ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, № 1, с. 11–22

УСТОЙЧИВОСТЬ

УДК 531.36

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

© 2020 г. В. И. Слынько[a,*], Дж. Тундж[b,], С. Эрдур[b,***]**

[a] *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина*

[b] *Университет Ван Йузунджу Йыл, Ван, Турция*

**e-mail: vitstab@ukr.net*

***e-mail: cemtunc@yahoo.com*

****e-mail: serdur82@gmail.com*

Поступила в редакцию 22.02.2018 г.
После доработки 20.04.2019 г.
Принята к публикации 22.07.2019 г.

Рассматривается класс линейных периодических импульсных систем с запаздыванием. Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости для систем этого класса, которые сводят исследование устойчивости исходной системы к аналогичной задаче для системы линейных импульсных дифференциальных уравнений (без запаздывания). Этот вспомогательный результат используется для исследования интервальной устойчивости линейной импульсной системы с запаздыванием при общих предположениях о динамических свойствах непрерывных и дискретных компонент. Для иллюстрации эффективности полученных результатов приведены примеры.

DOI: 10.31857/S0002338819060143

Введение. Управляемые системы, фазовый вектор которых может претерпевать мгновенные изменения в некоторые фиксированные моменты времени, возникают в различных моделях робототехники, механики и биологии. Совершенно естественным предположением для этого класса систем является наличие последействия в функциях обратной связи. Проблема устойчивости положений равновесия для этого класса моделей управляемых систем приводит к математической задаче об устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и запаздыванием. В [1–4] рассмотрены различные проблемы теории устойчивости для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Вопросы теории устойчивости для импульсных дифференциальных уравнений изучались в [5–11]. В монографии [12] приведены общие теоремы устойчивости для функционально-дифференциальных уравнений с импульсным действием.

Проблема построения функций Ляпунова или функционалов Ляпунова–Красовского для линейных импульсных систем с запаздыванием рассматривалась в [13–15]. В [13] предложен метод построения кусочно-непрерывных неавтономных функций Ляпунова–Разумихина, в [14] – подход для построения кусочно-непрерывных функционалов Ляпунова–Красовского. Основа этого подхода – идея дискретизации. В [15] разработана идея метода функционалов Ляпунова–Красовского и специальных функционалов (looped functional) для линейных импульсных систем с запаздыванием.

Однако все эти работы посвящены исследованию линейных импульсных систем с запаздыванием, имеющих постоянные коэффициенты. Проблема устойчивости линейных импульсных систем с запаздыванием, имеющих переменные коэффициенты, мало изучена. В [16, 17] получены необходимые и достаточные условия устойчивости для некоторых классов линейных импульсных систем с запаздыванием, имеющих постоянные параметры.

[1] Исследование было завершено при поддержке Совета по научным и технологическим исследованиям Турции (2221 – стипендии для ученых – 2221–2017/2 период), когда Виталий Слынько был приглашенным ученым Университета Ван Йузунджу Йыл, г. Ван, Турция. Работа также была частично поддержана МОНУ (проект № 0116U004691).

Следует отметить, что для инженерных приложений важен не только факт устойчивости, но и оценка малых вариаций параметров системы, для которых сохраняется устойчивость состояния равновесия. Проблема интервальной устойчивости для различных классов линейных систем была предметом исследований во многих публикациях, начиная с известной работы В.Л. Харитонова [18]. Интервальная устойчивость линейных импульсных систем изучалась в [19–21].

Целью настоящей работы является изучение интервальной устойчивости линейных периодических импульсных систем с запаздыванием в предположении, что величина запаздывания совпадает с периодом импульсного воздействия.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 представлены вспомогательные результаты об устойчивости линейных импульсных систем с запаздыванием, необходимые для получения достаточных условий интервальной устойчивости. В частности, проблема асимптотической устойчивости импульсной системы с запаздыванием сведена к исследованию асимптотической устойчивости линейных импульсных систем (без запаздывания), принадлежащих однопараметрическому семейству, которое зависит от комплексного параметра. В разд. 2 дается определение интервальной устойчивости и некоторая дополнительная информация об оценке норм матриц возмущений. В разд. 3 приведены основные результаты об интервальной устойчивости. Доказательства теорем основаны на идеях прямого метода Ляпунова и на оценках решений вспомогательных линейных импульсных систем, принадлежащих однопараметрическому семейству. Представлены некоторые примеры, иллюстрирующие основные результаты работы.

1. Вспомогательные результаты. Рассмотрим линейную периодическую импульсную систему с запаздыванием

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\theta), \quad t \neq k\theta, \quad t \geq \theta, \\ \Delta x(t) = Cx(t), \quad t = k\theta,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\frac{d}{dt}x(t)$ – правая производная функции $x(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times n})$, $k \in Z$, $\theta > 0$ – период системы (1.1), $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$ – скачок функции $x(t)$, $x(t+0) = \lim\limits_{s\to t, s>t} x(s)$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, причем $I + C$ – невырожденная матрица, I – единичная матрица, $A(t+\theta) = A(t)$, $B(t+\theta) = B(t)$. Пусть $x(t,\varphi_0)$, $\varphi_0 \in C[0,\theta]$ – решение линейной системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t,\varphi_0) = \varphi_0(t)$ для всех $t \in [0,\theta]$. Как обычно, решение $x(t,\varphi_0)$ предполагается непрерывным слева, т.е. $x(t-0,\varphi_0) = x(t,\varphi_0)$. Отметим, что решения рассматриваемой линейной импульсной системы (1.1) являются инвариантными относительно группы сдвигов $\theta\mathbb{Z}$.

