ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, № 1, с. 68–87

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 62-50

КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МАТРИЦАМИ

© 2020 г. А. Н. Сиротин

МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.04.2019 г.
После доработки 18.08.2019 г.
Принята к публикации 23.09.2019 г.

Представлены новые результаты о свойствах управляемости для билинейных систем с дискретным временем и скалярным управлением без ограничений. Обсуждаются свойства управляемости билинейных систем с перестановочными матрицами. Впервые удалось установить и доказать необходимые и достаточные условия управляемости исследуемых систем.

DOI: 10.31857/S0002338820010126

0. Введение. Задача управляемости для динамических систем является центральной проблемой в теории систем. Под задачей управляемости обычно понимают построение допустимого управления за конечное время для произвольных начальных и терминальных векторов состояния. В этом смысле задача управляемости непосредственно связана с требованиями существования решений для разнообразных задач, например оптимизационных. Таким образом, отсутствие необходимых и достаточных условий управляемости для изучаемой системы означает невозможность корректно решать ряд задач управления.

Наиболее известный критерий управляемости для систем управления – это алгебраический критерий Калмана для автономных линейных систем с конечномерным вектором состояния и без ограничений на управление. Для общих нелинейных систем, в частности билинейных систем, исчерпывающих (полностью совпадающих) необходимых и достаточных условий управляемости к настоящему времени не имеется [1]. Целью статьи является изучение класса дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами.

Рассматривается автономная однородная билинейная система (A, B) с дискретным временем и скалярным управлением без ограничений:

$$x(k+1) = (A + u(k)B)\,x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,\ldots\}, \tag{0.1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний; $u(k) \in \mathbb{R}$ – управление в каждый момент времени k; $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – соответствующие матрицы системы.

Определение. Билинейная система (A, B) называется (вполне или полностью) управляемой, если для произвольной пары векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеется хотя бы один конечный набор допустимых управлений $\{u(0),\ldots,u(K-1)\} \in \mathbb{R}^K$ и число шагов $K \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, такие, что $x(0) = \xi$, $x(K) = \eta$.

В статье обсуждаются необходимые и достаточные условия класса дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами, т.е. для квадратных матриц системы A и B выполняется равенство $AB = BA$.

1. Некоторые необходимые условия управляемости. Для специального класса билинейных систем с перестановочными матрицами есть возможность установить некоторые конструктивные результаты, касающиеся необходимых условий. Соответствующие утверждения используют аппарат матричных вычислений и классические результаты линейной алгебры. Таким образом, для управляемых билинейных систем с перестановочными матрицами удается выявить ограничения на размерность вектора состояния, а также построить каноническое разложение матриц системы.

Для билинейной системы (A, B) с дискретным временем естественным образом вводится множество достижимости $\mathcal{Y}(K,\xi) \subset \mathbb{R}^n$ из начального состояния $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ за $K \in \mathbb{N}$ шагов как множество вида

$$\mathcal{Y}(K,\xi)= \{y \in \mathbb{R}^n : y = (A + u(K-1)B)\cdots(A + u(0)B)\xi\}.$$

Далее строится (предельное) множество достижимости из состояния ξ:

$$\mathcal{Y}(\xi) = \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}(K,\xi).$$

Таким образом, билинейная система (A, B) является управляемой, только если для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верно равенство

$$\mathcal{Y}(\xi) = \mathbb{R}^n.$$

Полезно использовать соответствующие простейшие условия управляемости. Если билинейная система (A, B) является управляемой, тогда для всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верно

$$\dim \mathrm{Lin}\mathcal{Y}(\xi) = n,$$

где $\mathrm{Lin}\mathcal{Y}(\xi)$ – линейная оболочка системы векторов, образующих множество $\mathcal{Y}(\xi)$. Если же верно неравенство

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dim \mathrm{Lin}\mathcal{Y}(\xi) < n, \tag{1.1}$$

тогда билинейная система (A, B) не является управляемой.

Т е о р е м а 1. Пусть билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – управляемая, тогда $n \le 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо утверждение ([2, гл. 1, § 1.3, лемма 1.3.17; 3, гл. IX, § 10, лемма 1]): перестановочные матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ всегда имеют общий ненулевой вектор $\xi^* \in \mathbb{C}^n$, являющийся собственным вектором каждой матрицы. Пусть

$$\xi^* = \xi^1 + i\xi^2; \quad \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n, \quad i^2 = -1. \tag{1.2}$$

По построению вектор ξ^* отвечает собственным значениям

$$\alpha = \lambda_A + i\mu_A, \quad \beta = \lambda_B + i\mu_B; \quad \lambda_A, \lambda_B, \mu_A, \mu_B \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

матриц A и B соответственно. Поэтому верны равенства

$$A\xi^* = \alpha\xi^*, \quad B\xi^* = \beta\xi^* \tag{1.4}$$

или подробнее:

$$\begin{aligned} A\xi^1 &= \lambda_A\xi^1 - \mu_A\xi^2, \quad A\xi^2 = \mu_A\xi^1 + \lambda_A\xi^2, \\ B\xi^1 &= \lambda_B\xi^1 - \mu_B\xi^2, \quad B\xi^2 = \mu_B\xi^1 + \lambda_B\xi^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Следовательно, для произвольного вектора $\xi \in \mathrm{Lin}\{\xi^1, \xi^2\}$ справедливы включения $A\xi$, $B\xi \in \mathrm{Lin}\{\xi^1, \xi^2\}$. Если вектор ξ^* оказывается вещественным, тогда считается $\xi^2 = 0$.

Допустим, система (A, B) является управляемой и одновременно $n > 2$. Тогда верно включение

$$\mathcal{Y}(\xi) \subset \mathrm{Lin}\{\xi^1, \xi^2\} \quad \text{при} \quad \xi \in \mathrm{Lin}\{\xi^1, \xi^2\}$$

и поэтому

$$\dim \mathrm{Lin}\mathcal{Y}(\xi) \le 2 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathrm{Lin}\{\xi^1, \xi^2\}.$$

Используем неравенство (1.1)

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dim \mathrm{Lin}\mathcal{Y}(\xi) \le 2 < n$$

и приходим к выводу, что система (A, B) не является управляемой.

Противоречие доказывает теорему 1.

Другие доказательства этого факта можно найти в [4, 5].

Управляемые билинейные одномерные системы ($n = 1$) не представляют собой интереса, поэтому последующие результаты будут касаться систем (A, B) при $n = 2$.

Для вещественного числа t ортогональная матрица $R(t) \in \mathrm{SO}(2)$, как известно, определяется по формуле

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Совокупность всех собственных значений матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, берущихся с их кратностями, называется спектром матрицы C и обозначается через $\sigma(C) \subset \mathbb{C}$.

Т е о р е м а 2. Пусть $n = 2$ и билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой. Тогда справедливы утверждения:

$$\text{(i) } \sigma(A) = \{\alpha, \bar{\alpha}\}, \quad \sigma(B) = \{\beta, \bar{\beta}\}; \quad \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \quad \operatorname{Im}\beta \neq 0; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

(ii) Пусть собственные значения матриц A и B представлены в тригонометрической форме

$$\alpha = r_1 \cos\varphi_1 + ir_1 \sin\varphi_1, \quad \beta = r_2 \cos\varphi_2 + ir_2 \sin\varphi_2. \tag{1.7}$$

Тогда верны неравенства

$$r_j > 0, \quad \sin^2\varphi_j > 0; \quad j = 1, 2; \quad \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) > 0 \tag{1.8}$$

и верны разложения

$$A = r_1 PR(\varphi_1) P^{-1}, \quad B = r_2 PR(\varphi_2) P^{-1}, \tag{1.9}$$

где $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ – некоторая невырожденная матрица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся рассуждениями из доказательства теоремы 1, а также формулами (1.2)–(1.5) и соответствующими обозначениями.

(i) Пусть $\alpha \in \sigma(A)$, $\beta \in \sigma(B)$, тогда собственные значения α, β матриц A, B, отвечающие собственному вектору ξ^*, не могут быть вещественными.

Действительно, предположим противное и пусть $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = 0$. Тогда из (1.3) имеем

$$\mu_A = \mu_B = 0$$

и из (1.5) получаем соотношения

$$A\xi^1 = \lambda_A \xi^1, \quad B\xi^1 = \lambda_B \xi^1; \quad A\xi^2 = \lambda_A \xi^2, \quad B\xi^2 = \lambda_B \xi^2.$$

Таким образом, по построению

$$\dim \operatorname{Lin} \mathcal{Y}(\xi^j) \le 1 < 2 = n, \quad j = 1, 2.$$

Вектор ξ^* по определению ненулевой и поэтому хотя бы один вещественный вектор из ξ^1, ξ^2 также обязан быть ненулевым. Используя неравенство (1.1), приходим к выводу, что система (A, B) не является управляемой. Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, $\operatorname{Im}\beta \neq 0$.

