ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, № 2, с. 17–26

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.938

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ MIMO-СИСТЕМОЙ ПО ВЕКТОРУ ИЗМЕРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОУРОВНЕВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

© 2020 г. Н. Е. Зубов[a,]*, Е. А. Микрин[b], В. Н. Рябченко[a]

[a] *МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

[b] *ПАО "РКК "Энергия", Москва, Россия*

**e-mail: nik.zubov@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.04.2019 г.
После доработки 08.11.2019 г.
Принята к публикации 25.11.2019 г.

Разработан вариант метода синтеза управления линейной MIMO-системой по вектору выхода, обеспечивающий заданный спектр многомерной динамической системы в пространстве состояний. В основе лежит принцип дуальности задачи управления MIMO-системой по вектору состояния и задачи построения наблюдателя состояния. Алгоритм без каких-либо изменений применим как для непрерывного, так и для дискретного случаев описания математической модели MIMO-системы, не имеет ограничений по заданию элементов спектра замкнутой MIMO-системы, позволяет получать решения задач синтеза в аналитическом виде и осуществлять параметризацию множества эквивалентных законов управления с обратной связью. Приведен пример аналитического синтеза закона управления гипотетическим летательным аппаратом.

DOI: 10.31857/S0002338820020146

Введение. Задача управления спектром движения (полюсами, собственными значениями) линейной динамической MIMO-системой (multi input multi output) по вектору выхода системы относится в теории систем к разряду классических [1–11], однако до сих пор не имеет исчерпывающего решения и относится к задаче высокого уровня сложности [9]. В данной статье рассматривается метод синтеза закона управления с использованием принципа дуальности задачи управления по вектору состояния и задачи построения наблюдателя состояния по вектору измерения.

1. Декомпозиция динамической системы и подход к синтезу закона управления. Будем рассматривать MIMO-систему следующего вида:

$$\sigma\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}\mathbf{x}(t), \tag{1.1}$$

где t – непрерывное $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ или дискретное $t \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ время; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ – вектор входа; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода; $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел; $m + r > n$; σ – символ оператора дифференцирования $\sigma\mathbf{x}(t) \doteq \dot{\mathbf{x}}(t)$ или оператора сдвига $\sigma\mathbf{x}(t) \doteq \mathbf{x}(t+1)$.

Предполагается, что спектр MIMO-системы (1.1) совпадает с множеством собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$ и равен

$$\operatorname{eig}(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = 0, \ i = \overline{1, n}\},$$

где $\boldsymbol{I}_n$ – единичная матрица размера $n \times n$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел (комплексная плоскость).

Рассматриваемый здесь метод предполагает выполнение алгоритма, содержащего два шага:

1) многоуровневая декомпозиция динамической системы с помощью техники ортогональных делителей нуля и псевдообратных матриц, т.е. декомпозиции матриц А, В и С (процесс "сверху–вниз");

2) собственно синтез закона управления с использованием декомпозированных на соответствующих уровнях MIMO-систем, т.е. формировании (“сборки”) матрицы регулятора в законе управления $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(t)$ (процесс “снизу—вверх”).

Указанное ранее применение принципа дуальности понимается в том смысле, что синтез закона управления по вектору выхода MIMO-системы (регулятора по выходу) равносилен синтезу наблюдателя Люэнбергера (наблюдателя состояния).

Введем в рассмотрение многоуровневую декомпозицию MIMO-системы (1.1) следующего вида:
нулевой уровень декомпозиции

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}, \tag{1.2}$$

первый уровень декомпозиции

$$\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{C}_0^{R\perp})^+ \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{C}_0^{R\perp}, \quad \boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{C}_0^{R\perp})^+ \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{B}_0, \quad \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{C}_0^{R\perp}, \tag{1.3}$$

k-й уровень декомпозиции $(1 < k < M)$

$$\boldsymbol{A}_k = (\boldsymbol{C}_{k-1}^{R\perp})^+ \boldsymbol{A}_{k-1} \boldsymbol{C}_{k-1}^{R\perp}, \quad \boldsymbol{B}_k = (\boldsymbol{C}_{k-1}^{R\perp})^+ \boldsymbol{A}_{k-1} \boldsymbol{B}_{k-1}, \quad \boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{C}_{k-1} \boldsymbol{A}_{k-1} \boldsymbol{C}_{k-1}^{R\perp}, \tag{1.4}$$

M-й уровень декомпозиции

$$\boldsymbol{A}_M = (\boldsymbol{C}_{M-1}^{R\perp})^+ \boldsymbol{A}_{M-1} \boldsymbol{C}_{M-1}^{R\perp}, \quad \boldsymbol{B}_M = (\boldsymbol{C}_{M-1}^{R\perp})^+ \boldsymbol{A}_{M-1} \boldsymbol{B}_{M-1}, \quad \boldsymbol{C}_M = \boldsymbol{C}_{M-1} \boldsymbol{A}_{M-1} \boldsymbol{C}_{M-1}^{R\perp}. \tag{1.5}$$

Здесь $M = \mathrm{ceil}(n/m) - 1$, где $\mathrm{ceil}(*)$ — операция округления числа “*” в сторону большего значения, т.е. $\mathrm{ceil}(1.2) = 2$, $\mathrm{ceil}(2.5) = 3$ и т.д.; индексом “$R\perp$” обозначен правый делитель нуля [11—17], а индексом “+” — псевдообратные матрицы Мура—Пенроуза [11—17].