Изучим задачу об асимптотической устойчивости линейной импульсной периодической системы (1.1). Наряду с системой (1.1) рассмотрим линейное матричное дифференциальное уравнение, зависящее от комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\frac{dW_s^t(\lambda)}{dt} = (A(t) + \lambda^{-1}B(t))W_s^t(\lambda), \quad W_s^s(\lambda) = I, \tag{1.2}$$

и линейное матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Omega_s^t}{dt} = A(t)\Omega_s^t, \quad \Omega_s^s = I.$$

Следующее утверждение позволяет установить необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы (1.2).

Л е м м а 1. Линейная периодическая импульсная дифференциальная система с запаздыванием (1.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда корни характеристического уравнения

$$\det((I + C)W_0^\theta(\lambda) - \lambda I) = 0 \tag{1.3}$$

удовлетворяют неравенству $|\lambda| < 1$.

Доказательство леммы 1 основано на анализе спектра вполне непрерывного отображения Пуанкаре $T : C[0,\theta] \to C[0,\theta]$, которое определяется формулой

$$(T\varphi)(t) = \Omega_0^t (I + C)\varphi(\theta) + \int_0^t \Omega_s^t B(s)\varphi(s)ds.$$

Можно показать, что линейный оператор T вполне непрерывен [22]. Хорошо известно, что непрерывный и остаточный спектр такого оператора либо пуст, либо в объединении дает одноточечное множество $\{0\}$. Ненулевые точки спектра оператора T являются корнями уравнения (1.3). В этом случае условие $r_\sigma(T) < 1$ ($r_\sigma(T)$ – спектральный радиус линейного оператора T) – необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости линейной периодической импульсной системы (1.1) [23].

Заметим, что при постоянных матрицах $A(t)$ и $B(t)$ результат леммы 1 получен в статье [16].

О п р е д е л е н и е 1. Линейная периодическая импульсная система (1.1) называется асимптотически устойчивой в смысле Ляпунова, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из неравенства $\|\varphi_0\|_{C[0,\theta]} < \delta$ следует, что $\|x(t,\varphi_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \ge \theta$ и

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,\varphi_0)\| = 0.$$

Здесь $\|\varphi_0\|_{C[0,\theta]} = \max_{t\in[0,\theta]} \|\varphi_0(t)\|$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что прямое применение леммы 1 для исследования устойчивости системы (1.1) очень сложно, даже если матрицы $A(t)$ и $B(t)$ не зависят явно от t, так как характеристическое уравнение (1.3) является трансцендентным уравнением, проблема локализации корней для которой является достаточно сложной самостоятельной задачей [24, 25].

В общем случае, ситуация осложняется необходимостью вычисления матрицы монодромии $W_0^\theta(\lambda)$. Однако утверждение леммы 1 позволяет сформулировать более грубое достаточное условие асимптотической устойчивости, которое легко проверяется.

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных систем импульсных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= (A(t) + zB(t))y(t), \quad t \ne k\theta, \\ \Delta y(t) &= Cy(t), \quad t = k\theta, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $y \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le 1$ – комплексный параметр, $\Delta y(t) = y(t + 0) - y(t)$.

Л е м м а 2. Если линейная импульсная система (1.4) асимптотически устойчива для всех z, $|z| \le 1$, то линейная периодическая импульсная система с запаздыванием (1.1) асимптотически устойчива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, напротив, что уравнение (1.3) имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $|\lambda_0| > 1$. Тогда λ_0 является мультипликатором (собственным значением) матрицы монодромии системы (1.4) для $z = \lambda_0^{-1}$, что противоречит асимптотической устойчивости системы (1.4). Это противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 2 сводит задачу об устойчивости линейной периодической импульсной системы с запаздыванием (1.1) к исследованию устойчивости семейства линейных импульсных систем (1.4) (без запаздывания).

Л е м м а 3. Предположим, что для линейной импульсной периодической системы (1.1) справедливо неравенство

$$\ln\left\|(I + C)\Omega_0^\theta\right\| + \int_0^\theta \left\|\Omega_\tau^0 B(\tau)\Omega_0^\tau\right\| d\tau < 0. \tag{1.5}$$

Тогда линейная импульсная периодическая система (1.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Представим решение $y(t,z)$, $y(0,z) = y_0$ задачи Коши (1.4) в интегральной форме

$$y(t,z) = \Omega_0^t y_0 + z\int_0^t \Omega_s^t B(s) y(s,z) ds, \quad t \in [0,\theta]. \tag{1.6}$$