Далее, из (1.4) получаем

$$A\bar{\xi}^* = \bar{\alpha}\bar{\xi}^*, \quad B\bar{\xi}^* = \bar{\beta} \cdot \bar{\xi}^*$$

и, следовательно, по определению $\bar{\alpha} \in \sigma(A)$, $\bar{\beta} \in \sigma(B)$. Числа α и β не являются вещественными, поэтому $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $\beta \neq \bar{\beta}$. Таким образом, получаем $\sigma(A) = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$, $\sigma(B) = \{\beta, \bar{\beta}\}$.

(ii) Разложение (1.2) комплексного вектора ξ^* соответствует линейно независимым вещественным векторам ξ^1 и ξ^2.

Рассуждаем от противного. Предположим, что векторы ξ^1 и ξ^2 линейно зависимы. В этом случае найдутся комплексное число γ и ненулевой вещественный вектор $\tilde{\xi} \in \mathrm{Lin}\{\xi^1, \xi^2\}$, такие, что справедливо равенство

$$\xi^* = \gamma\tilde{\xi}.$$

Поскольку комплексный вектор ξ^* является общим собственным вектором матриц A, B, то соответствующий вещественный вектор $\tilde{\xi}$ также обязан быть общим собственным вектором матриц A и B. Одновременно собственные значения $\alpha \in \sigma(A)$, $\beta \in \sigma(B)$ соответствуют собственному вектору $\tilde{\xi}$, т.е.

$$A\tilde{\xi} = \alpha\tilde{\xi}, \quad B\tilde{\xi} = \beta\tilde{\xi}.$$

Теперь из (1.3) получаем

$$A\tilde{\xi} = \lambda_A\tilde{\xi}, \quad A\tilde{\xi} = \mu_A\tilde{\xi},$$
$$B\tilde{\xi} = \lambda_B\tilde{\xi}, \quad B\tilde{\xi} = \mu_B\tilde{\xi}.$$

Следовательно, верно включение

$$\mathcal{Y}(\tilde{\xi}) \subset \mathrm{Lin}\{\tilde{\xi}\},$$

из которого вытекает неравенство

$$\dim \mathrm{Lin}\mathcal{Y}(\tilde{\xi}) \le 1 < 2 = n.$$

В силу неравенства (1.1) билинейная система (A, B) не является управляемой, что противоречит предположению теоремы 2.

Таким образом, система векторов ξ^1, ξ^2 линейно независима, что приводит к возникновению подобия специального вида для перестановочных матриц A и B.

Действительно, определим невырожденную матрицу

$$P = (\xi^1|\xi^2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Поэтому уравнения (1.5) могут быть записаны в виде матричных равенств

$$AP = PC(\lambda_A, \mu_A), \quad BP = PC(\lambda_B, \mu_B),$$

где используется обозначение

$$C(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Теперь, из (1.7) и (1.3) следуют соотношения

$$C(\lambda_A, \mu_A) = r_1 R(\varphi_1), \quad C(\lambda_B, \mu_B) = r_2 R(\varphi_2)$$

и получаем требуемое разложение (1.9).

Используя формулы (1.7), из неравенств (1.6) находим соответствующие неравенства (1.8). Наконец, поскольку билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой, то по теореме 2 [5] справедливо соотношение $\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$.

Теорема 2 доказана.

Таким образом, для билинейных управляемых систем с перестановочными матрицами при $n = 2$ собственные значения матриц A, B составляют пары комплексно-сопряженных чисел, поэтому

$$r_1 = \rho(A), \quad r_2 = \rho(B),$$

где $\rho(A)$, $\rho(B)$ – спектральные радиусы соответствующих матриц A и B.

Билинейные системы (A, B) связаны с алгебраической конструкцией, известной [3, гл. XII, §1] как пучок матриц. Пучок матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется как матричное отображение $h_{A,\,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ в виде

$$h_{A,B}(t) = A + tB. \tag{1.10}$$

Поэтому уравнение (0.1) может быть переписано следующим образом:

$$x(t+1) = h_{A,B}(u(k))\,x(k).$$

Пучок $h_{A,B}$ называется регулярным, если имеется вещественное число τ, такое, что

$$\det h_{A,B}(\tau) \neq 0.$$

В противном случае пучок матриц называется сингулярным.

Опишем некоторые свойства пучков матриц, связанных с управляемыми дискретными билинейными системами с перестановочными матрицами.

Введем для удобства обозначения

$$R_1 = R(\varphi_1), \quad R_2 = R(\varphi_2), \quad \theta = \varphi_1 - \varphi_2, \quad R_0 = R(\theta)$$

и определим матричную функцию $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ по формуле

$$H(t) = r_1 R_0 + r_2 t I, \tag{1.11}$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности. Поэтому, воспользовавшись разложением (1.9), получаем

$$\begin{aligned} h_{A,B}(t) = A + tB = r_1 P R_1 P^{-1} + r_2 t P R_2 P^{-1} = P R_2 [r_1 R_2^{\mathrm{T}} R_1 + r_2 t I] P^{-1} = \\ = P R_2 H(t) P^{-1} = P H(t) R_2 P^{-1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь использовались свойства коммутативных матриц и свойства ортогональных матриц из SO(2):

$$R_1 R_2 = R_2 R_1, \quad R_2^{-1} = R_2^{\mathrm{T}}, \quad R_2^{\mathrm{T}} R_1 = R(\varphi_1 - \varphi_2) = R_0,$$
$$H(t) R_2 = (r_1 R_0 + r_2 t I) R_2 = r_1 R_0 R_2 + r_2 t R_2 = r_1 R_2 R_0 + r_2 t R_2 = R_2 (r_1 R_0 + r_2 t I) = R_2 H(t).$$

С л е д с т в и е 1. Пусть $n = 2$ и билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой. Тогда для каждого вещественного t справедливы утверждения:

$$\text{(i)} \ \det h_{A,B}(t) > 0 \tag{1.13}$$

и, следовательно, пучок матриц A, B регулярный;

$$\text{(ii)} \ \det h_{A,B}(t) = \det H(t) = \rho^2(h_{A,B}(t)) = \rho^2(H(t)) = \|H(t)\|_2^2. \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) По построению матриц $h_{A,B}(t)$ и $H(t)$ имеем равенство

$$\det h_{A,B}(t) = \det[P^{-1} R_2 H(t) P] = \det P^{-1} \det R_2 \det H(t) \det P = \det H(t),$$

поскольку $R_2 \in \mathrm{SO}(2)$, поэтому

$$\det R_2 = 1.$$

Теперь воспользуемся формулой (1.11) и представлением матрицы вращения из $\mathrm{SO}(2)$:

$$\begin{aligned} \det H(t) = \det[r_1 R_0 + r_2 t I] = \det\left[r_1 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + r_2 t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \\ = \det\begin{pmatrix} r_1\cos\theta + r_2 t & r_1 \sin\theta \\ -r_1\sin\theta & r_1\cos\theta + r_2 t \end{pmatrix} = (r_2 t)^2 + 2(r_2 t) r_1 \cos\theta + r_1^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Уравнение

$$\det H(t) = 0,$$

или эквивалентно

$$(r_2t)^2 + 2(r_2t)r_1\cos\theta + r_1^2 = 0, \tag{1.16}$$

представляет собой квадратное уравнение относительно переменной r_2t. Вычислим соответствующий дискриминант

$$D_{A,B} = -4r_1^2\sin^2\theta. \tag{1.17}$$

Поскольку билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой, то по теореме 2 из [5] справедливо соотношение $\sin^2\theta > 0$. В силу неравенств (1.8) получаем $D_{A,B} < 0$, поэтому у квадратного уравнения (1.16) вещественных корней нет. Поскольку

$$\det H(0) = r_1^2 > 0,$$

то требуемое неравенство (1.13) получено.