Рассмотрим далее собственно синтез закона управления по вектору выхода на основе управления спектром декомпозированных MIMO-систем на соответствующих уровнях (в обратном порядке):
M-й уровень декомпозиции

$$\boldsymbol{F}_M = \boldsymbol{B}_M^+ (\boldsymbol{C}_M^+ \Phi_M - \boldsymbol{A}_M \boldsymbol{C}_M^+), \tag{1.6}$$

k-й уровень декомпозиции $(k = \overline{0, M-1})$

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{B}_k^+ (\boldsymbol{C}_k^- \Phi_k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{C}_k^-), \quad \boldsymbol{C}_k^- = \boldsymbol{C}_k^+ - \boldsymbol{C}_k^{R\perp} \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{F}_{k+1}. \tag{1.7}$$

Следовательно, первая формула выражения (1.7) при $k = 0$ представляет собой матрицу коэффициентов обратной связи регулятора по выходу и собственно решение задачи синтеза управления по выходу.

2. Основной теоретический результат. Справедливо утверждение.

Т е о р е м а. Пусть следующие матрицы существуют и попарно полностью управляемые:

$$\boldsymbol{G}_M = (\boldsymbol{B}_M^\perp \boldsymbol{C}_M^+)^+ \boldsymbol{B}_M^\perp \boldsymbol{A}_M \boldsymbol{C}_M^+, \quad \boldsymbol{H}_M = (\boldsymbol{B}_M^\perp \boldsymbol{C}_M^+)^{R\perp}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{G}_k = (\boldsymbol{B}_k^\perp \boldsymbol{C}_k^-)^+ \boldsymbol{B}_k^\perp \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{C}_k^-, \quad \boldsymbol{H}_k = (\boldsymbol{B}_k^\perp \boldsymbol{C}_k^-)^{R\perp}, \tag{2.2}$$

где $k = \overline{0, M-1}$, тогда существует непустое множество матриц $\boldsymbol{K}_i$, $i = \overline{0, M}$, таких, что

$$\Phi_i = \boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{K}_i = (\boldsymbol{B}_i^\perp \boldsymbol{C}_i^-)^+ \boldsymbol{B}_i^\perp \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{C}_i^- + (\boldsymbol{B}_i^\perp \boldsymbol{C}_i^-)^{R\perp} \boldsymbol{K}_i, \tag{2.3}$$

и для (1.6), (1.7) соответственно выполняются равенства

$$\mathrm{eig}\left(\boldsymbol{A}_M + \boldsymbol{B}_M \boldsymbol{F}_M \boldsymbol{C}_M\right) = \mathrm{eig}(\Phi_M), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{eig}\left(\boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{C}_k\right) = \bigcup_{i=k}^{M} \mathrm{eig}(\Phi_i), \quad (k = \overline{0, M-1}), \tag{2.5}$$

$$\mathrm{eig}\left(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{C}_0\right) = \mathrm{eig}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\right) = \bigcup_{i=0}^{M} \mathrm{eig}(\Phi_i) \doteq \Lambda. \tag{2.6}$$

Здесь индексом “ $\perp$” обозначена ортогональная матрица левого делителя нуля [11], а при $i = M$ имеет место равенство $\boldsymbol{C}_M^- = \boldsymbol{C}_M^+$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Как и в материалах, представленных в [12–17], в теореме при преобразованиях используются только ортогональные и псевдообратные матрицы, что позволяет, по крайней мере, не ухудшать обусловленность получаемых уравнений. Приведенный теоретический результат применим как для непрерывного, так и для дискретного случаев описания MIMO-системы (1.1), не имеет ограничений по заданию элементов спектра замкнутой MIMO-системы, позволяет получать решения задачи синтеза в аналитическом виде и осуществлять параметризацию множества эквивалентных законов управления с обратной связью. Это подтверждается, в том числе, математическим моделированием, результаты которого демонстрируют высокую точность управления спектром и практическое отсутствие ограничений на размерность MIMO-системы (1.1).

3. Аналитический синтез управления стабилизацией бокового движения маневренного летательного аппарата. Рассмотрим задачу управления движением маневренного летательного аппарата (ЛА) в горизонтальной плоскости (боковой канал движения и управления). В качестве органов управления будем использовать элероны, руль направления, переднее вертикальное оперение и отклоняемый вектор тяги двигателя. В этом случае линеаризованные уравнения бокового канала в отклонениях в соответствии с [18, 19] будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} \dot\beta \\ \dot\omega_x \\ \dot\omega_y \\ \dot\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_э \\ \delta_н \\ \delta_{\text{ОВТ}} \\ \delta_{\text{п.о}} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Здесь β – угол скольжения; ω_x – угловая скорость крена; ω_y – угловая скорость рыскания; γ – угол крена; α_0 – угол атаки; ϑ_0 – угол тангажа; $\delta_н$ – угол отклонения рулей направления; $\delta_э$ – угол отклонения элеронов; $\delta_{\text{ОВТ}}$ – угол отклонения вектора тяги; $\delta_{\text{п.о}}$ – угол отклонения переднего вертикального оперения; a_{ij}, b_{ij} – коэффициенты линеаризации [19, 20].

Как видно, особенностью модели (3.1) является неполнота ранга матрицы управления, обусловленное "избыточностью" органов управления в боковой плоскости

В обозначениях (1.1) матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ с учетом (3.1) запишутся так:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Зададим матрицу выхода следующим образом:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

что соответствует отсутствию информации об угловых скоростях движения ЛА.

Пусть требуется найти в явном виде формулу закона управления (регулятора), обеспечивающего замкнутой системе "ЛА + система управления" следующий (вообще говоря, произвольный) спектр:

$$\Lambda = \{\hat\lambda_1, \hat\lambda_2, \hat\lambda_3, \hat\lambda_4\} \subset \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

Следует заметить, что аналитическое решение указанной задачи синтеза нельзя получить ранее опубликованными авторами методами в силу неполноты ранга матрицы $\boldsymbol{B}$ (3.2).

