1| < 3 \times 10^{-4} \text{ град/с}, \quad |\omega_2| < 3 \times 10^{-4} \text{ град/с}, \quad |\omega_3 + \omega_0| < 5 \times 10^{-4} \text{ град/с}.$$

Результаты моделирования показали, что закон управления (5.1) обеспечивает достаточно точную стабилизацию спутника в окрестности неустойчивого положения равновесия (2.2), при этом собственный кинетический момент гиросистемы близок к нулю и практически не увеличивается на всем отрезке времени моделирования.

Заключение. В данной работе исследованы простые законы управления гиросtatическим моментом, позволяющие без его накопления поддерживать длительную и достаточно точную ориентацию спутника в окрестности гравитационно устойчивых и неустойчивых положений покоя. Для линеаризованной системы уравнений движения спутника получены аналитические зависимости, позволяющие вычислить параметры рассмотренных законов управления. Приведены результаты математического моделирования полной системы уравнений движения спутника, подтверждающие, что предложенные законы управления обеспечивают требуемую ориентацию спутника без накопления гиросtatического момента. Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования систем управления ориентацией спутника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Космич. исслед. 2012. Т. 50. № 5. С. 380–393.
2. *Латышев Л.А., Штырлин А.Ф., Непейвода О.М., Сазонов В.В.* Использование электроракетных двигателей для реализации режима движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. № 16.
3. *Абрашкин В.И., Пузин Ю.А., Сазонов В.В.* Электромагнитная система управления вращательным движением спутника, обеспечивающая малый уровень микроускорений на его борту // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 22.
4. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. № 28.
5. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 13.
6. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
7. *Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др.* Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса “Салют-6”–“Союз”–“Прогресс”. М.: Наука, 1985.
8. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
9. *Герман А.Д., Гутник С.А., Сарычев В.А.* Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 1. С. 128–140.
10. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
12. *Vadali S.R., Oh H.-S.* Space Station Attitude Control and Momentum Management: A Nonlinear Look // Guidance, Control and Dynamics. 1992. V. 15. № 3. P. 577–586.
13. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата с одновременной разгрузкой кинетического момента инерционных исполнительных органов // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 4. С. 124–131.
14. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Стабилизация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2018. № 2.
15. *Сазонов В.В.* Гравитационная ориентация искусственных спутников с гиродинами // Космич. исслед. 1988. Т. 26. № 2. С. 315–317.