(ii) Построим соответствующий характеристический многочлен матрицы $h_{A,B}(t)$. Для этого выполним требуемые преобразования:

$$\det(h_{A,B}(t) - \lambda I) = \det[A + tB - \lambda I] = \det[P^{-1}(r_1R_1 + r_2tR_2)P - \lambda P^{-1}P] =$$
$$= \det[r_1R_1 + (r_2t)R_2 - \lambda I],$$

где λ — некоторое комплексное число. Далее получаем по определению

$$\det(h_{A,B}(t) - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} r_1\cos\varphi_1 + (r_2t)\cos\varphi_2 - \lambda & r_1\sin\varphi_1 + (r_2t)\sin\varphi_2 \\ -r_1\sin\varphi_1 - (r_2t)\sin\varphi_2 & r_1\cos\varphi_1 + (r_2t)\cos\varphi_2 - \lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (r_1\cos\varphi_1 + (r_2t)\cos\varphi_2 - \lambda)^2 + (r_1\sin\varphi_1 + (r_2t)\sin\varphi_2)^2 =$$
$$= r_1^2 + (r_2t)^2 + 2r_1r_2t(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - 2(r_1\cos\varphi_1 + (r_2t)\cos\varphi_2)\lambda + \lambda^2.$$

В этом случае характеристическое уравнение относительно переменной λ запишем в виде

$$\lambda^2 - 2(r_1\cos\varphi_1 + (tr_2)\cos\varphi_2)\lambda + r_1^2 + (r_2t)^2 + 2r_1r_2t(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = 0. \tag{1.18}$$

Вычислим соответствующий дискриминант

$$\frac{1}{4}\tilde{D}_{A,B} = (r_1\cos\varphi_1 + (r_2t)\cos\varphi_2)^2 - [r_1^2 + (r_2t)^2 + 2r_1r_2t(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1^2\cos^2\varphi_1 + (r_2t)^2\cos^2\varphi_2 - r_1^2 - (r_2t)^2 - 2r_1r_2t\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = -(r_1\sin\varphi_1 + (r_2t)\sin\varphi_2)^2.$$

По определению собственными значениями матрицы $A + tB$ являются корни $\lambda_{1,2}$ уравнения (1.18). Следовательно, после несложных преобразований получаем

$$\lambda_{1,2} = (r_1\cos\varphi_1 + (r_2t)\cos\varphi_2) \pm i(r_1\sin\varphi_1 + (r_2t)\sin\varphi_2),$$

поэтому

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = (r_2t)^2 + 2(r_2t)r_1\cos\theta + r_1^2 = \det h_{A,B}(t).$$

Это означает, что доказано требуемое равенство

$$\rho^2(h_{A,B}(t)) = \max\{|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2\} = \det h_{A,B}(t).$$

Построим теперь характеристический многочлен матрицы $H(t)$ и сделаем требуемые преобразования:

$$\det(H(t) - \lambda I) = \det[r_1R_0 + (r_2t - \lambda)I] = \det[r_1R_0 + r_2(t - r_2^{-1}\lambda)I] = \det H(t - r_2^{-1}\lambda).$$

Далее получаем из определения (1.11)

$$\det H(t - r_2^{-1}\lambda) = \det\begin{pmatrix} r_1\cos\theta + r_2(t - r_2^{-1}\lambda) & r_1\sin\theta \\ -r_1\sin\theta & r_1\cos\theta + r_2(t - r_2^{-1}\lambda)\end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} r_1\cos\theta + r_2 t - \lambda & r_1\sin\theta \\ -r_1\sin\theta & r_1\cos\theta + r_2 t - \lambda\end{pmatrix} = (r_2 t - \lambda)^2 + 2(r_2 t - \lambda)r_1\cos\theta + r_1^2.$$

В этом случае характеристическое уравнение запишем как

$$(r_2 t - \lambda)^2 + 2(r_2 t - \lambda)r_1\cos\theta + r_1^2 = 0. \tag{1.19}$$

Дискриминант этого квадратного уравнения относительно переменной $r_2 t - \lambda$ совпадает с (1.17). По определению собственными значениями матрицы $H(t)$ являются корни $\lambda_{1,2}$ уравнения (1.19). Следовательно, после несложных преобразований получаем

$$\lambda_{1,2} = (r_2 t + r_1\cos\theta) \pm i r_1\sin\theta,$$

поэтому

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = (r_2 t)^2 + 2(r_2 t)r_1\cos\theta + r_1^2 = \det h_{A,B}(t).$$

Следовательно, величина

$$\rho(H(t)) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

определяется правой частью соотношения (1.15).

Наконец, по определению спектральной нормы матрицы $H(t)$ имеем

$$\|H(t)\|_2 = \max\left\{\sqrt{\mu} : \mu - \text{собственное значение матрицы } H^{\mathrm{T}}(t)H(t)\right\},$$

поэтому

$$\|H(t)\|_2^2 = \rho(H^{\mathrm{T}}(t)H(t)) = \rho((r_1R_0 + r_2 tI)^{\mathrm{T}}(r_1R_0 + r_2 tI)) =$$
$$= \rho((r_2 t)^2 I + (R_0 + R_0^{\mathrm{T}})r_1(r_2 t) + r_1^2 I) = \rho(\det h_{A,B}(t)I) = \det h_{A,B}(t).$$

Следствие 1 доказано.

Таким образом, доказаны две теоремы, описывающие частичные необходимые условия управляемых дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами. Утверждение теоремы 1 означает, что класс изучаемых управляемых билинейных систем сильно ограничен, а размерность векторов состояния таких систем может быть либо $n = 1$, либо $n = 2$. Утверждение теоремы 2 однозначно описывает спектр и разложение матриц изучаемых управляемых билинейных систем. При $n = 2$ собственные значения матриц системы составляют пары комплексно-сопряженных чисел, а сами матрицы одновременно подобны матрицам SO(2) вращения с точностью до скаляров. Как оказалось, билинейные системы связаны с алгебраической конструкцией, известной как пучок матриц. Установлено, что при $n = 2$ пучок матриц, порождаемый управляемой билинейной системой с перестановочными матрицами, является регулярным.

2. Необходимые и достаточные условия управляемости. Как оказывается, класс дискретных управляемых билинейных систем с перестановочными матрицами в настоящее время представляет собой исключительный случай среди всех остальных билинейных систем. Действительно, для этого класса систем имеется возможность однозначно установить и доказать необходимые и достаточные условия управляемости. Для одномерных билинейных систем соответствующие условия управляемости устанавливаются тривиально. Критерием управляемости двумерных билинейных систем с перестановочными матрицами является одновременное выполнение двух строгих неравенств, связанных со спектральными характеристиками матриц системы. Поскольку управляемых билинейных систем изучаемого класса при $n \geq 3$ не существует, то естественным образом получаются соответствующие необходимые и достаточные условия управляемости для всех произвольных билинейных систем с перестановочными матрицами.

Т е о р е м а 3. Пусть $n = 1$. Билинейная система (A, B) является управляемой в том и только в том случае, когда справедливо неравенство

$$B \neq 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Необходимость. Рассуждения проведем от противного. Допустим, для управляемой билинейной системы (A, B) при $n = 1$ верно равенство $B = 0$. Тогда по построению (0.1) имеем

$$x(k+1) = A^{k+1}x(0), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, для произвольного допустимого начального вектора состояний $x(0) = \xi$ получаем представление множества достижимости в виде

$$\mathcal{Y}(\xi) = \{y : y = A^k\xi,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Неравенство

$$\mathcal{Y}(\xi) \neq \mathbb{R}$$

справедливо, поскольку множество чисел из $\mathcal{Y}(\xi)$ счетно по построению и поэтому не может совпадать с несчетным множеством $\mathbb{R}$. Полученное противоречие доказывает необходимость неравенства (2.1).

Достаточность. Пусть верно (2.1). Выберем скалярное управление

$$u(0) = (\eta\xi^{-1} - A)B^{-1}; \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Тогда получаем естественное равенство

$$\eta = (A + u(0)B)\xi, \quad x(0) = \xi, \quad x(1) = \eta.$$

Поэтому

$$\mathcal{Y}(1,\xi) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{Y}(1,\xi) \subset \mathcal{Y}(\xi) \subset \mathbb{R},$$

т.е. $\mathcal{Y}(\xi) = \mathbb{R}$ и система (A, B) является управляемой.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $n = 2$. Билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой тогда и только тогда, когда одновременно справедливы условия теоремы 2 и выполняются неравенства

$$\rho(B) > 0, \tag{2.2}$$

$$0 < \rho^2(A)\sin^2\theta < 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой, то по теореме 2 из [5] справедливо соотношение $\sin^2\theta > 0$. Теперь неравенства

$$\rho(B) > 0, \quad \rho^2(A)\sin^2\theta > 0$$

следуют из соотношений (1.8) теоремы 2.