Для системы (1.1) с матрицами (3.2), (3.3) рассмотрим многоуровневую декомпозицию, определенную в разд. 1, имеющую в данном случае два уровня декомпозиции: нулевой (1.2) и первый (1.3), для которых

$$\boldsymbol{B}_0^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{R\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_0^{+} = \begin{bmatrix} b_{11}^+ & b_{12}^+ & b_{13}^+ & b_{14}^+ \\ b_{21}^+ & b_{22}^+ & b_{23}^+ & b_{24}^+ \\ b_{31}^+ & b_{32}^+ & b_{33}^+ & b_{34}^+ \\ b_{41}^+ & b_{42}^+ & b_{43}^+ & b_{44}^+ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$(\boldsymbol{C}^{R\perp})^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{33} & -a_{32} \\ -a_{23} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 & b_{14}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 & b_{24}^1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} a_{13} & -a_{12} \\ a_{43} & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы матрицы $\boldsymbol{B}_0^+$ из (3.5) в силу неполноты ее ранга вычислены в соответствии с [1] на основании следующей оригинальной формулы псевдообратной матрицы [21]:

$$\boldsymbol{B}_0^+ = [\boldsymbol{B}_0 + (\boldsymbol{B}_0^{R\perp}\boldsymbol{B}_0^{\perp})^{\mathrm{T}}]^{-1} - \boldsymbol{B}_0^{R\perp}\boldsymbol{B}_0^{\perp}$$

и в силу их громоздкости здесь не приводятся. При этом компоненты матрицы $\boldsymbol{B}_1$ равны:

$$b_{11}^1 = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}, \quad b_{12}^1 = a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}, \quad b_{13}^1 = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33},$$
$$b_{14}^1 = a_{32}b_{24} + a_{33}b_{34}, \quad b_{21}^1 = -a_{21}b_{11} - a_{22}b_{21} - a_{23}b_{31}, \quad b_{22}^1 = -a_{22}b_{22} - a_{23}b_{32},$$
$$b_{23}^1 = -a_{21}b_{13} - a_{22}b_{23} - a_{23}b_{33}, \quad b_{24}^1 = -a_{22}b_{24} - a_{23}b_{34}.$$

Для проверки условий управляемости на первом уровне декомпозиции, определенных в теореме, вычислим следующие матрицы:

$$\boldsymbol{C}_1^+ = \frac{1}{a_{13} - a_{12}a_{43}} \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ a_{43} & -a_{13} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{H}_1 = (\boldsymbol{B}_1^{\perp}\boldsymbol{C}_1^+)^{R\perp} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{H}_1^+ = \boldsymbol{I}_2, \tag{3.6}$$
$$\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{B}_1^{\perp}\boldsymbol{C}_1^+)^+\boldsymbol{B}_1^{\perp}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим для первого уровня декомпозиции ранг следующей блочной матрицы:

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{H}_1 \;\; \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{H}_1] = 2,$$

что совпадает с числом измеряемых компонент вектора состояния $m = 2$. Следовательно, первый уровень удовлетворяет критерию управляемости, определенному в теореме.

Далее в соответствии с введенной формой регулятора (1.6), (1.7) зададим матрицу, собственные значения которой будут “приписаны” MIMO-системе на первом уровне декомпозиции. В силу очевидной обратимости матриц (3.6) для первого уровня декомпозиции мы вправе выбрать любую матрицу Φ_1, обладающую заданным спектром. Для простоты положим

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \widehat{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

и вычислим псевдообратную матрицу

$$\boldsymbol{B}_1^+ = \begin{bmatrix} b_{11}^{1+} & b_{12}^{1+} \\ b_{21}^{1+} & b_{22}^{1+} \\ b_{31}^{1+} & b_{32}^{1+} \\ b_{41}^{1+} & b_{42}^{1+} \end{bmatrix},$$

где при условии, что

$$\Delta = (b_{11}^1)^2(b_{22}^1)^2 + (b_{11}^1)^2(b_{23}^1)^2 + (b_{11}^1)^2(b_{24}^1)^2 - 2b_{11}^1b_{12}^1b_{21}^1b_{22}^1 - 2b_{11}^1b_{13}^1b_{21}^1b_{23}^1 - 2b_{11}^1b_{14}^1b_{21}^1b_{24}^1 +$$
$$+ (b_{12}^1)^2(b_{21}^1)^2 + (b_{12}^1)^2(b_{23}^1)^2 + (b_{12}^1)^2(b_{24}^1)^2 - 2b_{12}^1b_{13}^1b_{22}^1b_{23}^1 - 2b_{12}^1b_{14}^1b_{22}^1b_{24}^1 + (b_{13}^1)^2(b_{21}^1)^2 +$$
$$+ (b_{13}^1)^2(b_{22}^1)^2 + (b_{13}^1)^2(b_{24}^1)^2 - 2b_{13}^1b_{14}^1b_{23}^1b_{24}^1 + (b_{14}^1)^2(b_{21}^1)^2 + (b_{14}^1)^2(b_{22}^1)^2 + (b_{14}^1)^2(b_{23}^1)^2 \neq 0,$$