Следовательно, с учетом свойств матрицанта Ω_s^t, получим

$$\Omega_t^0 y(t,z) = y_0 + z\int_0^t \Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s \Omega_s^0 y(s,z) ds, \quad t \in [0,\theta].$$

Поэтому

$$\left\|\Omega_t^0 y(t,z)\right\| \le \|y_0\| + \int_0^t \left\|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\right\| \left\|\Omega_s^0 y(s,z)\right\| ds, \quad t \in [0,\theta].$$

Применяя неравенство Гронуолла–Беллмана, получим

$$\left\|\Omega_t^0 y(t,z)\right\| \le \|y_0\| \exp\left(\int_0^t \left\|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\right\| ds\right), \quad t \in [0,\theta].$$

Таким образом,

$$y(\theta+0,z) = (I+C)y(\theta,z) = (I+C)\Omega_0^\theta y_0 + z(I+C)\int_0^\theta \Omega_s^\theta B(s) y(s,z) ds =$$

$$= (I+C)\Omega_0^\theta \left(y_0 + z\int_0^\theta \Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s \Omega_s^0 y(s,z) ds\right).$$

Наконец, можно получить

$$\|y(\theta+0,z)\| \le \left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \left(\|y_0\| + \int_0^\theta \left\|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\right\| \left\|\Omega_s^0 y(s,z)\right\| ds\right) \le$$

$$\le \left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \left(1 + \int_0^\theta \left\|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\right\| \exp\left(\int_0^s \left\|\Omega_\tau^0 B(\tau)\Omega_0^\tau\right\| d\tau\right) ds\right) \|y_0\| =$$

$$= \left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \exp\left(\int_0^\theta \left\|\Omega_\tau^0 B(\tau)\Omega_0^\tau\right\| d\tau\right) \|y_0\|.$$

Отсюда следует асимптотическая устойчивость линейных импульсных систем (1.4). Доказательство леммы 3 завершено.

Напомним понятие и свойства логарифмической матричной меры.

Логарифмическая матричная мера $\Lambda(A)$ матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется следующим образом [23]:

$$\Lambda(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\|I + \varepsilon A\| - 1}{\varepsilon}.$$

Ясно, что

$$\Lambda(\alpha A) = \alpha\Lambda(A), \quad \text{если} \quad \alpha \ge 0, \quad |\Lambda(A)| \le \|A\|,$$
$$\Lambda(A+B) \le \Lambda(A) + \Lambda(B), \quad |\Lambda(A) - \Lambda(B)| \le \|A - B\|.$$

Однако логарифмическая операторная мера $\Lambda(A)$ не является нормой, потому что она может быть отрицательной. Для этой меры справедлива оценка

$$e^{\Lambda(-A)} \le \left\|e^A\right\| \le e^{\Lambda(A)}.$$

Л е м м а 4. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда

$$\left\| e^{A+X} - e^{A} \right\| \le e^{\Lambda(A)}(e^{\|X\|} - 1).$$

Доказательство леммы 4 основано на неравенстве Гронуолла–Беллмана.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $r_\sigma(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\|\cdot\|$ спектр, спектральный радиус, минимальные, максимальные собственные значения и спектральную норму матрицы соответственно.

Пусть P и R – симметрические матрицы, причем матрица P положительно определена, тогда

$$\Lambda^*(R,P) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\min}(R)}{\lambda_{\max}(P)}, & \lambda_{\min}(R) \ge 0, \\ \dfrac{\lambda_{\min}(R)}{\lambda_{\min}(P)}, & \lambda_{\min}(R) < 0. \end{cases}$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную импульсную периодическую систему с запаздыванием и постоянной матрицей A:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + B(t)x(t-\theta), \quad t \ne k\theta, \\ \Delta x(t) = Cx(t), \quad t = k\theta, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times n})$ и $I + C$ – невырожденная матрица, $B(t+\theta) = B(t)$, $\theta > 0$.

Предположим, что матрицы A и C – интервальные матрицы, т.е.

$$A_* \le A \le A^*, \quad C_* \le C \le C^*,$$

где $A_*, A^*, C_*, C^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$, неравенство между матрицами понимается поэлементно и обозначим $A \in [A_*, A^*]$, $C \in [C_*, C^*]$.

О п р е д е л е н и е 2 [26]. Линейная система (2.1) называется интервально устойчивой, если для любых матриц $A \in [A_*, A^*]$ и $C \in [C_*, C^*]$ линейная система (2.1) является асимптотически устойчивой по Ляпунову.

Определим матрицы

$$A_0 = \frac{1}{2}(A_* + A^*), \quad C_0 = \frac{1}{2}(C_* + C^*).$$

Предположим, что матрица $I + C_0$ невырождена.

Представим линейную периодическую импульсную систему (2.1) в виде

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}x(t) = (A_0 + \Delta A)x(t) + B(t)x(t-\theta), \quad t \ne k\theta, \\ \Delta x(t) = (C_0 + \Delta C)x(t), \quad t = k\theta, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\Delta A = A - A_0$, $\Delta C = C - C_0$.