Из (0.1) и представления (1.9) получаем для $K \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered} x(K) = (A + u(K-1)B)\cdots(A + u(0)B)x(0) = \\ = P(r_1R_1 + u(K-1)r_2R_2)P^{-1}\cdots P(r_1R_1 + u(0)r_2R_2)P^{-1}x(0) = \\ = P(r_1R_0 + u(K-1)R_2I)\cdots(r_1R_0 + u(0)r_2I)R_2^KP^{-1}x(0) = \\ = PH(u(K-1))\cdots H(u(0))R_2^KP^{-1}x(0). \end{gathered} \tag{2.4}$$

По условию билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой, поэтому для произвольных допустимых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ найдется число шагов $K \in \mathbb{N}$ при $x(0) = \xi$, $x(K) = \eta$ и соответствующий конечный набор вещественных управлений $\{u(0), \ldots, u(K-1)\}$, такие, что верно равенство

$$P^{-1}\eta = H(u(K-1))\cdots H(u(0))R_2^KP^{-1}\xi. \tag{2.5}$$

В силу (1.13), (1.14) получаем, что для вещественных чисел u матрицы $H(u)$ невырождены. Поэтому из (2.5) вытекает равенство

$$R_2^K P^{-1}\xi = H^{-1}(u(0))\cdots H^{-1}(u(K-1))\,P^{-1}\eta. \tag{2.6}$$

Система (A, B) по условию является управляемой, поэтому должно быть верно неравенство

$$\sup_u \|H^{-1}(u)\|_2 > 1. \tag{2.7}$$

Действительно, рассуждения проведем от противного. Допустим, для произвольного вещественного числа u верно соотношение

$$\|H^{-1}(u)\|_2 \le 1. \tag{2.8}$$

По предположению об управляемости системы (A, B) допустимые векторы ξ, η можно выбрать любым образом. Например, определим векторы ξ и η так, чтобы выполнялись условия

$$\left\|R_2^K P^{-1}\xi\right\|_2 = \left\|P^{-1}\xi\right\|_2 = 2, \quad \left\|P^{-1}\eta\right\|_2 = 1.$$

Здесь существенно использование спектральной нормы. Тогда должно существовать какое-либо управление $\{u(0),\ldots,u(K-1)\}$, для которого выполняется равенство (2.6). Воспользуемся свойствами норм, тогда из (2.8) получаем

$$\begin{gathered} 2 = \left\|P^{-1}\xi\right\|_2 = \left\|R_2^K P^{-1}\xi\right\|_2 = \left\|H^{-1}(u(0))\cdots H^{-1}(u(K-1))\,P^{-1}\eta\right\|_2 \le \\ \le \left\|H^{-1}(u(0))\right\|_2 \cdots \left\|H^{-1}(u(K-1))\right\|_2 \left\|P^{-1}\eta\right\|_2 \le \left\|P^{-1}\eta\right\|_2 \le 1. \end{gathered}$$

Это неравенство невозможно, поэтому предположение (2.8) недопустимо. Следовательно, неравенство (2.7) установлено.

Теперь по построению получаем

$$\begin{gathered} H^{-1}(u) = (r_1R_2 + ur_2I)^{-1} = \begin{pmatrix} r_1\cos\theta + ur_2 & r_1\sin\theta \\ -r_1\sin\theta & r_1\cos\theta + ur_2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \det{}^{-1} H(u)\begin{pmatrix} r_1\cos\theta + ur_2 & -r_1\sin\theta \\ r_1\sin\theta & r_1\cos\theta + ur_2 \end{pmatrix} = H^{\mathrm{T}}(u)\det{}^{-1} H(u). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Воспользуемся определением спектральной нормы матрицы:

$$\begin{gathered} \|H^{-1}(u)\|_2^2 = \rho(H^{-\mathrm{T}}(u)\,H^{-1}(u)) = \rho(H(u)\,H^{\mathrm{T}}(u)\det{}^{-2} H(u)) = \det{}^{-2} H(u)\rho(H(u)\,H^{\mathrm{T}}(u)) = \\ = \det{}^{-2} H(u)\rho((r_1R_0 + r_2uI)(r_1R_0 + ur_2I)^{\mathrm{T}}) = \det{}^{-2} H(u)\rho((r_2u)^2 I + (R_0 + R_0^{\mathrm{T}})r_1(r_2u) + r_1^2 I) = \\ = \det{}^{-2} H(u)\rho(\det H(u)\,I) = \det{}^{-1} H(u). \end{gathered}$$

Таким образом, из (2.7) находим неравенство

$$\sup_u \det{}^{-1/2} H(u) > 1,$$

которое равносильно соотношению

$$\inf_u \det H(u) < 1. \tag{2.10}$$

Оптимизационная задача в левой части неравенства может быть решена явным образом. Действительно, из (1.15) имеем

$$\inf_u \det H(u) = \inf_u[(r_2u)^2 + 2(r_2u)\,r_1\cos\theta + r_1^2].$$

Функция $\det H(u)$ есть квадратный многочлен от переменной u, верно неравенство (1.13) и поэтому точная нижняя грань достигается в единственной точке $\hat{u}$:

$$\inf_u \det H(u) = \min_u[(r_2u)^2 + 2(r_2u)\,r_1\cos\theta + r_1^2] = (r_2\hat{u})^2 + 2(r_2\hat{u})\,r_1\cos\theta + r_1^2,$$

где

$$\hat{u} = -r_1 r_2^{-1} \cos\theta. \tag{2.11}$$

Далее

$$\inf_u \det H(u) = r_1^2 \sin^2\theta. \tag{2.12}$$

Теперь из (2.12) и (2.9) вытекает требуемое неравенство

$$\rho^2(A)\sin^2\theta < 1.$$

Необходимость теоремы 4 доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы 2 и справедливы неравенства (2.2), (2.3). Рассуждения удобно разделить на несколько вспомогательных утверждений. Для этого введем сопутствующие обозначения.

Выберем произвольно векторы $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и определим бесконечную последовательность $\{\gamma_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ вещественных чисел, определяемых по формулам

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1, \\ \gamma_m &= (r_1 \sin\theta)^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Найдем также матрицу

$$F(\hat{\xi}) \equiv F = \left(r_1 R_0 \hat{\xi} \middle| \hat{\xi}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{2.14}$$

В силу предположений (2.2), (2.3) матрица F невырождена, поскольку векторы $r_1 R_0 \hat{\xi}$ и $\hat{\xi}$ линейно независимы.

Лемма 1. Имеется хотя бы одно вещественное число u_2^*, для которого верно неравенство

$$(e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1} H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} \neq 0, \quad e^1 = (1,0)^{\mathrm{T}}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Рассуждения проведем от противного. Допустим, для каждого вещественного числа u верно равенство

$$(e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1} H^{-1}(u)\hat{\eta} = 0.$$

Это возможно только в одном случае, когда

$$F^{-1} H^{-1}(u)\hat{\eta} \in \mathrm{Lin}\{e^2\} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad e^2 = (0,1)^{\mathrm{T}}. \tag{2.16}$$

Воспользуемся подробной записью формулы (2.9):

$$F^{-1} H^{-1}(u)\hat{\eta} = [\det^{-1} H(u)] F^{-1} H^{\mathrm{T}}(u)\hat{\eta} = [\det^{-1} H(u)](r_1 F^{-1} R_0^{\mathrm{T}}\hat{\eta} + u r_2 F^{-1}\hat{\eta}). \tag{2.17}$$

Из (2.16) при $u = 0$ получаем включение

$$r_1 F^{-1} R_0^{\mathrm{T}} \hat{\eta} \in \mathrm{Lin}\{e^2\}.$$

Из (2.2) и (2.3) имеем $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $R_0^T \neq I$, поэтому векторы $r_1 F^{-1} R_0^{\mathrm{T}}\hat{\eta}$ и $r_2 F^{-1}\hat{\eta}$ линейно независимы. Таким образом,

$$r_1 F^{-1} R_0^{\mathrm{T}}\hat{\eta} \in \mathrm{Lin}\{e^2\}, \quad r_2 F^{-1}\hat{\eta} \notin \mathrm{Lin}\{e^2\},$$

следовательно, для любого $u \neq 0$ справедливо заключение

$$r_1 F^{-1} R_0^{\mathrm{T}}\hat{\eta} + u r_2 F^{-1}\hat{\eta} \notin \mathrm{Lin}\{e^2\}.$$

Наконец, приходим к выводу

$$F^{-1} H^{-1}(u)\hat{\eta} \notin \mathrm{Lin}\{e^2\}, \quad u \neq 0.$$

Противоречие установлено, лемма 1 доказана.