обозначены

$$
\begin{aligned}
b_{11}^{1+} &= [b_{11}^1(b_{22}^1)^2 - b_{12}^1 b_{21}^1 b_{22}^1 + b_{11}^1(b_{23}^1)^2 - b_{13}^1 b_{21}^1 b_{23}^1 + b_{11}^1(b_{24}^1)^2 - b_{14}^1 b_{21}^1 b_{24}^1]/\Delta,\\
b_{12}^{1+} &= [b_{21}^1(b_{12}^1)^2 - b_{11}^1 b_{22}^1 b_{12}^1 + b_{21}^1(b_{13}^1)^2 - b_{11}^1 b_{23}^1 b_{13}^1 + b_{21}^1(b_{14}^1)^2 - b_{11}^1 b_{24}^1 b_{14}^1]/\Delta,\\
b_{21}^{1+} &= [b_{12}^1(b_{21}^1)^2 - b_{11}^1 b_{22}^1 b_{21}^1 + b_{12}^1(b_{23}^1)^2 - b_{13}^1 b_{22}^1 b_{23}^1 + b_{12}^1(b_{24}^1)^2 - b_{14}^1 b_{22}^1 b_{24}^1]/\Delta,\\
b_{22}^{1+} &= [b_{22}^1(b_{11}^1)^2 - b_{12}^1 b_{21}^1 b_{11}^1 + b_{22}^1(b_{13}^1)^2 - b_{12}^1 b_{21}^1 b_{23}^1 + b_{22}^1(b_{14}^1)^2 - b_{12}^1 b_{24}^1 b_{14}^1]/\Delta,\\
b_{31}^{1+} &= [b_{13}^1(b_{21}^1)^2 - b_{11}^1 b_{23}^1 b_{21}^1 + b_{13}^1(b_{22}^1)^2 - b_{12}^1 b_{23}^1 b_{22}^1 + b_{13}^1(b_{24}^1)^2 - b_{14}^1 b_{23}^1 b_{24}^1]/\Delta,\\
b_{32}^{1+} &= [b_{23}^1(b_{11}^1)^2 - b_{13}^1 b_{21}^1 b_{11}^1 + b_{23}^1(b_{12}^1)^2 - b_{13}^1 b_{22}^1 b_{12}^1 + b_{23}^1(b_{14}^1)^2 - b_{13}^1 b_{24}^1 b_{14}^1]/\Delta,\\
b_{41}^{1+} &= [b_{14}^1(b_{21}^1)^2 - b_{11}^1 b_{24}^1 b_{21}^1 + b_{14}^1(b_{22}^1)^2 - b_{12}^1 b_{24}^1 b_{22}^1 + b_{14}^1(b_{23}^1)^2 - b_{13}^1 b_{24}^1 b_{23}^1]/\Delta,\\
b_{42}^{1+} &= [b_{24}^1(b_{11}^1)^2 - b_{14}^1 b_{21}^1 b_{11}^1 + b_{24}^1(b_{12}^1)^2 - b_{14}^1 b_{22}^1 b_{12}^1 + b_{24}^1(b_{13}^1)^2 - b_{14}^1 b_{23}^1 b_{13}^1]/\Delta.
\end{aligned}
$$

На основании формулы (1.7) при $k = 1$ для первого уровня будем иметь

$$
\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{B}_1^+(\boldsymbol{C}_1^-\Phi_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1^+) = \begin{bmatrix} f_{11}^1 & f_{12}^1 \\ f_{21}^1 & f_{22}^1 \\ f_{31}^1 & f_{32}^1 \\ f_{41}^1 & f_{42}^1 \end{bmatrix},
$$

где

$$
\begin{aligned}
f_{11}^1 &= (a_{23}b_{12}^{1+} - a_{33}b_{11}^{1+} + b_{11}^{1+}\widehat{\lambda}_1 - a_{22}a_{43}b_{12}^{1+} + a_{32}a_{43}b_{11}^{1+} + a_{43}b_{12}^{1+}\widehat{\lambda}_1)/(a_{13} - a_{12}a_{43}),\\
f_{12}^1 &= -(a_{12}a_{23}b_{12}^{1+} - a_{13}a_{22}b_{12}^{1+} - a_{12}a_{33}b_{11}^{1+} + a_{13}a_{32}b_{11}^{1+} + a_{12}b_{11}^{1+}\widehat{\lambda}_2 + a_{13}b_{12}^{1+}\widehat{\lambda}_2)/(a_{13} - a_{12}a_{43}),\\
f_{21}^1 &= (a_{23}b_{22}^{1+} - a_{33}b_{21}^{1+} + b_{21}^{1+}\widehat{\lambda}_1 - a_{22}a_{43}b_{22}^{1+} + a_{32}a_{43}b_{21}^{1+} + a_{43}b_{22}^{1+}\widehat{\lambda}_1)/(a_{13} - a_{12}a_{43}),\\
f_{22}^1 &= -(a_{12}a_{23}b_{22}^{1+} - a_{13}a_{22}b_{22}^{1+} - a_{12}a_{33}b_{21}^{1+} + a_{13}a_{32}b_{21}^{1+} + a_{12}b_{21}^{1+}\widehat{\lambda}_2 + a_{13}b_{22}^{1+}\widehat{\lambda}_2)/a_{13} - a_{12}a_{43},\\
f_{31}^1 &= (a_{23}b_{32}^{1+} - a_{33}b_{31}^{1+} + b_{31}^{1+}\widehat{\lambda}_1 - a_{22}a_{43}b_{32}^{1+} + a_{32}a_{43}b_{31}^{1+} + a_{43}b_{32}^{1+}\widehat{\lambda}_1)/(a_{13} - a_{12}a_{43}),\\
f_{32}^1 &= -(a_{12}a_{23}b_{32}^{1+} - a_{13}a_{22}b_{32}^{1+} - a_{12}a_{33}b_{31}^{1+} + a_{13}a_{32}b_{31}^{1+} + a_{12}b_{31}^{1+}\widehat{\lambda}_2 + a_{13}b_{32}^{1+}\widehat{\lambda}_2)/(a_{13} - a_{12}a_{43}),\\
f_{41}^1 &= (a_{23}b_{42}^{1+} - a_{33}b_{41}^{1+} + b_{21}^{1+}\widehat{\lambda}_1 - a_{22}a_{43}b_{42}^{1+} + a_{32}a_{43}b_{41}^{1+} + a_{43}b_{42}^{1+}\widehat{\lambda}_1)/(a_{13} - a_{12}a_{43}),\\
f_{42}^1 &= -(a_{12}a_{23}b_{42}^{1+} - a_{13}a_{22}b_{42}^{1+} - a_{12}a_{33}b_{41}^{1+} + a_{13}a_{32}b_{41}^{1+} + a_{12}b_{41}^{1+}\widehat{\lambda}_2 + a_{13}b_{42}^{1+}\widehat{\lambda}_2)/(a_{13} - a_{12}a_{43}).
\end{aligned}
$$

