
**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 531.391

**УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ
ПОСРЕДСТВОМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ**

© 2020 г. С. Г. Глебов^{а,*}, А. Н. Зотов^а

^а ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический ун-т, Уфа, Россия

^{*}*e-mail*: anz21963@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.09.2018 г.

После доработки 09.08.2019 г.

Принята к публикации 30.09.2019 г.

Работа посвящена определению восстанавливающих сил упругих элементов системы с двумя степенями свободы по ее заданному движению. Рассмотрены два тела определенной массы. Первое тело соединено первым упругим элементом с неподвижным основанием, второе тело — с первым телом вторым упругим элементом. Движение происходит по прямой в горизонтальной плоскости. Силы тяжести, как и силы трения, не учитывались. После задания, в частности, тригонометрическими функциями закона движения каждого тела были аналитически определены восстанавливающие силы обоих упругих элементов. Данные восстанавливающие силы являются управляющими функциями, по которым реализуется желаемое движение. Технически такие управления могут быть осуществлены различными способами, в частности, пассивными упругими элементами, конструкция и способ расчета которых предлагается в статье. Приведен вариант создания упругих элементов с полученными восстанавливающими силами на базе пружин, перемещающихся между двумя направляющими расчетной формы перпендикулярно их оси симметрии.

DOI: 10.31857/S0002338820010060

Введение. Рассматривается система с двумя степенями свободы. Имеются две массы, соединенные упругими элементами. Первый упругий элемент соединяет первую массу системы с неподвижным основанием. Второй упругий элемент соединяет первую и вторую массы. Движение происходит в горизонтальной плоскости. Силы тяжести, как и силы трения, не учитываются. Величины масс выбираются достаточно произвольно. В начальный момент времени оба тела смещены из их нейтральных положений. Необходимо найти такие аналитические, в частности тригонометрические функции, определяющие законы движения каждой массы от времени, чтобы в терминальный момент времени оба упругих элемента были не напряжены и, кроме того, скорость первого тела при этом должна быть равна нулю. С точки зрения физики это означает, что энергия, сообщенная системе в начальный момент времени, равна кинетической энергии второго тела в терминальный момент времени, т.е. в заданный терминальный момент времени второе тело приобретает максимально возможную скорость при энергии, определяемой начальными условиями. Задается условие, чтобы восстанавливающие силы упругих элементов на протяжении всего времени движения, по возможности, были направлены в сторону разгона второго тела. По времени движение системы рассматривается от начала движения (время равно нулю) до терминального момента времени, когда оба тела находятся в нейтральном положении.

Из двух дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы, возможно определение зависимостей восстанавливающих сил упругих элементов от времени. После исключения времени из функций, определяющих законы движения тел и восстанавливающие силы упругих элементов, можно получить зависимости восстанавливающих сил упругих элементов от координат. Для первого упругого элемента — это зависимость от координаты первого тела; для второго упругого элемента — зависимость от разности координат второго и первого тел. Требуется подобрать такие аналитические функции, описывающие движение тел системы, чтобы одному значению координаты каждого тела соответствовало одно значение соответствующей восстанавливающей силы.

Для создания упругих элементов с полученными аналитически восстанавливающими силами предполагается рассмотреть пружины, перемещающиеся между направляющими расчетной

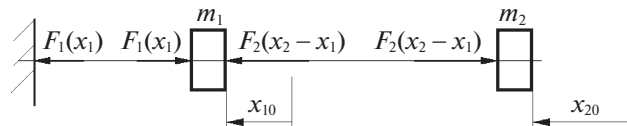


Рис. 1

формы перпендикулярно их оси симметрии. Расчет формы направляющих сводится к решению квадратного уравнения, полученного из условия, что восстанавливающая сила каждого упругого элемента определяется как частная производная от потенциальной энергии соответствующей пружины по ее координате.