Ниже опишем метод оценки матриц возмущений, более подробное изложение которого и явный вид матриц E_A, E_C, F_A, F_C можно найти в [19]. Этот метод основан на представлении матриц ΔA и ΔC в виде

$$\Delta A = E_A \Sigma_A F_A, \quad \Delta C = E_C \Sigma_C F_C,$$

где

$$\Sigma_A, \Sigma_C \in \Sigma^* = \{\Sigma \in R^{n^2\times n^2} : \Sigma = \operatorname{diag}\{\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{n^2n^2}\}, |\varepsilon_{kk}| \le 1;\ k = \overline{1, n^2}\},$$
$$\Sigma_B \in \Sigma^* = \{\Sigma \in R^{n^2\times n^2} : \Sigma = \operatorname{diag}\{\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{n^2n^2}\}, |\varepsilon_{kk}| \le 1;\ k = \overline{1, n^2}\}.$$

Определим матрицы

$$S_A = E_A E_A^T = \operatorname{diag}\left\{\sum_{j=1}^{n} h_{1j}, \sum_{j=1}^{n} h_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} h_{nj}\right\} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$S_C = E_C E_C^T = \operatorname{diag}\left\{\sum_{j=1}^{n} k_{1j}, \sum_{j=1}^{n} k_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} k_{nj}\right\} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$G_A = F_A^T F_A = \operatorname{diag}\left\{\sum_{j=1}^{n} h_{j1}, \sum_{j=1}^{n} h_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} h_{jn}\right\} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$G_C = F_C^T F_C = \operatorname{diag}\left\{\sum_{j=1}^{n} k_{j1}, \sum_{j=1}^{n} k_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} k_{jn}\right\} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$H = (h_{kj})_{n\times n} = \frac{1}{2}(A^* - A_*), \quad K = (k_{kj})_{n\times n} = \frac{1}{2}(C^* - C_*).$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered} \|\Delta A\| \le \|E_A\|\|F_A\| = \|S_A\|^{1/2}\|G_A\|^{1/2} = \eta, \\ \|\Delta C\| \le \|E_C\|\|F_C\| = \|S_C\|^{1/2}\|G_C\|^{1/2} = \mu. \end{gathered} \tag{2.3}$$

3. Основные результаты. Утверждение леммы 2 позволяет свести задачу об интервальной устойчивости линейной импульсной периодической системы с запаздыванием (2.2) к исследованию асимптотической устойчивости линейной импульсной системы

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}y(t) = (A_0 + \Delta A)y(t) + zB(t)y(t), \quad t \ne k\theta, \\ \Delta y(t) = (C_0 + \Delta C)y(t), \quad t = k\theta, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $y \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le 1$, $\Delta y(t) = y(t+0) - y(t)$.

Изучение устойчивости линейной импульсной системы (3.1) можно провести, используя различные варианты метода функций Ляпунова для импульсных систем, разработанные в [5, 8].

Рассмотрим случай, когда $\max_{\lambda\in\sigma(A_0)} \operatorname{Re}\lambda < 0$, тогда по теореме Ляпунова для заданной симметричной положительно-определенной матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ существует симметричная положительно-определенная матрица P, которая удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$A_0^{\mathrm{T}} P + P A_0 = -Q. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$\gamma(t) = \|PB(t)\|, \quad \vartheta = \frac{2\|(I + C_0)P\|\mu + \mu^2\|P\|}{\lambda_{\min}(P)},$$
$$R = -(C_0^T P + PC_0 + C_0^T P C_0).$$

Т е о р е м а 1. Предположим, что $\max_{\lambda\in\sigma(A_0)} \operatorname{Re}\lambda < 0$ и для системы (2.1) выполнено неравенство

$$\ln(1 - \Lambda^*(R, P) + \vartheta) + \frac{2\eta\|P\|}{\lambda_{\min}(P)}\theta + \frac{2}{\lambda_{\min}(P)}\int_0^\theta \gamma(t)dt < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}\theta.$$

Тогда линейная периодическая импульсная система (2.1) интервально устойчива.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $v(y) = y^*Py$. Для производной функции Ляпунова $v(y)$ вдоль решений системы (3.1) при $t \neq \theta$ получим оценку

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.1)} \leq -\lambda_{\min}(Q)\|y\|^2 + (2\eta\|P\| + 2\gamma(t))\|y\|^2 \leq \\ \leq \left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} + \frac{2\eta\|P\| + 2\gamma(t)}{\lambda_{\min}(P)}\right)v(y(t)). \tag{3.3}$$

Из оценки (3.3) следует, что

$$v(y(\theta)) \leq v(y_0)\exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}\theta + \frac{2\eta\|P\|}{\lambda_{\min}(P)}\theta + \frac{2}{\lambda_{\min}(P)}\int_0^\theta \gamma(t)dt\right). \tag{3.4}$$

При $t = \theta$ изменение функции Ляпунова $v(y)$ вдоль решений линейной системы (3.1) можно оценить так:

$$v(y(\theta + 0)) - v(y(\theta)) \leq -y^*(\theta)Ry(\theta) + (2\|(I + C_0)P\|\mu + \mu^2\|P\|)\|y(\theta)\|^2 \leq \\ \leq (-\Lambda^*(R, P) + \vartheta)v(y(\theta)). \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$v(y(\theta + 0)) \leq (1 - \Lambda^*(R, P) + \vartheta)\exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}\theta + \frac{2\eta\|P\|}{\lambda_{\min}(P)}\theta + \frac{2}{\lambda_{\min}(P)}\int_0^\theta \gamma(t)dt\right)\times \\ \times v(y(0 + 0)) := qv(y(0 + 0)).$$