Для вычисления матрицы $\boldsymbol{C}_0^-$, необходимой для определения регулятора нулевого уровня, воспользуемся второй формулой в (1.7). В результате получим

$$
\boldsymbol{C}_0^- = \boldsymbol{C}_0^+ - \boldsymbol{C}_0^{R\perp}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{21}^m & c_{22}^m \\ c_{32}^m & c_{33}^m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Здесь

$$
c_{21}^m = b_{21}^1 f_{11}^1 + b_{22}^1 f_{21}^1 + b_{23}^1 f_{31}^1 + b_{24}^1 f_{41}^1, \quad c_{22}^m = b_{21}^1 f_{12}^1 + b_{22}^1 f_{22}^1 + b_{23}^1 f_{32}^1 + b_{24}^1 f_{42}^1,
$$

$$
c_{32}^m = -b_{11}^1 f_{11}^1 - b_{12}^1 f_{21}^1 - b_{13}^1 f_{31}^1 - b_{14}^1 f_{41}^1, \quad c_{33}^m = -b_{11}^1 f_{12}^1 - b_{12}^1 f_{22}^1 - b_{13}^1 f_{32}^1 - b_{14}^1 f_{42}^1.
$$

В соответствии с теоремой проанализируем соблюдение условия управляемости MIMO-системы на нулевом уровне декомпозиции, для чего определим матрицы

$$
\boldsymbol{G}_0 = (\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^+\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}^a & a_{22}^a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_0 = (\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^{R\perp} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

где

$$a_{21}^a = c_{21}^m + a_{43}c_{32}^m, \quad a_{22}^a = c_{22}^m + a_{43}c_{33}^m.$$

Вычислим для нулевого уровня декомпозиции ранг следующей блочной матрицы:

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{H}_0 \ \ \boldsymbol{G}_0\boldsymbol{H}_0] = 2,$$

что совпадает с числом измеряемых компонент вектора состояния, т.е. $m = 2$. Следовательно, нулевой уровень также удовлетворяет критерию управляемости, определенному в теореме.

Теперь следует найти Φ_0 для нулевого уровня декомпозиции. Для этого осуществим декомпозицию матриц $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{G}_0$ нулевого уровня на два подуровня и вычислим соответствующие матрицы. В результате получим

$$(\boldsymbol{H}_0)_0 = \boldsymbol{H}_0, \quad (\boldsymbol{H}_0)_0^{\perp} = [0 \ 1],$$

$$(\boldsymbol{H}_0)_0^{+} = [1 \ 0], \quad (\boldsymbol{G}_0)_1 = (\boldsymbol{H}_0)_0^{\perp}\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{H}_0)_0^{\perp T} = a_{22}^a,$$

$$(\boldsymbol{H}_0)_1 = (\boldsymbol{H}_0)_0\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{H}_0 = a_{21}^a,$$

$$(\boldsymbol{H}_0)_1^{+} = (a_{21}^a)^{-1}.$$

Назначим собственное значение $(\Phi_0)_1 = \hat{\lambda}_3$ и вычислим матрицу коэффициентов обратной связи первого подуровня нулевого уровня декомпозиции. Следовательно, имеем

$$k_1 = -(a_{22}^a - \hat{\lambda}_3)/a_{21}^a.$$

Вычислим матрицу

$$(\boldsymbol{H}_0)_0^{-} = (\boldsymbol{H}_0)_0^{+} - k_1(\boldsymbol{H}_0)_0^{\perp} = [1 \ \ (a_{22}^a - \hat{\lambda}_3)/a_{21}^a].$$

Далее назначим собственное значение $(\Phi_0)_0 = \hat{\lambda}_4$ и найдем матрицу $\boldsymbol{K}_0$ по формуле

$$\boldsymbol{K}_0 = (\Phi_0)_0(\boldsymbol{H}_0)_0^{-} - (\boldsymbol{H}_0)_0^{-}\boldsymbol{G}_0 = [\hat{\lambda}_3 - a_{22}^a + \hat{\lambda}_4 \ \ -(a_{22}^a - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^a - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^a].$$

В результате с использованием выражения (2.3) получим искомую матрицу Φ_0 с собственными значениями $\hat{\lambda}_3$, $\hat{\lambda}_4$, а именно

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_3 - a_{22}^a + \hat{\lambda} & -(a_{22}^a - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^a - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^a \\ a_{21}^a & a_{22}^a \end{bmatrix}.$$

Используя полученные выше выражения для $\boldsymbol{C}_0^{+}$, $\boldsymbol{C}_0^{R\perp}$, $\boldsymbol{F}_1$ вычисляем

$$\boldsymbol{C}_0^{-} = \boldsymbol{C}_0^{+} - \boldsymbol{C}_0^{R\perp}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1$$

и, применяя первую формулу из (1.7), в конечном итоге будем иметь следующую формулу регулятора в законе управления по вектору выхода:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{B}_0^{+}(\boldsymbol{C}_0^{-}\Phi_0 - \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^{-}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11} & \boldsymbol{F}_{12} \\ \boldsymbol{F}_{21} & \boldsymbol{F}_{22} \\ \boldsymbol{F}_{31} & \boldsymbol{F}_{32} \\ \boldsymbol{F}_{41} & \boldsymbol{F}_{42} \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