Рассматриваемый в статье подход к определению восстанавливающих сил упругих элементов в системе с двумя степенями свободы при заданном законе движения может найти широкое применение в технике, например, для создания конструкций, где требуется получать большие скорости рабочих элементов без больших перегрузок. Это могут быть различные катапульты и ударники. В частности, для катапульт беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) использование дополнительного инерционного элемента позволило уменьшить длину направляющих стартового устройства на 30% без превышения нагрузки на БПЛА, что обеспечивает плавное безударное ускорение летательного аппарата и снижает требования к его прочности [1, 2]. В [3] рассмотрена задача разгона крайней массы цепочки (бойка) тел, соединенных пружинами, подчиняющимися закону Гука. В этих случаях задача получить заданный закон движения тел системы с несколькими степенями свободы путем решения дифференциальных уравнений при изменении параметров системы очень сложна. Предлагаемый способ управления системами с двумя степенями свободы посредством потенциальных сил позволит получать широкий класс желаемых законов движения тел.

1. Постановка задачи. Рассматривается система с двумя степенями свободы. Принимаем, что восстанавливающая сила $F_1(x_1)$ упругого элемента, расположенного между неподвижным основанием и телом массой m_1 (рис. 1), зависит от координаты первого тела; восстанавливающая сила $F_2(x_2 - x_1)$ упругого элемента, расположенного между первым телом и вторым телом массой m_2 , зависит от разности координат второго и первого тел.

Движение системы задается выбранными определенным образом зависимостями координат первого и второго тел от времени $x_1(t)$ и $x_2(t)$. По этим функциям определяются зависимости сил, действующих на тела массой m_1 и m_2 , от времени: $F_1'(t)$ и $F_2'(t)$. Исключая время из функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $F_1'(t)$ и $F_2'(t)$, получаются зависимости $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2 - x_1)$.

Создание упругих элементов с полученными восстанавливающими силами $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2 - x_1)$ предлагается осуществить при помощи пружин, перемещающихся между направляющими расчетной формы перпендикулярно их оси симметрии.

2. Метод решения. Рассматривается задача нахождения таких тригонометрических функций, определяющих законы движения каждой массы от времени, чтобы в терминальный момент времени t_k оба упругих элемента были не напряжены при скорости первого тела, равной нулю, что приведет к максимально возможной скорости второго тела при заданной энергии системы.

Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad \dot{x}_{10} = 0, \quad x_{10} \neq 0, \quad \dot{x}_{20} \approx 0, \quad x_{20} \neq 0, \\ t = t_k: \quad x_1(t_k) = 0, \quad \dot{x}_1(t_k) = 0, \quad x_2(t_k) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \dot{x}_{10} ; \dot{x}_{20} – начальные скорости первого и второго тела; x_{10} , x_{20} – начальные смещения первого и второго тела соответственно.

Условие $\dot{x}_{20} \approx 0$ принято из-за сложности получения точного равенства. Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ были выбраны из условия, что правые части – монотонные функции времени, что позволяет выразить t как однозначные функции переменных x_1 и $x_2 - x_1$:

$$\begin{aligned} x_1(t) = B \cos(\pi t / t_k) + B, \\ x_2(t) - x_1(t) = -A \operatorname{th}(k(t - t_k)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где A , B , t_k , k – постоянные величины.

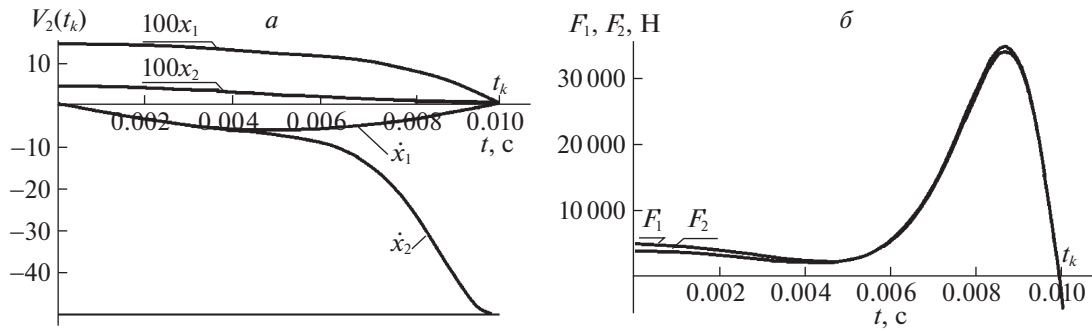


Рис. 2

Такой выбор функций обеспечивает выполнение граничных условий (2.1) (рис. 2, а). В общем, исходные соотношения (2.1) и (2.2) могут быть и другими.