Число u_2^* из леммы 1 может быть определено не единственным образом. Действительно, справедливо соотношение

$$u_2^* = \begin{cases} \hat{c}_1, \quad \text{если} \quad (e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1}\hat{\eta} = 0, \\ -\dfrac{r_1(e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1} R_0^T \hat{\eta}}{r_2(e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1}\hat{\eta}} + \hat{c}_2, \quad \text{если} \quad (e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1}\hat{\eta} \neq 0, \end{cases}$$

где $\hat{c}_1, \hat{c}_2 \neq 0$ – произвольные вещественные постоянные. Здесь достаточно воспользоваться (2.17) и неравенством

$$\left|r_1(e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1} R_0^{\mathrm{T}}\hat{\eta}\right| + \left|r_2(e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1}\hat{\eta}\right| \neq 0,$$

которое вытекает из линейной независимости векторов $r_1 F^{-1} R_0^{\mathrm{T}}\hat{\eta}$ и $r_2 F^{-1}\hat{\eta}$.

Определим бесконечные последовательности $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ вещественных чисел по формуле

$$\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = F^{-1} R\big(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m\big)\, H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} \in \mathbb{R}^2, \tag{2.18}$$

где число u_2^* выбирается из леммы 1. В этом случае неравенство (2.13) преобразуется при $m = 0$ к виду

$$a_0 = (e^1)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = (e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1} R(0)\, H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} = (e^1)^{\mathrm{T}} F^{-1} H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} \neq 0. \tag{2.19}$$

Положим также

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -r_1^2 F^{-1} R_0^2 \hat{\xi} \in \mathbb{R}^2. \tag{2.20}$$

Л е м м а 2. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует бесконечная подпоследовательность $\mathcal{F}(\varepsilon) = \{m_k\} \subset \mathbb{Z}_+$, такая, что

$$\begin{gathered} \left|a_{m_k} - a_0\right| \leq \varepsilon, \quad \left|b_{m_k} - b_0\right| \leq \varepsilon, \\ 0 \in \mathcal{F}(\varepsilon), \quad \forall m_k \in \mathcal{F}(\varepsilon). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо рассмотреть две ситуации. Пусть сначала число $-(\varphi_2 + \pi/2)$ соизмеримо с 2π, т.е.

$$-(\varphi_2 + \pi/2) = 2\pi\frac{M}{N}, \quad M \in \mathbb{Z}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$m_k = kN, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.22}$$

В этом случае

$$R\big(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\big) = R(2\pi k M) = R(0) = I$$

и равенства (2.18) преобразуются к виду

$$\begin{pmatrix} a_{m_k} \\ b_{m_k} \end{pmatrix} = F^{-1} R\big(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\big)\, H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} = F^{-1} H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому последовательность (2.22) обладает требуемыми условиями из (2.21).

Пусть теперь число $-(\varphi_2 + \pi/2)$ несоизмеримо с 2π, т.е.

$$-(\varphi_2 + \pi/2) \neq 2\pi\frac{M}{N}, \quad M \in \mathbb{Z}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся теоремой Пуанкаре [5, с. 67] о возвращении. Из приложения теоремы Пуанкаре [6, с. 68] приходим к выводу, что множество точек $\{R(-(\varphi_2 + \pi/2)m)\bar{x}\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ из $\bar{x} \in \mathrm{S}^1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y^{\mathrm{T}} y = 1\}$ всюду плотно на окружности S^1. Иными словами,

$$\forall\delta > 0, \quad \exists m : \left\| R\left(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m\right) \bar{x} - \bar{x}\right\|_2 \le \delta$$

для каждого вектора $\bar{x} \in \mathrm{S}^1$. Таким образом, может быть образована последовательность

$$\mathcal{F}(\delta) = \left\{ m_k \in \mathbb{Z}_+ : \left\| R\left(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\right) \bar{x} - \bar{x}\right\|_2 \le \delta \right\}, \quad \forall\delta > 0, \quad \bar{x} \in \mathrm{S}^1. \tag{2.23}$$

Выберем число ε из условий

$$\varepsilon = \|F^{-1}\|_2 \|H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}\|_2 \delta, \quad 0 < \varepsilon < |a_0| \tag{2.24}$$

для допустимых $\delta > 0$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \left|a_{m_k} - a_0\right| \le \varepsilon, \quad \left|b_{m_k} - b_0\right| \le \varepsilon, \\ a_0 \ne 0, \quad 0 \in \mathcal{F}(\varepsilon), \quad \forall m_k \in \mathcal{F}(\varepsilon). \end{gathered} \tag{2.25}$$

Формулы (2.25) и (2.21) отличаются тем, что условие $a_{m_k} \ne 0$ выполняется в (2.21) для всех $m_k \in \mathcal{F}(\varepsilon)$, а в (2.25) требуется выполнение неравенства $a_0 \ne 0$, т.е. при $m_k = 0$.

Для каждого числа $m_k \in \mathcal{F}(\varepsilon)$ имеем из (2.18)

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{m_k} \\ b_{m_k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \|F^{-1} R\left(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\right) H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta} - F^{-1} H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}\|_2 =$$

$$= \|F^{-1}\left[R\left(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\right) - I\right] H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}\|_2 \le \|F^{-1}\|_2 \|\left[R\left(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\right) - I\right] H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}\|_2.$$

Положим

$$\bar{x} = \frac{H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}}{\|H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}\|_2} \in \mathrm{S}^1.$$

Поскольку $H(u_2^*)$ – невырожденная матрица, $\hat{\eta} \ne 0$, то $H^1(u_2^*)\hat{\eta} \ne 0$ и определение корректно. Тогда далее из (2.24) получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{m_k} \\ b_{m_k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right\|_2 \le \|F^{-1}\|_2 \|H^{-1}(u_2^*)\hat{\eta}\|_2 \left\| R\left(-(\varphi_2 + \pi/2)\, m_k\right) x - x\right\|_2 \le \varepsilon.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\max\{\left|a_{m_k} - a_0\right|^2, \left|b_{m_k} - b_0\right|^2\} \le \left\| \begin{pmatrix} a_{m_k} \\ b_{m_k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \le \varepsilon^2,$$

что приводит к появлению требуемого результата (2.25).

Лемма 2 доказана.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ введем множество

$$\mathcal{X}(\varepsilon) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a_0| \le \varepsilon, |y - b_0| \le \varepsilon\right\}. \tag{2.26}$$

По построению $\mathcal{X}(\varepsilon) \ne \varnothing$.

С л е д с т в и е 2. Пусть $\varepsilon \in (0, |a_0|)$, тогда

$$x \ne 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}(\varepsilon). \tag{2.27}$$

Поэтому для каждого $\varepsilon \in (0, |a_0|)$ имеется бесконечная подпоследовательность $\mathcal{F}(\varepsilon) = \{m_k\} \subset \mathbb{Z}_+$, такая, что

$$\left(a_{m_k}, b_{m_k}\right) \in \mathcal{X}(\varepsilon), \tag{2.28}$$

$$a_{m_k} \ne 0, \quad \forall m_k \in \mathcal{F}(\varepsilon). \tag{2.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x, y) \in \mathscr{X}(\varepsilon)$ и $\varepsilon \in (0, |a_0|)$. Тогда должны быть одновременно выполнены два неравенства:

$$|x - a_0| \le \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < |a_0|$$

или

$$a_0 - \varepsilon \le x \le a_0 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < |a_0|.$$

Если $a_0 > 0$, то $a_0 - \varepsilon > 0$, поэтому $x \ge a_0 - \varepsilon > 0$, т.е. $x \ne 0$. Если $a_0 < 0$, то $a_0 + \varepsilon < 0$, поэтому $x \le a_0 + \varepsilon < 0$, т.е. $x \ne 0$. Неравенство (2.27) установлено. Утверждения (2.28), (2.29) теперь вытекают из (2.21) и (2.27).

Следствие доказано.

Определим систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно двух вещественных переменных v_1, v_2:

$$\begin{pmatrix} v_0 + v_1 \\ v_0 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} \gamma_m + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.30}$$

где используются обозначения (2.18) и (2.20). В зависимости от числа m данная система может как иметь решения, так может и не иметь.

Л е м м а 3. Существуют число $K^*(\varepsilon) \equiv K^* \in \mathbb{Z}_+$ и вещественные числа v_0^* и v_1^*, для которых система (2.30) разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторное равенство (2.30) запишем в координатной форме:

$$v_0 + v_1 = a_m \gamma_m + c_1, \tag{2.31}$$

$$v_0 v_1 = b_m \gamma_m + c_2. \tag{2.32}$$

Из (2.31) имеем

$$v_0 = a_m \gamma_m + c_1 - v_1. \tag{2.33}$$

Подставляем (2.33) в (2.32) и получаем

$$(a_m \gamma_m + c_1 - v_1) v_1 = b_m \gamma_m + c_2 \tag{2.34}$$

или эквивалентно

$$v_1^2 - (a_m \gamma_m + c_1) v_1 + (b_m \gamma_m + c_2) = 0. \tag{2.35}$$

Приходим к выводу: система двух уравнений (2.30) относительно двух вещественных переменных v_0, v_1 разрешима тогда и только тогда, когда у квадратного уравнения (2.35) имеется, по крайней мере, один вещественный корень v_1.