Поскольку $q \in (0,1)$, то

$$v(y(k\theta + 0)) \leq q^k v(y(0 + 0))$$

и

$$\|y(k\theta + 0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}q^{k/2}\|y(0 + 0)\|. \tag{3.6}$$

Из неравенства (3.6) асимптотическая устойчивость системы (3.1) следует очевидным образом. Теорема 1 доказана.

Предположим, что матрица A_0 может не удовлетворять условиям Рауса–Гурвица, но выполняется неравенство $r_\sigma(I + C_0) < 1$. Тогда, по обобщенной теореме Ляпунова [23], для данной симметричной положительно-определенной матрицы R существует симметричная положительно-определенная матрица P, удовлетворяющая обобщенному матричному уравнению Ляпунова

$$C_0^{\mathrm{T}}P + PC_0 + C_0^{\mathrm{T}}PC_0 = -R. \tag{3.7}$$

Теорема 2. Предположим, что для системы (2.1) выполнено неравенство:

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda_{\min}(R)}{\lambda_{\max}(P)} + \vartheta\right) + \frac{2\eta\|P\|}{\lambda_{\min}(P)}\theta + \frac{2}{\lambda_{\min}(P)}\int_0^\theta \gamma(t)dt < \Lambda^*(Q, P)\theta.$$

Тогда линейная система (2.1) является интервально устойчивой.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Далее рассмотрим случай, когда условия $\max_{\lambda\in\sigma(A_0)}\mathrm{Re}\lambda < 0$ и $r_\sigma(I + C_0) < 1$ могут не выполняться.

Теорема 3. Предположим, что $B \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ и для заданной симметричной положительно-определенной матрицы G существует симметричная положительно-определенная матрица P, которая удовлетворяет уравнению

$$\theta(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0) + C_0^{\mathrm{T}}P + PC_0 + C_0^{\mathrm{T}}PC_0 = -G,$$

и матрица

$$\Phi = (A_0^{\mathrm{T}})^2 P + 2A_0^{\mathrm{T}} P A_0 + P A_0^2$$

является положительно-определенной. Пусть

$$\gamma_0 = \max_{t\in[0,\theta]} \|B(t)\|, \quad \gamma_1 = \max_{t\in[0,\theta]} \|PA_0 B(t)\|, \quad \gamma_2 = \max_{t\in[0,\theta]} \left\|PB^2(t)\right\|,$$
$$\gamma_3 = \max_{t\in[0,\theta]} \|PB(t)A_0\|, \quad \gamma_4 = \max_{t\in[0,\theta]} \left\|B^{\mathrm{T}}(t)PA_0\right\|, \quad \gamma_5 = \max_{t\in[0,\theta]} \|PB(t)\|,$$
$$\gamma_6 = \max_{t\in[0,\theta]} \left\|B^{\mathrm{T}}(t)PB(t)\right\|, \quad \gamma_7 = \max_{t\in[0,\theta]} \left\|P\frac{dB(t)}{dt}\right\|.$$

Если выполняются неравенства

$$2\theta\left(\eta\|P\| + \|PB(\theta)\|\right) + 2\|(I + C_0)P\|\mu + \mu^2\|P\| < \lambda_{\min}(G),$$
$$\eta\left(3\|PA_0\| + 3\gamma_5 + \|A_0\|\|P\| + 2\eta\|P\| + \gamma_0\|P\|\right) +$$
$$+ 2\gamma_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_7 \le \frac{\lambda_{\min}(\Phi)}{2},$$

то линейная импульсная периодическая система с запаздыванием (2.1) является интервально устойчивой.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $v(y) = y^*Py$. Тогда, применяя формулу Тейлора, получим

$$v(y_0) - v(y(\theta)) = -\frac{d}{dt}v(y(t))\Big|_{t=\theta}\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}v(y(t))\Big|_{t=c}\theta^2, \tag{3.8}$$

где $c \in (0,\theta)$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}v(y(t)) = y^*(t)((A_0^{\mathrm{T}} + \Delta A^{\mathrm{T}} + z^*B^{\mathrm{T}}(t))P + P(A_0 + \Delta A + zB(t)))y(t),$$
$$\frac{d^2}{dt^2}v(y(t)) = y^*(t)((A_0^{\mathrm{T}} + \Delta A^{\mathrm{T}} + z^*B^{\mathrm{T}}(t))^2 P + 2(A_0^{\mathrm{T}} + \Delta A^{\mathrm{T}} + z^*B^{\mathrm{T}}(t))\times$$
$$\times P(A_0 + \Delta A + zB(t)) + P(A_0 + \Delta A + zB(t))^2)y(t) +$$
$$+ z^*y^*(t)\frac{dB^{\mathrm{T}}(t)}{dt}Py(t) + zy^*(t)P\frac{dB(t)}{dt}y(t).$$