Постоянные, входящие в систему уравнений (2.2) с учетом условий (2.1), выбраны достаточно произвольно: $B = 0.02$ м; $A = 0.10$ м; $t_k = 0.01$ с; $k = 500$ с⁻¹; $x_{10} = 0.04$ м; $x_{20} = 0.14$ м. Эти величины будут использованы во всех дальнейших вычислениях и характеризуют типичные процессы, которые могут возникать при работе различных ударников и катапульта с двумя степенями свободы.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение системы, изображенной на рис. 1, следующие:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -F_1 + F_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -F_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставив в (2.3) производные $\ddot{x}_1(t)$ и $\ddot{x}_2(t)$, полученные из (2.2), определяем зависимости сил $F_1'(t)$ и $F_2'(t)$:

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2, \\ F_2'(t) &= -m_2 \ddot{x}_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{B\pi^2}{t_k^2} \cos \frac{\pi t}{t_k}; \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{B\pi^2 \cos(\pi t/t_k)}{t_k^2} + 2Ak^2 \operatorname{sech}^2(k(t-t_k)) \operatorname{th}(k(t-t_k)). \end{aligned}$$

Массы первого и второго тела выбраны следующие: $m_1 = 0.5$ кг; $m_2 = 2$ кг. На рис. 2, а изображены зависимости координат и скоростей тел системы с двумя степенями свободы от времени, полученные по формулам (2.2) и их производным. На рис. 2, б приведены силы $F_1'(t)$ и $F_2'(t)$, действующие на первое и второе тело системы соответственно, определенные по системе (2.4). Для перехода к зависимостям $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2 - x_1)$ подставляем вместо времени t в $\ddot{x}_1(t)$ функцию $t_1 = \arccos(x_1/B - 1)/(\pi/t_k)$, полученную из первого уравнения системы (2.2), а вместо времени в $\ddot{x}_2(t)$ — функцию $t_2 = \operatorname{arcth}((x_1 - x_2)/A)/k + t_k$, полученную из второго уравнения системы (2.2). После упрощения находим систему дифференциальных уравнений (2.5), в которых силы $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2 - x_1)$ зависят от координат:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{Bm_1\pi^2 \cos(\pi t/t_k)}{t_k^2}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{Bm_2\pi^2 \cos(\pi t/t_k)}{t_k^2} + 2Am_2k^2 \operatorname{sech}^2(k(t-t_k)) \operatorname{th}(k(t-t_k)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