Действительно, если у (2.35) имеется вещественный корень v_1, тогда вместе с числом v_0, определяемым по (2.33), пара вещественных чисел v_0, v_1 есть допустимое решение уравнений (2.31), (2.32). Существенным фактом является то, что разрешимость двух уравнений (2.30) относительно двух переменных эквивалентна разрешимости только одного уравнения (2.35) относительно одной переменной. Этот результат вытекает из алгебраичности левой части уравнений (2.31) и (2.32).

Необходимым и достаточным условием существования вещественных корней v_1 у квадратного уравнения, как известно, является выполнение неравенства

$$d_m \ge 0, \tag{2.36}$$

где d_m – дискриминант уравнения (2.35):

$$d_m = (a_m \gamma_m + c_1)^2 - 4(b_m \gamma_m + c_2) = a_m^2 \gamma_m^2 + (2a_m c_1 - 4b_m)\gamma_m + (c_1^2 - 4c_2). \tag{2.37}$$

Следовательно, неравенство (2.36) сводится к соотношению

$$a_m^2 \gamma_m^2 + (2a_m c_1 - 4b_m)\gamma_m + (c_1^2 - 4c_2) \ge 0.$$

Введем функции $f : \mathfrak{X}(\varepsilon)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $q_0 : \mathfrak{X}(\varepsilon) \to \mathbb{R}$ по формулам

$$f(x,y,t) = x^2t^2 + (2xc_1 - 4y)t + (c_1^2 - 4c_2),$$
$$q_0(x,y) = 4[(c_1x - 2y)^2 - (c_1^2 - 4c_2)x^2].$$

При фиксированных значениях x, y функция f есть многочлен второй степени от переменной t, а функция q_0 представляет собой дискриминант соответствующего уравнения

$$f(x,y,t) = 0. \tag{2.38}$$

Выбираем $\varepsilon \in (0,|a_0|)$ и фиксируем произвольно $(x,y) \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$. Тогда имеется интервал (t^*,t^{**}), не зависящий от x, y, такой, что

$$f(x,y,t) \ge 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\backslash(t^*,t^{**}). \tag{2.39}$$

Действительно, введем два множества:

$$\mathfrak{X}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : q_0(x,y) \ge 0\right\},$$
$$\mathfrak{X}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : q_0(x,y) < 0\right\} \equiv \mathbb{R}^2\backslash\mathfrak{X}_1.$$

Поскольку $\mathfrak{X}_1 \sqcup \mathfrak{X}_2 = \mathbb{R}^2$, то хотя бы одно множество не пусто.

Рассмотрим две возможные ситуации. Во-первых, пусть $(x,y) \in \mathfrak{X}(\varepsilon) \cap \mathfrak{X}_2 \ne \varnothing$. Тогда в этом случае у уравнения (2.38) относительно переменной t вещественных корней нет, поскольку это квадратное уравнение и соответствующий дискриминант отрицателен. Далее, так как

$$q_0(x,y) < 0,$$

то

$$(c_1^2 - 4c_2)x^2 > (c_1x - 2y)^2 \ge 0.$$

Поэтому $x^2 > 0$, $f(x,y,0) = c_1^2 - 4c_2 > 0$ и тогда

$$f(x,y,t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае полагаем $t^* = t^{**}$, т.е. $(t^*,t^{**}) = \varnothing$, условие (2.39) доказано.

Во-вторых, пусть $(x,y) \in \mathfrak{X}(\varepsilon) \cap \mathfrak{X}_1 \ne \varnothing$. Введем функции $q_i : \mathfrak{X}(\varepsilon) \cap \mathfrak{X}_1 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, по формулам

$$q_1(x,y) = \frac{-(c_1x - 2y) - \sqrt{q_0(x,y)}}{x^2},$$
$$q_2(x,y) = \frac{-(c_1x - 2y) + \sqrt{q_0(x,y)}}{x^2}.$$

Тогда числа $q_1(x,y)$, $q_2(x,y)$ есть вещественные корни квадратного уравнения (2.38) относительно переменной t.

Множество $\mathfrak{X}(\varepsilon) \cap \mathfrak{X}_1$ компактно, функции q_1, q_2 непрерывны на области определения. По теореме Вейерштрасса существуют соответствующие максимумы и минимумы:

$$\min_{(x,y)\in\mathfrak{X}(\varepsilon)\cap\mathfrak{X}_1} q_1(x,y) = t^* \le \max_{(x,y)\in\mathfrak{X}(\varepsilon)\cap\mathfrak{X}_1} q_2(x,y) = t^{**}. \tag{2.40}$$

По построению имеем неравенство

$$f(x,y,t) \ge 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\backslash(q_1(x,y), q_2(x,y)).$$

Далее из (2.40) заключаем, что

$$(t^*,t^{**}) \supset (q_1(x,y), q_2(x,y)),$$

поэтому получаем требуемое неравенство.

По условию (2.3) и определению (2.13) бесконечная числовая последовательность $\{|\gamma_{m_k}|\}$, $m_k \in \mathcal{F}(\varepsilon)$ монотонно возрастает. Следовательно, найдется число

$$K^*(\varepsilon) \in \mathcal{F}(\varepsilon), \tag{2.41}$$

такое, что

$$\gamma_{K^*} \in \mathbb{R} \backslash (t^*, t^{**}).$$

По формуле (2.18) и числу $K^*(\varepsilon)$ восстанавливаются соответствующие числа $a_{K^*(\varepsilon)}$, $b_{K^*(\varepsilon)}$. При этом по следствию 2 имеем

$$\left(a_{K^*(\varepsilon)}, b_{K^*(\varepsilon)}\right) \in \mathcal{L}(\varepsilon).$$

Теперь, в силу (2.33), получаем неравенство

$$f\left(a_{K^*(\varepsilon)} b_{K^*(\varepsilon)} t\right) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \backslash (t^*, t^{**}).$$

Наконец, из (2.41) и (2.36), (2.37) приходим к неравенству

$$d_{K^*(\varepsilon)} = f\left(a_{K^*(\varepsilon)} b_{K^*(\varepsilon)}, \gamma_{K^*(\varepsilon)}\right) \geq 0.$$

Полученный результат означает, что при $m = K^*(\varepsilon)$ дискриминант $d_{K^*(\varepsilon)}$ квадратного уравнения (2.35) неотрицателен. Следовательно, у этого квадратного уравнения имеется, по крайней мере, один вещественный корень v_1^*, т.е.

$$(v_1^*)^2 - \left(a_{K^*(\varepsilon)} \gamma_{K^*(\varepsilon)} + c_1\right) v_1^* + \left(b_{K^*(\varepsilon)} \gamma_{K^*(\varepsilon)} + c_2\right) = 0. \tag{2.42}$$

По соотношению (2.33) определяем вещественное v_0^*, следовательно, уравнение (2.30) разрешимо и при $m = K^*(\varepsilon)$ числа v_0^*, v_1^* являются его вещественными корнями.

Лемма 3 доказана.

Воспользуемся соотношением (2.11) и в этом случае приходим к представлениям

$$\begin{gathered} H(\hat{u}) = r_1 R_0 + \hat{u} r_2 I = r_1 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} - r_1 \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r_1 \sin\theta R(\pi/2), \\ H^{-1}(\hat{u}) = (r_1 \sin\theta)^{-1} R(-\pi/2) = -(r_1 \sin\theta)^{-1} R(\pi/2). \end{gathered} \tag{2.43}$$

Пусть $K \in \mathbb{Z}_+$ – произвольное число. Выбираем $x(0) \neq 0$ и произвольную последовательность вещественных управлений $\{u(0), \ldots, u(K+2)\}$, тогда справедливо соотношение

$$x(K+3) = (A + u(K+2)B) \cdots (A + u(0)B) x(0). \tag{2.44}$$

Воспользуемся представлениями (1.9) и свойством коммутативности для перестановочных матриц

$$\begin{gathered} x(K+3) = P(r_1 R_1 + u(K+2) r_2 R_2) \cdots (r_1 R_1 + u(0) r_2 R_2) P^{-1} x(0) = \\ = PH(u(K+2)) \cdots H(u(0)) R_2^{K+3} P^{-1} x(0). \end{gathered}$$