Используя условия теоремы 3, находим

$$\frac{d^2}{dt^2}v(y(t)) \ge y^*\Phi y - 2(3\eta\|PA_0\| + 2\eta^2\|P\| + (2+\eta)\gamma_5 + \eta\gamma_0\|P\| +$$
$$+ \eta\|P\|\|A_0\| + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_7)\|y\|^2 \ge 0.$$

Следовательно, из (3.8) получим

$$v(y(\theta)) - v(y(0+0)) \le \theta y^*(\theta)((A_0^{\mathrm{T}} + \Delta A^{\mathrm{T}} + z^*B^{\mathrm{T}}(\theta))P +$$
$$+ P(A_0 + \Delta A + zB(\theta))y(\theta) \le \theta y^*(\theta)(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0)y(\theta) + 2\theta(\eta\|P\| + \|PB(\theta)\|)\|y(\theta)\|^2.$$

Аналогично можно получить

$$v(y(\theta+0)) - v(y(\theta)) \le y^*(\theta)(C_0^{\mathrm{T}}P + PC_0 + C_0^{\mathrm{T}}PC_0)y(\theta) +$$
$$+ (2\|P(I + C_0)\|\mu + \mu^2\|P\|)\|y(\theta)\|^2.$$

Следовательно,

$$v(y(\theta+0)) - v(y(0+0)) \le -y^*(\theta)Gy(\theta) +$$
$$+ (2\theta(\eta\|P\| + \|PB(\theta)\|) + 2\|P(I + C_0)\|\mu + \mu^2\|P\|)\|y(\theta)\|^2.$$

Пусть $\delta = \lambda_{\min}(G) - (2\theta(\eta\|P\| + \|PB(\theta)\|) + 2\|P(I + C_0)\|\mu + \mu^2\|P\|) > 0$. Тогда справедлива оценка

$$v(y(\theta + 0)) - v(y(0 + 0)) \le -\delta\|y(\theta)\|^2 \le -\frac{\delta}{\lambda_{\max}(P)}v(y(\theta)).$$

Ввиду условий теоремы 3 получим

$$\frac{d}{dt}v(y(t)) = y^*(t)((A_0^{\mathrm{T}} + \Delta A^{\mathrm{T}} + z^*B^{\mathrm{T}}(t))P + P(A_0 + \Delta A + zB(t)))y(t) \ge$$
$$\ge -2(\|PA_0\| + \eta\|P\| + \gamma_5)\|y(t)\|^2 \ge -\frac{2(\|PA_0\| + \eta\|P\| + \gamma_5)}{\lambda_{\min}(P)}v(y(t)) := -\chi v(y(t)), \quad t \in (0, \theta].$$

Отсюда следует, что

$$v(y(\theta)) \ge v(y(0 + 0))e^{-\chi\theta}.$$

Таким образом,

$$v(y(\theta + 0)) \le \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_{\max}(P)}e^{-\chi\theta}\right)v(y(0 + 0)).$$

Следовательно,

$$v(y(k\theta + 0)) \le \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_{\max}(P)}e^{-\chi\theta}\right)^k v(y(0 + 0)) := q^k v(y(0 + 0)).$$

Итак, получим оценку

$$\|y(k\theta + 0)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}q^{k/2}\|y(0 + 0)\|.$$

Так как $q \in (0,1)$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\|y(k\theta + 0)\| = 0$. Утверждение теоремы следует из леммы 3. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим применение леммы 3 для исследования интервальной устойчивости линейной периодической импульсной системы с запаздыванием (1.1).

Т е о р е м а 4. Пусть

$$\psi(\tau) = (e^{\eta\tau} - 1)\left(e^{\Lambda(-A_0)\tau}\left\|B(\tau)e^{A_0\tau}\right\| + e^{\Lambda(A_0)\tau}\left\|B(\tau)e^{A_0\tau}\right\|\right) + (e^{\eta\tau} - 1)^2\|B(\tau)\|.$$

Предположим, что для линейной периодической импульсной системы с запаздыванием (2.1) выполняется неравенство

$$\ln\left(\left\|(I + C_0)e^{A_0\theta}\right\| + \mu\|e^{A_0\theta}\| + e^{\Lambda(A_0)\theta}(e^{\eta\theta} - 1)(\|I + C_0\| + \mu)\right) +$$
$$+ \int_0^\theta\left(\left\|e^{-A_0\tau}B(\tau)e^{A_0\tau}\right\| + \psi(\tau)\right)d\tau < 0.$$