где для компактности записи введены обозначения:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{11} = {} & -b_{14}^{+}(c_{21}^{m} - a_{21}^{a} + a_{43}c_{32}^{m}) - b_{12}^{+}[a_{21} + a_{22}c_{21}^{m} + a_{23}c_{32}^{m} - a_{21}^{a}c_{22}^{m} - c_{21}^{m}(\hat{\lambda}_3 - a_{22}^{a} + \hat{\lambda}_4)] - \\
& - b_{13}^{+}[a_{31} + a_{32}c_{21}^{m} + a_{33}c_{32}^{m} - a_{21}^{a}c_{33}^{m} - c_{32}^{m}(\hat{\lambda}_3 - a_{22}^{a} + \hat{\lambda}_4)] - b_{11}^{+}(a_{11} + a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_4 + \\
& + a_{12}c_{21}^{m} + a_{13}c_{32}^{m}), \\
\boldsymbol{F}_{12} = {} & -b_{12}^{+}[a_{22}c_{22}^{m} + a_{23}c_{33}^{m} - a_{22}^{a}c_{22}^{m} + c_{21}^{m}(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}] - b_{13}^{+}[a_{32}c_{22}^{m} + a_{33}c_{33}^{m} - \\
& - a_{22}^{a}c_{33}^{m} + c_{32}^{m}(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}] - b_{14}^{+}(c_{22}^{m} - a_{22}^{a} + a_{43}c_{33}^{m}) - b_{11}^{+}[a_{14} + a_{12}c_{22}^{m} + a_{13}c_{33}^{m} + \\
& + (a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{31} = {} & -b_{34}^{+}(c_{21}^{m} - a_{21}^{a} + a_{43}c_{32}^{m}) - b_{32}^{+}[a_{21} + a_{22}c_{21}^{m} + a_{23}c_{32}^{m} - a_{21}^{a}c_{22}^{m} - c_{21}^{m}(\hat{\lambda}_3 - a_{22}^{a} + \hat{\lambda}_4)] - \\
& - b_{33}^{+}[a_{31} + a_{32}c_{21}^{m} + a_{33}c_{32}^{m} - a_{21}^{a}c_{33}^{m} - c_{32}^{m}(\hat{\lambda}_3 - a_{22}^{a} + \hat{\lambda}_4)] - b_{31}^{+}(a_{11} + a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_4 + a_{12}c_{21}^{m} + a_{13}c_{32}^{m}), \\
\boldsymbol{F}_{32} = {} & -b_{32}^{+}[a_{22}c_{22}^{m} + a_{23}c_{33}^{m} - a_{22}^{a}c_{22}^{m} + c_{21}^{m}(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}] - b_{33}^{+}[a_{32}c_{22}^{m} + a_{33}c_{33}^{m} - a_{22}^{a}c_{33}^{m} + \\
& + c_{32}^{m}(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}] - b_{34}^{+}(c_{22}^{m} - a_{22}^{a} + a_{43}c_{33}^{m}) - b_{31}^{+}[a_{14} + a_{12}c_{22}^{m} + a_{13}c_{33}^{m} + \\
& + (a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{41} = {} & -b_{44}^{+}(c_{21}^{m} - a_{21}^{a} + a_{43}c_{32}^{m}) - b_{42}^{+}[a_{21} + a_{22}c_{21}^{m} + a_{23}c_{32}^{m} - a_{21}^{a}c_{22}^{m} - c_{21}^{m}(\hat{\lambda}_3 - a_{22}^{a} + \hat{\lambda}_4)] - \\
& - b_{43}^{+}[a_{31} + a_{32}c_{21}^{m} + a_{33}c_{32}^{m} - a_{21}^{a}c_{33}^{m} - c_{32}^{m}(\hat{\lambda}_3 - a_{22}^{a} + \hat{\lambda}_4)] - b_{41}^{+}(a_{11} + a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_4 + a_{12}c_{21}^{m} + a_{13}c_{32}^{m}), \\
\boldsymbol{F}_{42} = {} & -b_{42}^{+}[a_{22}c_{22}^{m} + a_{23}c_{33}^{m} - a_{22}^{a}c_{22}^{m} + c_{21}^{m}(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}] - b_{43}^{+}[a_{32}c_{22}^{m} + a_{33}c_{33}^{m} - a_{22}^{a}c_{33}^{m} + \\
& + c_{32}^{m}(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}] - b_{44}^{+}(c_{22}^{m} - a_{22}^{a} + a_{43}c_{33}^{m}) - b_{41}^{+}[a_{14} + a_{12}c_{22}^{m} + a_{13}c_{33}^{m} + \\
& + (a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_3)(a_{22}^{a} - \hat{\lambda}_4)/a_{21}^{a}].
\end{aligned}
$$

Регулятор (3.7) представляет собой аналитическое решение рассматриваемой задачи синтеза и обеспечивает боковому управляемому движению гипотетического ЛА спектр (3.4).