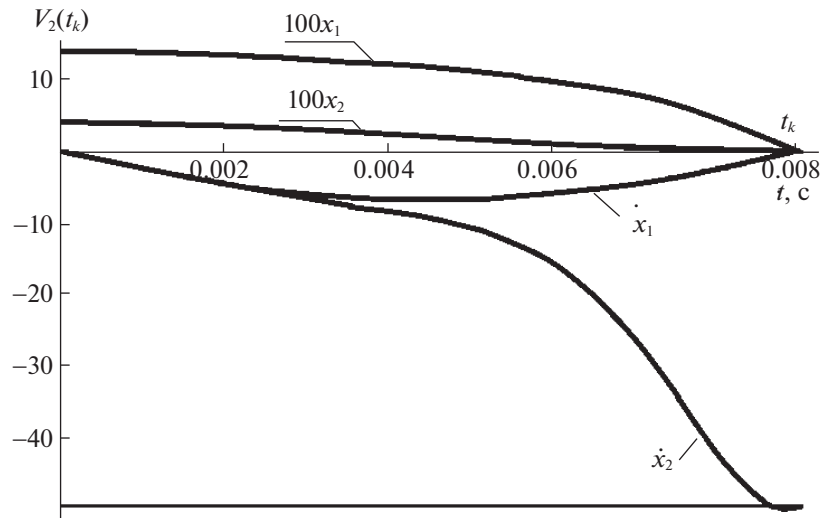


Рис. 3

где

$$t_1 = \frac{t_k \arccos(x_1/B - 1)}{\pi};$$

$$t_2 = \frac{\operatorname{arcth}((x_1 - x_2)/A)}{k} + t_k.$$

На рис. 3 представлены функции $x_1(t)$; $x_2(t)$; $\dot{x}_1(t)$; $\dot{x}_2(t)$, полученные численным решением системы дифференциальных уравнений (2.5). Как видно из рис. 3, зависимости $x_1(t)$; $x_2(t)$; $\dot{x}_1(t)$; $\dot{x}_2(t)$ практически совпадают с теми же зависимостями, представленными на рис. 2, а, что можно считать проверкой предыдущих вычислений.

Для определения аналитической зависимости $F_1(x_1)$ достаточно в функцию $F_1'(t)$ (2.4) подставить вместо времени t функцию t_1 , полученную выше. После упрощения имеем

$$F_1(x_1) = \pi^2(x_1 - B)(m_1 + m_2)/t_k^2 - 2Ak^2m_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{kt_k \arccos(x_1/B - 1)}{\pi} - kt_k\right) \operatorname{th}\left(\frac{kt_k \arccos(x_1/B - 1)}{\pi} - kt_k\right). \quad (2.6)$$

Для определения аналитической зависимости $F_2(x_2 - x_1)$ в функцию $F_2'(t)$ (2.4) подставляем вместо времени t функцию t_2 , полученную выше. После упрощения имеем

$$F_2(x_2 - x_1) = \frac{B\pi^2m_2}{t_k^2} \cos\left(\frac{\pi \operatorname{arcth}((x_1 - x_2)/A)}{kt_k} + \pi\right) + 2k^2m_2(x_2 - x_1)(1 - (x_2 - x_1)^2/A^2). \quad (2.7)$$

На рис. 4 представлены зависимости $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2 - x_1)$, найденные по уравнениям (2.6) и (2.7). Эти восстанавливающие силы, полученные аналитически, могут быть управляющими функциями для осуществления заданного движения, например, при изменении максимальной скорости второго тела $V_{2\max}$ при тех же выбранных функциях $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (рис. 2, а), т.е. при других значениях постоянных k , B , A , t_k , входящих в систему уравнений (2.1).

3. Способ технической реализации результатов. Для получения восстанавливающих сил $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2 - x_1)$ рассмотрена система, схема которой изображена на рис. 5 [4]. В ней пружина жесткостью “ c ” перемещается между направляющими расчетной формы перпендикулярно их оси симметрии.