Тогда линейная периодическая импульсная система с запаздыванием (2.1) является интервально устойчивой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 4 достаточно проверить выполнение условий леммы 3. Используя утверждение леммы 4, находим

$$\begin{aligned}\left\|(I + C_0 + \Delta C)e^{(A_0+\Delta A)\theta}\right\| &\le \left\|(I + C_0)e^{A_0\theta}\right\| + \|\Delta C\|\left\|e^{(A_0+\Delta A)\theta} - e^{A_0\theta}\right\| + \\ &+ \|I + C_0\|\left\|e^{(A_0+\Delta A)\theta} - e^{A_0\theta}\right\| + \|\Delta C\|\left\|e^{A_0\theta}\right\| \le \\ &\le \left\|(I + C_0)e^{A_0\theta}\right\| + (\mu + \|I + C_0\|)e^{\Lambda(A_0)\theta}(e^{\eta\theta} - 1) + \mu\left\|e^{A_0\theta}\right\|.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Аналогично из (3.9) получим

$$\left\|e^{-(A_0+\Delta A)\tau}B(\tau)e^{(A_0+\Delta A)\tau}\right\| \le \left\|e^{-A_0\tau}B(\tau)e^{A_0\tau}\right\| + \psi(\tau).$$

Следовательно,

$$\left\|(I + C_0 + \Delta C)e^{(A_0+\Delta A)\theta}\right\| \exp\left(\int_0^\theta \left\|e^{-(A_0+\Delta A)\tau} B(\tau) e^{(A_0+\Delta A)\tau}\right\| d\tau\right) < 1.$$

Условия леммы 3 выполнены, что завершает доказательство теоремы 4.

Пример 1. Рассмотрим линейную импульсную систему (2.1) с интервальными матрицами $A \in [A_*, A^*]$, $C \in [C_*, C^*]$, где

$$A_* = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{11} & -\alpha - \varepsilon_{12} \\ \alpha - \varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\alpha + \varepsilon_{12} \\ \alpha + \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix},$$

$$C_* = \begin{pmatrix} c_{11} - \rho_{11} & c_{12} - \rho_{12} \\ c_{21} - \rho_{21} & c_{22} - \rho_{22} \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} c_{11} + \rho_{11} & c_{12} + \rho_{12} \\ c_{21} + \rho_{21} & c_{22} + \rho_{22} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = b_0 \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \quad \omega = 2\pi/\theta.$$

Матрицы A_0, C_0 имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Константы η и μ определяются следующим образом:

$$\eta = \sqrt{\max(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}) \max(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22})},$$
$$\mu = \sqrt{\max(\rho_{11} + \rho_{12}, \rho_{21} + \rho_{22}) \max(\rho_{11} + \rho_{21}, \rho_{12} + \rho_{22})}.$$

Ввиду утверждения теоремы 4 можно сделать вывод, что достаточные условия интервальной устойчивости линейной системы (2.1) имеют вид

$$\ln\left(\|I + C_0\| + \mu\right) + \eta\theta + \frac{|b_0|}{2\eta}(e^{2\eta\theta} - 1) < 0.$$

Пример 2. Рассмотрим линейную периодическую импульсную систему (2.1) с периодом $\theta = 21/64$ и интервальными матрицами $A \in [A_*, A^*]$, $C \in [C_*, C^*]$, где

$$A_* = \begin{pmatrix} -1.04 & -0.04 \\ -0.04 & 0.96 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -0.96 & 0.04 \\ 0.04 & 1.04 \end{pmatrix},$$

$$C_* = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.01 \\ -0.01 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.01 \\ 0.01 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = 0.01 \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \quad \omega = 2\pi/\theta.$$

Пусть $P = I$, $G = 3/32I$. Матрицы A_0, C_0 имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\eta = 0.08$, $\mu = 0.01$, $\omega = 2\pi/\theta = 19.14875$, $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0.01$, $\gamma_6 = 10^{-4}$, $\gamma_7 = 0.191488$, $\|I + C_0\| = 1.25$, $G = 3/32I$, $\Phi = 4I$. Следовательно, выполнены условия теоремы 3 и линейная периодическая импульсная система (2.1) является интервально устойчивой.

Отметим, что в этом случае

$$\max_{\lambda \in \sigma(A_*)} \mathrm{Re}\lambda > 0, \quad \max_{\lambda \in \sigma(A^*)} \mathrm{Re}\lambda > 0, \quad r_\sigma(I + C_*) > 1, \quad r_\sigma(I + C^*) > 1,$$

т.е. все структурные матрицы системы (2.1) неустойчивы, однако линейная импульсная система (2.1) интервально устойчива.

Заключение. В настоящей работе показано, что задача об устойчивости линейной периодической системы с импульсным воздействием и запаздыванием может быть сведена к исследованию локализации корней некоторой трансцендентной функции. Однако такое исследование, в общем случае, является очень сложной задачей, поскольку нет общих критериев локализации корней трансцендентных функций в единичном круге аналогично критерию Шура–Кона для многочленов. В этой статье предлагается подход, который значительно упрощает исследование устойчивости линейной периодической импульсной системы с запаздыванием в частном случае, когда величина запаздывания равна периоду импульсного воздействия. Этот подход сводит проблему устойчивости линейной периодической импульсной дифференциальной системы с запаздыванием к изучению устойчивости линейной импульсной системы без запаздывания. Предлагаемый метод также эффективен для исследования проблемы интервальной устойчивости импульсных дифференциальных систем. Приведенные примеры показывают общность полученных результатов, которые позволяют установить условия устойчивости при различных предположениях о динамических свойствах матриц непрерывной и дискретной компонент системы.