Аналогичным образом можно получить решение в численном виде. Допустим, требуется обеспечить замкнутой системе “ЛА + система управления” следующий спектр:

$$\Lambda = \{-0.24 \pm 0.12i, -2.2, -0.28\}, \tag{3.8}$$

когда матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.1720 & 0.0631 & 0.9980 & 0.0510 \\ -26.0500 & -2.7490 & -0.5330 & 0 \\ -4.3370 & -0.0060 & -0.3010 & 0 \\ 0 & 1 & -0.0632 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -0.0340 & 0 & -0.0100 & 0 \\ -4.7570 & -18.6640 & -1.5000 & -20.0000 \\ -3.0700 & 0.6660 & -1.0000 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Пусть начальное значение вектора состояния в системе единиц СИ равно:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0938 \\ -0.0243 \\ -0.0220 \\ 0.0209 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

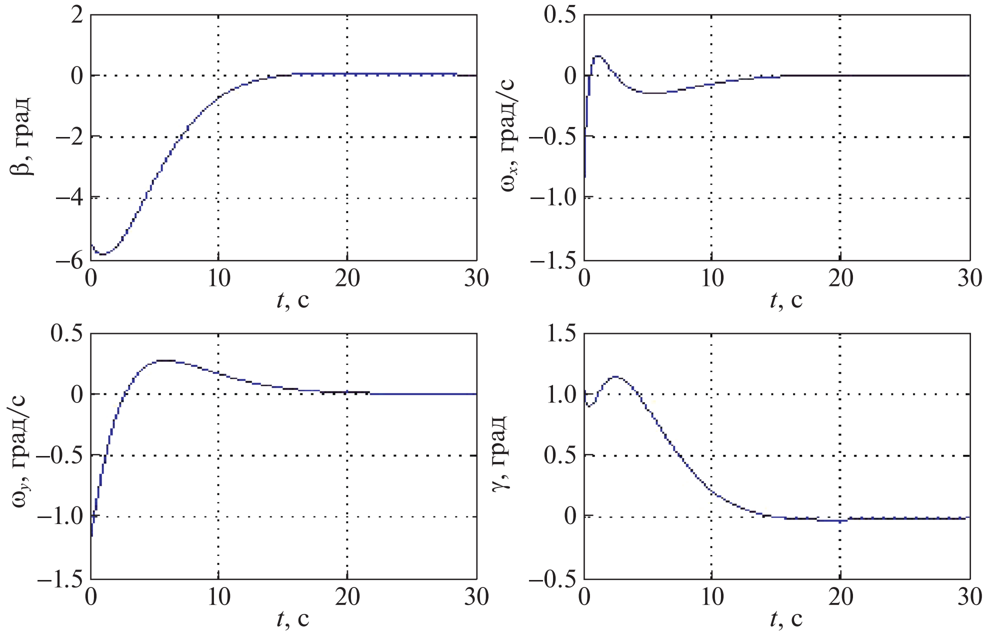

Рис. 1

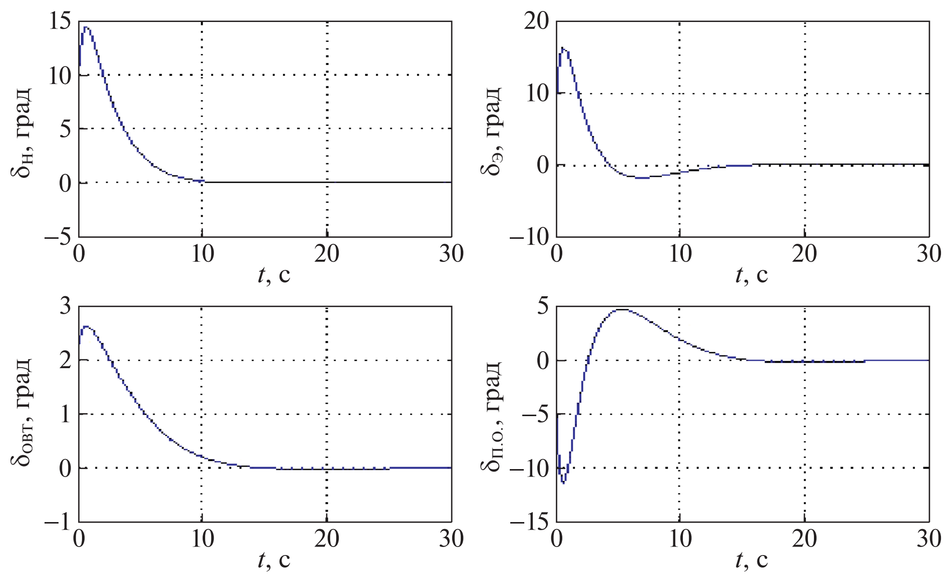

Рис. 2

Числовое значение матрицы $\boldsymbol{F}$ в соответствии с (3.7) будет следующим:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -5.1600 & -16.8687 \\ -7.6761 & -30.7344 \\ -0.6561 & -1.2635 \\ 7.1490 & 32.8486 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Графики переходных процессов и величин управляющих воздействий для заданного спектра (3.8), модели ЛА (3.9)–(3.11) и матрицы регулятора (3.12) приведены соответственно на рис. 1 и 2. При этом вычисление спектра матрицы $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC}$ дает

$$\operatorname{eig}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC}) = \{-0.24 \pm 0.12i, -2.2, -0.28\},$$

что, согласно (3.8), и требовалось получить.

Заключение. Представлен алгоритм синтеза закона управления линейной MIMO-системой с обратной связью по вектору выхода, обеспечивающий заданный спектр многомерной динамической системы в пространстве состояний. Сформулирована и доказана соответствующая теорема.

В основе предлагаемого подхода лежит принцип дуальности задачи управления MIMO-системой по вектору состояния и задачи построения наблюдателя состояния. Алгоритм без каких-либо изменений применим как для непрерывного, так и для дискретного случаев описания математической модели MIMO-системы, не имеет никаких ограничений по заданию элементов спектра замкнутой MIMO-системы, позволяет получать аналитические решения задачи синтеза и осуществлять параметризацию множества эквивалентных законов управления с обратной связью.

Возможности метода продемонстрированы на решении задачи управления боковым движением моделью гипотетического ЛА. Особенностью данной модели является неполнота ранга матрицы управления, обусловленная "избыточностью" органов управления в боковой плоскости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Для этого достаточно доказать справедливость утверждения для нулевого уровня декомпозиции, а результаты распространить на все оставшиеся.