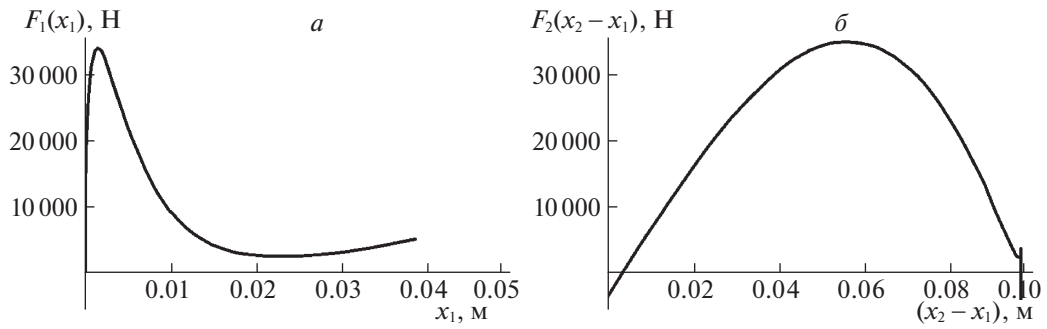


Рис. 4

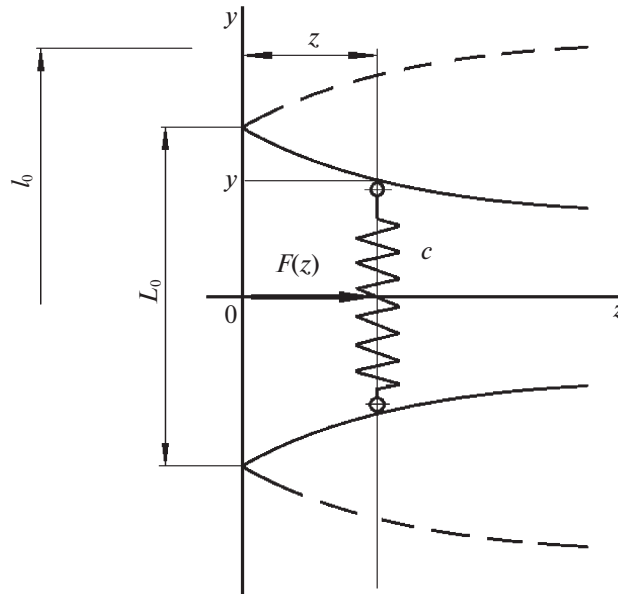


Рис. 5

Силу, с которой система “сопротивляется” перемещению пружины вдоль оси z (рис. 5, она будет противоположна $F(z)$), можно определить следующим образом (силы трения не учитываются) [5]:

$$-F(z) = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \tag{3.1}$$

где $\Pi = c\Delta\ell^2/2$ – потенциальная энергия пружины; c – коэффициент жесткости пружины; $\Delta\ell = \ell_0 - 2y$ – изменение длины пружины (рис. 5); ℓ_0 – длина ненапряженной пружины; y – координата функции, определяющей направляющие.

Дифференциальное уравнение в частных производных (3.1) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$F(z) = 2c(\ell_0 - 2y)\frac{dy}{dz}. \tag{3.2}$$

Начальные условия для данного дифференциального уравнения следующие:

$$t = 0: \quad z_0 = 0; \quad y_0 = 0.5L_0, \tag{3.3}$$

где $0.5L_0$ – начальная координата направляющей (рис. 5).

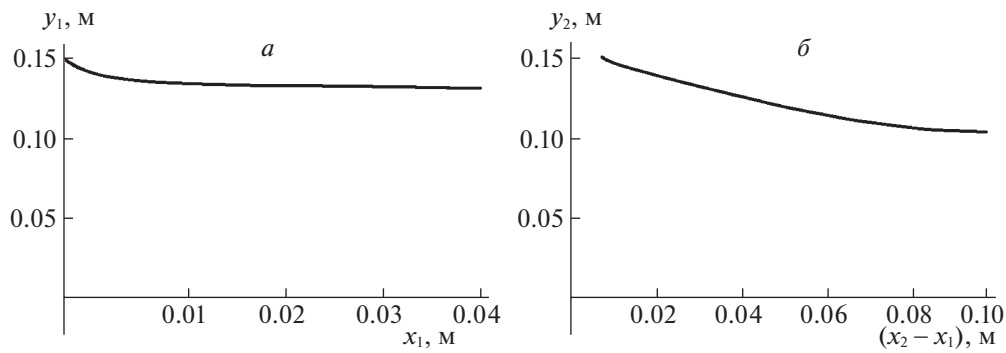


Рис. 6

В дифференциальном уравнении (3.2) разделяем переменные и берем определенные интегралы, учитывая начальные условия (3.3):

$$4c \int_{L_0/2}^y y dy - 2c\ell_0 \int_{L_0/2}^y dy = \int_0^z F(u) du. \quad (3.4)$$

Опуская выкладки, получаем квадратное уравнение для $y(z)$, решение которого представлено ниже:

$$y = 0.5\ell_0 \pm \sqrt{0.25\ell_0^2 - D}, \quad (3.5)$$

где $D = 0.5\ell_0 L_0 - 0.25L_0^2 - \frac{1}{2c} \int_0^z F(u) du$.

Знаку “+” уравнения (3.5) соответствует пунктирная линия – пружина растягивается, знаку “-” соответствует сплошная линия – пружина сжимается (рис. 5) [5]. Рассмотрим вариант сжатия пружины – знак “-”. На рис. 6 представлены формы направляющих, определенные по формуле (3.5) ($\ell_0 = 0.3$ м; $L_0 = 0.3$ м; $c = 1000000$ Н/м). Для рис. 6, а,

$$D = 0.5\ell_0 L_0 - 0.25L_0^2 - \frac{1}{2c} \int_0^{x_1} F_1(w) dx_1,$$

где $F_1(w)$ находится по формуле (2.6). Для рис. 6, б

$$D = 0.5\ell_0 L_0 - 0.25L_0^2 - \frac{1}{2c} \int_0^{x_2-x_1} F_2(v) dv,$$

где $F_2(v)$ определяется по формуле (2.7).