В силу следствия 1 матрицы $H(t)$ для произвольного $t \in \mathbb{R}$ невырождены. Поэтому данное равенство перепишем в эквивалентном виде

$$H(u(1)) H(u(0)) P^{-1} x(0) = [H^{-1}(u(3)) \cdots H^{-1}(u(K+2)) R_2^{-K}] H^{-1}(u(2)) R_2^{-3} P^{-1} x(K+3). \tag{2.45}$$

Обозначим

$$\hat{\xi} = P^{-1} x(0) \tag{2.46}$$

и выполним преобразования в левой части равенства (2.45):

$$\begin{gathered} H(u(1)) H(u(0)) \hat{\xi} = (r_1 R_0 + u(1) r_2 I)(r_1 R_0 + u(0) r_2 I) \hat{\xi} = r_1^2 R_0^1 \hat{\xi} + (r_2 u(0) + r_2 u(1)) r_1 R_0 \hat{\xi} + \\ + r_2^2 u(0) u(1) \hat{\xi} = (r_1 R_0 \hat{\xi} | \hat{\xi}) \begin{pmatrix} r_2 u(0) + r_2 u(1) \\ (r_2 u(0))(r_2 u(1)) \end{pmatrix} + r_1^2 R_0^2 \hat{\xi} = F \begin{pmatrix} r_2 u(0) + r_2 u(1) \\ (r_2 u_0(0))(r_2 u(1)) \end{pmatrix} + r_1^2 R_0^2 \hat{\xi}, \end{gathered} \tag{2.47}$$

где использовалось обозначение (2.14).

Так как матрица F невырождена, то из (2.47) и (2.45) получаем

$$\begin{pmatrix} r_2u(0)+r_2u(1) \\ (r_2u(0)(r_2u(1))) \end{pmatrix} = \\ = F^{-1}[H^{-1}(u(3))\cdots H^{-1}(u(K+2))R_2^{-K}]H^{-1}(u(2))R_2^{-3}P^{-1}x(K+3)-r_1^2F^{-1}R_0^2\hat{\xi}. \quad (2.48)$$

Определим две вектор-функции $z_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $z_2:\mathbb{R}_1^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{K+1}\to\mathbb{R}^2$ по формулам:

$$z_1(u(0),u(1)) = \begin{pmatrix} r_2u(0)+r_2u(1) \\ (r_2u(0))(r_2u(1)) \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

$$z_2(x(0),x(K+3),u(2),\ldots,u(K+2)) = \\ = F^{-1}[H^{-1}(u(3))\cdots H^{-1}(u(K+2))R_2^{-K}]H^{-1}(u(2))R_2^{-3}P^{-1}x(K+3)-r_1^2F^{-1}R_0^2\hat{\xi}. \quad (2.50)$$

Матрица F зависит только от $x(0)$, поэтому функции z_1 и z_2 функционально независимы, поскольку соответствующие аргументы не связаны друг с другом.

Теперь соотношение (2.47) можно рассматривать как уравнение

$$z_1(u(0),u(1)) = z_2(x(0),x(K+3),u(2),\ldots,u(K+2)) \quad (2.51)$$

относительно соответствующих переменных. Другими словами, если переменные $u(0)$, $u(1)$ и $x(0)$, $x(K+3)$, $u(2),\ldots,u(K+2)$ выбрать произвольно, тогда равенство (2.51) может не выполняться. Покажем, что соответствующие переменные можно подобрать так, что равенство (2.51) будет выполняться.

Выберем произвольно $\xi,\eta\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ и положим

$$x(0)=\xi,\quad \hat{\xi}=P^{-1}\xi, \\ x(K+3)=\eta,\quad \hat{\eta}=R_2^{-3}P^{-1}\eta. \quad (2.52)$$

Определим управление из соотношения (2.11):

$$u^*(3)=\ldots=u^*(K+2)=\hat{u}.$$

В этом случае из (2.43) получаем

$$F^{-1}[H^{-1}(u^*(3))\cdots H^{-1}(u^*(K+2))R_2^{-K}]H^{-1}(u(2))R_2^{-3}P^{-1}x(K+3) = \\ = F^{-1}H^{-K}(\hat{u})R_2^{-K}H^{-1}(u(2))\hat{\eta} = (r_1\sin\theta)^{-K}F^{-1}R\left(-\frac{\pi}{2}K\right)R(-\varphi_2K)H^{-1}(u(2))\hat{\eta} = \\ = (r_1\sin\theta)^{-K}F^{-1}R\left(-\left(\varphi_2+\frac{\pi}{2}\right)K\right)H^{-1}(u(2))\hat{\eta}.$$

Воспользуемся утверждением леммы 1 и положим

$$u^*(2)=u_2^*.$$

Из обозначений (2.18)–(2.20) теперь получаем

$$z_2(\xi,\eta,u^*(2),\ldots,u^*(K+2)) = \begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix}\gamma_K + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_0\neq 0$.

Выберем произвольно число $\varepsilon\in(0,|a_0|)$. Тогда существует число $K^*(\varepsilon)$ из (2.41), поэтому по лемме 3 имеются вещественные числа v_0^*, v_1^*, такие, что выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} v_0^*+v_1^* \\ v_0^*v_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{K^*(\varepsilon)} \\ b_{K^*(\varepsilon)} \end{pmatrix}\gamma_{K^*(\varepsilon)} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = z_2(\xi,\eta,u^*(2),\ldots,u^*(K^*(\varepsilon)+2)).$$

Выбираем

$$u^*(0)=r_2^{-1}v_0^*,\quad u^*(1)=r_2^{-1}v_1^*$$

и приходим к выводу, что при $K = K^*(\varepsilon)$ справедливо равенство

$$z_1(u^*(0), u^*(1)) = z_2(\xi, \eta, u^*(0), \ldots, u^*(K(\varepsilon)+2)), \tag{2.53}$$

т.е. уравнение (2.51) разрешимо.

Таким образом, из (2.53) следует равенство (2.44) при $K = K^*(\varepsilon)$ для граничных условий $x(0) = \xi$, $x(K^*(\varepsilon)+3) = \eta$ и вещественных управлений $\{u^*(0), \ldots, u^*(K+2)\}$. Допустимые векторы ξ, η выбирались произвольно, поэтому билинейная система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой по определению.

Достаточность доказана. Теорема 4 доказана.

Таким образом, установлены и доказаны теоремы, образующие совокупность необходимых и достаточных условий управляемости для дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами. Необходимые условия управляемости для двумерных систем объединены теоремами 2 и 4 и основаны на применении некоторых свойств матричных норм, при этом существенно используется спектральная матричная норма. Доказательство достаточности конструктивно и представляет собой некоторое допустимое конечное управление для соответствующей задачи управляемости. Рассуждения существенно используют теорему Пуанкаре о возвращении.

3. Комментарии и примеры. Утверждения теоремы 4 определяются спектральными характеристиками матриц A и B. С другой стороны, элементы матриц билинейной системы первоначально не связаны с соответствующими собственными значениями матриц. Поэтому утверждения теоремы 4 удобно записать в эквивалентном виде

$$0 < \|B\|_2, \tag{3.1}$$

$$0 < \inf_u \|H(u)\|_2 < 1. \tag{3.2}$$

Действительно, неравенство (2.2) в силу (1.3) равносильно требованию $B \neq 0$, что приводит к возникновению условия (3.1), поскольку здесь достаточно воспользоваться аксиомами нормы. Условие (3.2) вытекает из (2.3) в силу (2.12).

Из теоремы 4 следует, что если система (A, B) с перестановочными матрицами является управляемой, тогда

$$\det A \neq 0, \quad \det B \neq 0.$$

В частности, неравенство (3.2) может быть переписано в следующем виде:

$$0 < \inf_u \det(A + uB) < 1$$

в силу (1.14).

Спектральный радиус невырожденной матрицы B не влияет на свойства управляемости билинейной системы (A, B). Этот факт объясняется тем, что величина управления $u(k)$ билинейной системы не ограничена в рассматриваемом случае.

Если воспользоваться разложением (1.9) из теоремы 2, то критерий управляемости билинейной системы с перестановочными матрицами также можно записать в виде эквивалентных неравенств.