Рассмотрим формулу регулятора

$$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{B}_0^+(\boldsymbol{C}_0^-\Phi_0 - \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^-) \tag{П.1}$$

и сопоставим ей линейное уравнение вида

$$\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{Z}, \tag{П.2}$$

где $\boldsymbol{Z}$ – некоторая заданная матрица размера $n \times m$.

Известно [17], что уравнение (П.2) разрешимо относительно матрицы $\boldsymbol{F}_0$, если и только если выполняется равенство

$$0 = \boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{Z}, \tag{П.3}$$

где, как и прежде, $\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{B}_0 = 0$, $\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}_0^{\perp\mathrm{т}}\ \ \boldsymbol{B}_0] = n$.

Если же (П.3) верно, то матрица $\boldsymbol{F}_0$ определяется в виде

$$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{B}_0^+\boldsymbol{Z}. \tag{П.4}$$

Сопоставляя (П.1) и (П.4), получим очевидное равенство

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}_0^-\Phi_0 - \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^-. \tag{П.5}$$

Из (П.3) и (П.5) следует, что

$$\boldsymbol{B}_0^\perp(\boldsymbol{C}_0^-\Phi_0 - \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^-) = 0. \tag{П.6}$$

Рассмотрим (П.6) как уравнение относительно неизвестной матрицы Φ_0 и перепишем его в виде

$$\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-\Phi_0 = \boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^-, \tag{П.7}$$

отвечающем по форме (П.2). Для разрешимости (П.7) необходимо и достаточно выполнения условия

$$0 = (\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^\perp\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^-, \tag{П.8}$$

где $(\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^\perp\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^- = 0$, $\operatorname{rank}[(\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^{\perp\mathrm{т}}\ \ \boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-] = n$, определяющего формулу множества решений [17]

$$\Phi_0 = (\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^+\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^+ + (\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^{R\perp}\mathbf{z} \tag{П.9}$$

с произвольной матрицей $\mathbf{z}$ подходящего размера. Таким образом,

$$\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-\Phi_0 = \boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-(\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^+\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^+ + \underbrace{\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-(\boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{C}_0^-)^{R\perp}}_{0}\mathbf{z} = \boldsymbol{B}_0^\perp\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^+.$$

Вводя далее обозначения

$$G_0 = (B_0^{\perp} C_0^{-})^{+} B_0^{\perp} A_0 C_0^{-}, \quad H_0 = (B_0^{\perp} C_0^{-})^{R\perp} \tag{П.10}$$

и отождествляя пару матриц (G_0, H_0) с управляемой системой, определяем подходящую матрицу Φ_0, удовлетворяющую (П.9) и (2.3). Для обеспечения заданного спектра у матрицы Φ_0 требуется полная управляемость пары матриц (G_0, H_0). Таким образом, доказана первая часть теоремы, основанная на выражениях (2.1)–(2.3). Доказательство второй части теоремы, содержащей утверждения (2.4)–(2.6), приведенное в [17, с. 130, 131], здесь не приводится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhattachrya S.* Sparsity Based Ceedback Design: A new Paradigm in Opportunistic Sensing // Proc. American Control Conf. St. Louis, 2011. P. 3704–3709.
2. *Blumthaler I., Oberst U.* Design, Parameterization, and Pole Placement of Stabilizing Output Feedback Compensators Via Injective Cogenerator Quotient Signal Modules // Linear Algebra Appl. 2012. V. 436 (5-2). P. 963–1000.
3. *Eremenko A., Gabrielov A.* Pole Placement by Static Output Feedback for Generic Linear Systems // SIAM J. Contr. Opt. 2002. V. 41 (1). P. 303–312.
4. *Franke M.* Eigenvalue Assignment by Static Output Feedback – on a new Solvability Condition and the Computation of Low Gain Feedback Matrices // Intern. J. Contr. 2014. V. 87 (1). P. 64–75.
5. *Kaiyang Yanga, Orsi R.* Generalized Pole Placement Via Static Output Feedback: A Methodology Based on Projections // Automatica. 2006. V. 42. P. 2143–2150.
6. *Peretz Y.* A Randomized Approximation Algorithm for the Minimal-Norm Static-Output-Feedback Problem // Automatica. 2016. V. 63. P. 221–234.
7. *Shimjith S.R., Tiwari A.P., Bandyopadhyay B.* Modeling and Control of a Large Nuclear Reactor. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
8. *Wang X.A.* On Linear Solutions of the Output Feedback Pole Assignment Problem // IEEE Trans. Autom. Contr. 2013. V. 58(9). P. 2354–2359.
9. *Fu M.* Pole Placement Via Static Output Feedback is NP-hard // IEEE Trans. Autom. Contr. 2004. V. 49 (5). P. 855–857.
10. *Van der Woude J.W.* A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single. Input Systems // Systems & Control Letters. 1988. V. 11. P. 285–287.
11. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром дескрипторной динамической системы // ДАН. 2016. Т. 468. № 2. С. 134–136.
12. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван-дер-Воуда // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
13. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Олейник А.С. и др.* Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестн. МГТУ. Приборостроение. 2014. № 5. С. 3–15.
14. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Стабилизация взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж-рысканье при отсутствии информации об угле скольжения // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 95–105.
15. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Управление по выходу продольным движением летательного аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 164–175.
16. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. и др.* Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 14–20.
17. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательными аппаратами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 666 с.
18. *Рябченко В.Н.* Вложение систем. Нерегулярные законы управления // АиТ. 2001. № 7. С. 198–210.
19. *Боднер В.А.* Системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1973. 504 с.
20. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.
21. *Зубов Н.Е., Рябченко В.Н.* О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай // Вестн. МГТУ. Естественные науки. 2018. № 1 (76). С. 16–25.