Как видно из рис. 6, б, на начальном участке от $(x_2 - x_1) = 0$ до $(x_2 - x_1) \approx 0.005$ м зависимость отсутствует. Это объясняется тем, что зависимость $F_2(x_2 - x_1)$ на этом участке имеет отрицательные значения и для его нахождения требуется рассмотреть его отдельно. Из-за малости этого участка данный расчет здесь не приводится.

Требуемое изменение функций $F_1(x_1)$, $F_2(x_2 - x_1)$ при управлении рассматриваемой системы с двумя степенями свободы можно осуществить изменением формы направляющих, которые определяются функциями $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2 - x_1)$ (рис. 6).

Заключение. Преимуществом предлагаемого подхода к заданию заданного движения каждого тела системы с двумя степенями свободы является то, что не требует решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, это связано с известными трудностями. Фактически, решается первая задача динамики для системы с двумя степенями свободы.

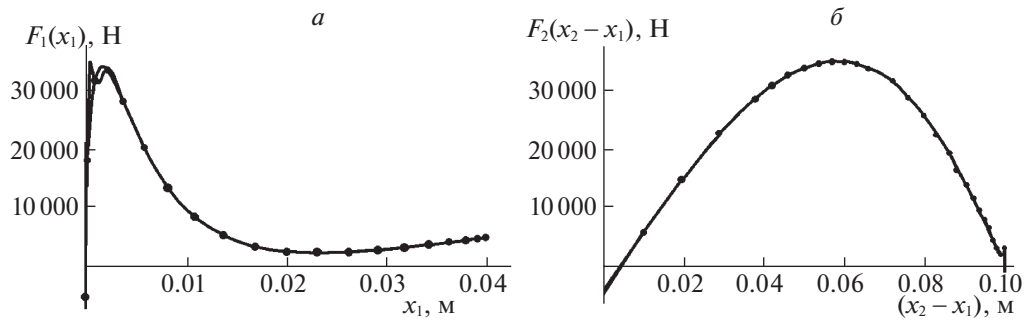


Рис. 7

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для проверки результатов аналитические зависимости (2.6), (2.7) были получены еще и таблично. Из (2.2) для выбранных с определенным шагом моментов времени t_i были найдены значения $x_1(t_i)$, $x_2(t_i)$, а из (2.4) были найдены $F_1'(t_i)$, $F_2'(t_i)$. После чего, исключив время t_i , были получены точки с координатами $\{x_{1i}, F_{1i}\}$, наложенные на зависимость, определенную по формуле (2.6) (рис. 7, а), и точки с координатами $\{(x_{2i} - x_{1i}), F_{2i}\}$, которые наложены на зависимости, полученные по формуле (2.7) (рис. 7, б), где i – натуральное число, соответствующее номеру точек. Как видно из этого рисунка, совпадение практически полное, что подтверждает правильность предыдущих расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аленченков Г.С., Пушкарев А.Э. Структурный синтез механизмов стартовых устройств беспилотных летательных аппаратов малой массы // Интеллектуальные системы в производстве. 2012. № 1. С. 5–11.
2. Пушкарев А.Э., Аленченков Г.С. Функционально-структурная модель стартовых устройств летательных аппаратов малой массы // Вестн. Ижевск. гос. техн. ун-та. 2011. № 2. С. 4–7.
3. Зотов А.Н. Исследование гидравлических вибрационных устройств для повышения эффективности работы скважинных насосов: Дис. канд. техн. наук: 05.04.07. Уфимский государственный нефтяной технический ун-т. Уфа, 1994. 121 с.
4. Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т. 2 / Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. С. 351.
5. Зотов А.Н., Валеев А.Р., Свиридов М.В., Зубкова О.Е., Ризванов Р.Г. Системы с разрывной квазиулеевой восстанавливающей силой // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 130–136.