Положим

$$\hat{A} = r_1 R_1, \quad \hat{B} = r_2 R_2,$$

тогда

$$\hat{A} = P^{-1}AP, \quad \hat{B} = P^{-1}BP, \quad A + uB = P(\hat{A} + u\hat{B})P^{-1}.$$

Следовательно, неравенства (3.1) и (3.2) можно записать как

$$0 < \|\hat{B}\|_2, \tag{3.3}$$

$$0 < \inf_u \|\hat{A} + u\hat{B}\|_2 < 1. \tag{3.4}$$

Действительно, неравенство (3.3) вытекает из (3.1). Далее

$$\|\hat{A} + u\hat{B}\|_2^2 = \|r_1 R_1 + u r_2 R_2\|_2^2 = \|R_2 H(u)\|_2^2 = \rho([R_2 H(u)]^{\mathrm{T}} R_2 H(u)) =$$
$$= \rho(H^{\mathrm{T}}(u) R_2^T R_2 H(u)) = \rho(H^{\mathrm{T}}(u) H(u)) = \|H(u)\|_2^2$$

и из (3.2) следует требуемое неравенство (3.4).

Кроме того, критерий управляемости (теоремы 1, 4) при $n = 2$ можно представить следующим образом:

$$0 < \frac{1}{4}\det{}^2(\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{B} - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A}) < \det{}^2 \hat{B}. \tag{3.5}$$

Действительно, в силу разложения (1.3) получаем

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{B} - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A} = r_1 r_2 [R_1^{\mathrm{T}} R_2 - R_2^{\mathrm{T}} R_1] = r_1 r_2 (R(\varphi_2 - \varphi_1) - R(\varphi_1 - \varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2 (R(-\theta) - R(\theta)) = r_1 r_2 \left[\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right] =$$
$$= 2 r_1 r_2 \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0\end{pmatrix} = 2 r_1 r_2 \sin\theta R\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\det(\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{B} - \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A}) = r_1 r_2 \sin\theta.$$

Для билинейных систем с перестановочными матрицами справедливо неравенство, связанное со спектральной нормой матриц. Если система (A, B) является управляемой, тогда существует некоторое вещественное число u^*, такое, что

$$\|\hat{A} + u^*\hat{B}\| > \|\hat{A} + u^*\hat{B}\|_2^2 \tag{3.6}$$

для произвольной матричной нормы $\|\cdot\|$. В общем случае u^* зависит от выбранной нормы $\|\cdot\|$.

Действительно, неравенство (2.4) перепишем в виде

$$P^{-1}\xi = (\hat{A} + u(0)\hat{B})^{-1} \cdots (\hat{A} + u(K-1)\hat{B})^{-1} P^{-1}\eta.$$

Поэтому для любой матричной нормы $\|\cdot\|$ должно существовать вещественное число u^*, зависящее от $\|\cdot\|$, такое, что

$$\|(\hat{A} + u^*\hat{B})^{-1}\| > 1.$$

Тогда

$$\left\|(\hat{A} + u^*\hat{B})^{-1}\right\| = \|r_1 R_1 + u^* r_2 R_2\|^{-1} = \|R_2^{-1}(r_1 R_0 + u r_2 I)\|^{-1} = \|R_2^{\mathrm{T}} H^{-1}(u^*)\| = \|R_2^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}(u^*)\det{}^{-1} H(u^*)\| =$$
$$= \det{}^{-1} H(u^*)\|(r_1 R_1 + u^* r_2 R_2)^T\| = \|H(u^*)\|_2^{-2}\left\|\hat{A} + u^*\hat{B}\right\| = \|\hat{A} + u^*\hat{B}\|_2^{-2}\|\hat{A} + u^*\hat{B}\|$$

и требуемое неравенство (3.6) доказано.

В частности, если $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, то из (3.6) следует (3.4).

Важно обратить внимание на существенность требования строгих неравенств (2.2) и (2.3). Покажем, что если всего лишь потребовать выполнения нестрогого неравенства (2.3)

$$r_1^2 \sin^2\theta \le 1,$$

то система (A, B) может оказаться неуправляемой.

Действительно, имеется билинейная система $(rI, R(\varphi))$ и выполнено равенство

$$r^2 \sin^2\varphi = 1, \quad r = \rho(A), \quad \theta = -\varphi.$$

Если

$$x(0) = \xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}, \quad u = u(0),$$

тогда

$$x(1) = (rI + uR(\varphi))\xi = \begin{pmatrix} r + u\cos\varphi & u\sin\varphi \\ -u\sin\varphi & r + u\cos\varphi \end{pmatrix}\xi = \begin{pmatrix} (r + u\cos\varphi)\xi_1 + u\xi_2\sin\varphi \\ -u\xi_1\sin\varphi + (r + u\cos\varphi)\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$\|x(1)\|_2^2 = [(r + u\cos\varphi)\xi_1 + u\xi_2\sin\varphi]^2 + [-u\xi_1\sin\varphi + (r + u\cos\varphi)\xi_2]^2 =$$
$$= (r^2 + 2ur\cos\varphi + u^2)\|\xi\|_2^2 \geq \|\xi\|_2^2 \min_u (r^2 2ur\cos\varphi + u^2).$$

Полагая

$$u^* = \arg\min_u (r^2 + 2ur\cos\varphi + u^2) = -r\cos\varphi,$$

получаем неравенство

$$\|x(1)\|_2^2 \geq (r^2 + 2u^* r\cos\varphi + u^{*2})\|\xi\|_2^2 = r^2\sin^2\varphi\|\xi\|_2^2 = \|\xi\|_2^2.$$

Таким образом, если воспользоваться методом математической индукции, приходим к выводу

$$\|x(k)\|_2^2 \geq \|\xi\|_2^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Это означает, что система $(rI, R(\varphi))$ не является управляемой.

Построим числовые примеры билинейных систем (A, B) с перестановочными матрицами, которые являются управляемыми и неуправляемыми. Пусть

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3} & 2 \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что матрицы A и B коммутативны:

$$AB = BA = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Имеется невырожденная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой справедливо разложение (1.3):

$$A = \frac{1}{2}PR(\pi/3)P^{-1}, \quad B = PR(\pi/6)P^{-1}.$$

Таким образом, получаем

$$\rho(B) = 1, \quad \rho(A) = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = \pi/3, \quad \varphi_2 = \pi/6, \quad \theta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$$

и, следовательно,

$$0 < \rho(B), \quad \rho^2(A)\sin^2\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} < 1.$$

Поэтому из теорем 2 и 4 следует, что билинейная система (A, B) является управляемой.

Положим теперь

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Матрицы перестановочны:

$$AB = BA = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{3} & 4 \\ -2 & -2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Для невырожденной матрицы

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

справедливо разложение (1.9):

$$A = 2PR(\pi/6)\,P^{-1}, \quad B = -3PR(-\pi/3)\,P^{-1},$$

поэтому

$$\rho(A) = 2, \quad \rho(B) = 2, \quad \varphi_1 = \pi/6, \quad \varphi_2 = -\pi/3, \quad \theta = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2.$$

Таким образом,

$$0 < \rho(B), \quad \rho^2(A)\sin^2\theta = 4 > 1$$

и система (A, B) по теоремам 2 и 4 не является управляемой.

Рассмотрим в заключение частные случаи систем (A, I) и (I, B). По построению соответствующие матрицы A, I и I, B перестановочны, поэтому можно воспользоваться критерием управляемости из теорем 1–4. Из теоремы 1 следует, что рассматриваемые билинейные системы могут быть управляемыми только при $n = 1$ или $n = 2$. Интерес представляют системы при $n = 2$. Такие системы встречаются в задачах управления запасами [7], а также при дискретизации непрерывных билинейных систем, если использовать метод Эйлера [1].

Подробнее остановимся на системе (A, I), считая, что

$$\rho(B) = 1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \theta = \varphi_1, \quad \rho(A) = r_1.$$

Необходимыми и достаточными условиями управляемости такой билинейной системы является выполнение неравенства

$$r_1^2\sin^2\varphi_1 < 1.$$

В частности, системы $(R(\pm\pi/2), I)$ и $(I, R(\pm\pi/2))$ не являются управляемыми.

Заключение. Получены необходимые условия управляемости дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами и скалярным управлением. Показано, что размерности векторов состояния управляемых билинейных систем с перестановочными матрицами существенно ограничены. Для управляемых билинейных систем с перестановочными матрицами получены и доказаны соответствующие необходимые и достаточные условия, определяющие свойства спектральных характеристик. Приведены примеры, иллюстрирующие основные теоретические результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elliott D.L.* Bilinear Control Systems: Matrices in Action. Dordrecht: Springer, 2009.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
4. *Сиротин А.Н.* Об управляемости однородных билинейных дискретных систем с коммутативными матрицами // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 13–14.
5. *Сиротин А.Н.* О свойствах управляемости билинейных систем с дискретным временем, связанных с блочно-треугольными и перестановочными матрицами // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 6. С. 4–19.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
7. *Tie L., Cai K.-Y., Lin Y.* On Controllability of Discrete-time Bilinear Systems // J. of the Franklin Institute. 2011. V. 348. № 5. P. 933–940.