Отметим также, что хотя для функционально-дифференциальных уравнений с импульсным действием общие теоремы прямого метода Ляпунова достаточно разработаны [12], проблема построения функций Ляпунова для этого класса систем еще недостаточно развита. В настоящей статье был достигнут определенный прогресс в этом направлении, поскольку вопрос о построении функции Ляпунова для системы без запаздывания проще. С другой стороны, при построении функции Ляпунова существенным образом учитываются динамические свойства непрерывной и дискретной компонент системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. N.Y.: Springer, 1977.
2. *Bellman R., Cooke K.* Differential Difference Equations. Acad. Press, 1963.
3. *Tunç C.* Instability of Solutions of Vector Lienard Equation with Constant Delay // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.). 2016. V. 59(107). № 2. P. 197–204.
4. *Graef J.R., Tunç C., Sevgin S.* Behavior of Solutions of Nonlinear Functional Volterra Integro-differential Equations with Multiple Delays // Dynam. Systems Appl. 2016. V. 25. № 1–2. P. 39–46.
5. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. With a preface by Yu.A. Mitropol'skii and a supplement by S.I. Trofimchuk. Translated from the Russian by Y. Chapovsky. N. Y.: World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, 14. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 1995.
6. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. Series in Modern Applied Mathematics, 6. N.Y.: World Scientific publishing Co., Inc., Teaneck, 1989.
7. *Liu X., Willms A.* Stability Analysis and Applications to Large scale Impulsive Systems: a New Approach // Canad. Appl. Math. Quart. 1995. V. 3. № 4. P. 419–444.
8. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. заметки. 2014. Т. 96. № 1. С. 22–35.
9. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Об устойчивости по нелинейному квазиоднородному приближению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. 2014. Т. 205. № 6. С. 109–138.
10. *Ignat'ev A.O., Ignat'ev O.A., Soliman A.A.* On the Asymptotic Stability and Instability of Solutions of Systems with Impulse Action // Math. Notes. 2006. V. 80. № 3–4. P. 491–499.
11. *Ignatyev A.O.* On the Stability of Invariant Sets of Systems with Impulse Effect // Nonlinear Anal. 2008. V. 69. № 1. P. 53–72.
12. *Stamova I.* Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations. De Gruyter Expositions in Mathematics, 52. Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin, 2009. 230 p.
13. *Slyn'ko V.I.* Stability Conditions for Linear Impulsive Systems with Delay // Int. Appl. Mech. 2005. V. 41. № 6. P. 697–703.
14. *Wu-Hua Chen, Zhen Ruan, Wei Xing Zheng.* Stability and L^2-gain Analysis for Impulsive Delay Systems: An Impulse-time-dependent Discretized Lyapunov Functional Method // Automatica J. IFAC. 2017. V. 86. P. 129–137.
15. *Davoa M.A., Banos A., Gouaisbaut F., Tarbouriechc S., Seuret A.* Stability Analysis of Linear Impulsive Delay Dynamical Systems Via Looped-Functionals // Automatica J. IFAC. 2017. V. 81 P. 107–114.
16. *Ivanov I.L., Slyn'ko V.I.* A Stability Criterion for Autonomous Linear Time-Lagged Systems Subject to Periodic Impulsive Force // Int. Appl.Mech. 2013. V. 49. № 6. P. 732–742.

17. *Иванов И.Л., Слынько В.И.* Критерий устойчивости линейных систем с запаздыванием и двупериодическим импульсным воздействием // АиТ. 2012. Т. 9. С. 20–34.
18. *Kharitonov V.L.* On Asymptotic Stability of the Balance Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations // Differ. Uravn. Ikh. Primen. 1978. V. 14. № 11. P. 2086–2088.
19. *Liu B., Liu X., Liao X.* Robust Stability of Uncertain Impulsive Dynamical Systems. // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 290. P. 519–533.
20. *Слынько В.И., Денисенко В.С.* Робастная устойчивость систем линейных дифференциальных уравнений с периодическим импульсным воздействием // АиТ. 2012. Т. 6. С. 89–102.
21. *Denisenko V.S., Slyn'ko V.I.* Interval Stability of Linear Impulsive Systems // J. Computer and Systems Sciences International. 2015. V. 54. № 1. P. 1–12.
22. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear Operators: General Theory. N.Y., L.: Interscience Publishers, 1958.
23. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
24. *Pontryagin L.S.* On the Zeros of Some Elementary Transcendental Functions // Amer. Math. Soc. Transl. 1955. V. 2. № 1. P. 95–110.
25. *Chebotarev N.G., Meiman N.N.* The Routh-Hurwitz Problem for Polynomials and entire Functions // Trudy Mat. Inst. Steklov. 1949. V. 26. P. 3–331.
26. *Gusev Yu.M., Yefanov V.N., Krymskiy V.G., Rutkovskiy V.Yu.* Analysis and Synthesis of Linear Interval Dynamical Systems (the state of the problem). II. Analysis of the Stability of Interval Matrices and Synthesis of Robust Regulators // Soviet J. Comput. Systems Sci. 1992. V. 30. № 2. P. 26–52.