ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, № 3, с. 75–80

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 519.171.4, 519.179.1

ОПЕРАЦИИ НАД k-ОДНОРОДНЫМИ ГИПЕРГРАФАМИ И ИХ ВЕКТОРЫ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН[1]

© 2020 г. Е. К. Егорова[a], А. С. Есенков[b], А. В. Мокряков[a,c,*]
[a] МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия
[b] ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
[c] РГУ им. А.Н. Косыгина, Москва, Россия
*e-mail: MokryakovAlVik@gmail.com

Поступила в редакцию 05.12.2019 г.
После доработки 20.12.2019 г.
Принята к публикации 27.12.2019 г.

Рассматриваются операции над k-однородными гиперграфами и нахождение векторов степеней вершин от результата операции без построения самих гиперграфов-результатов. При этом предлагается выразить векторы от определенных операций через вектор от пересечения двух однородных гиперграфов. Это позволит ускорить вычисления и упростить механизм построения соответствующих векторов.

DOI: 10.31857/S000233882003004X

Введение. Минимакс при транспортных ограничениях [1] имеет ряд обобщений [2, 3]. Еще одним таким обобщением является развитие, связанное с гиперграфами. Известно, что гиперграф [4] – это множество гиперребер на заданном множестве вершин [5]. Тогда k-однородным гиперграфом (k – 1-комплексом [6]) называют гиперграф, у которого каждое гиперребро инцидентно ровно k вершинам [7]. Соответственно над k-однородными гиперграфами, определенными над одним и тем же множеством вершин, действуют все классические для графов операции: пересечение, объединение, вычитание, дополнение. Кроме того, добавим операции "симметрическая разность", "эквивалентность", а также дополнения к объединению и пересечению. В [8] показано, что множество k-однородных гиперграфов с операциями пересечения и объединения является алгеброй. При этом для каждого гиперграфа существует вектор его степеней вершин [9]. Однако задача нахождения вектора степеней вершин от гиперграфа – результата операции над однородными гиперграфами связана либо с построением соответствующего гиперграфа, либо с выполнением алгоритма над матрицами смежности. Но следует учитывать, что нахождения вектора степеней вершин по матрице смежности имеет сложность $O(n^k)$. В работе рассматриваем способ нахождения векторов степеней вершин от ряда операций над однородными гиперграфами через вектор степени вершин от пересечения гиперграфов. Данный способ позволяет сократить объем вычислений и ускорить нахождение векторов от результатов операций над однородными гиперграфами.

1. Операции над k-однородными гиперграфами. Для начала следует отметить, что все k-однородные гиперграфы, которые здесь будут рассматриваться, относятся к одному и тому же классу – ненаправленные, без петель, с весами гиперребер, равными 1. Соответственно в дальнейшем это будет подразумеваться.

Теперь определим операции над однородными гиперграфами, которые нам потребуются в дальнейшем. Пусть даны два таких гиперграфа G_1 и G_2 с одинаковым множеством вершин, тогда обозначим операции над ними следующим образом:

$G_1 \cup G_2$ – объединение гиперребер G_1 и G_2 (OR);

$G_1 \cap G_2$ – пересечение гиперребер G_1 и G_2 (AND);

G_1/G_2 – вычитание гиперребер G_2 из G_1;

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант RFMEFI60719X0312).

$\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ – дополнения гиперграфов G_1 и G_2 соответственно (NOT);

$G_1 \oplus G_2$ – “симметричная разность” гиперребер G_1 и G_2 (XOR);

$G_1 \equiv G_2$ – “эквивалентность” наличия гиперребер или их отсутствия в G_1 и G_2 (EQV);

$G_1 \overline{\cup} G_2$ – дополнение к объединению гиперграфов (NOR);

$G_1 \overline{\cap} G_2$ – дополнение к пересечению гиперграфов (NAND).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий действие представленных операций.

Пример 1. Пусть заданы 2-однородные гиперграфы (графы) G_1 и G_2 на восьми вершинах. Графы G_1 и G_2, а также полученные в результате выполнения операций над ними представлены на рисунке. Там же приведены векторы степеней вершин соответствующих графов.

Вспомним известные свойства вектора степеней вершин однородного гиперграфа. Пусть G – k-однородный гиперграф на n вершинах и $A(G) = (a_1, \ldots, a_n)$ – вектор степеней его вершин. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$0 \le \deg u_i = a_i \le C_{n-1}^{k-1},$$

где u_i – вершина гиперграфа G, C_n^k – число сочетаний из n по k элементов, а $i = \overline{1, n}$.

Зададим G_F как полный k-однородный гиперграф на n вершинах, тогда $A(G_F) = (C_{n-1}^{k-1}, \ldots, C_{n-1}^{k-1})$. Если G_0 – вполне несвязанный гиперграф на n вершинах, то $A(G_0) = (0, \ldots, 0)$.

2. Векторы степеней вершин от результатов операций над однородными гиперграфами. Теперь рассмотрим связь между вектором степеней вершин от операции дополнения для k-однородных гиперграфов и вектором самого гиперграфа.

Теорема 1. Пусть дан k-однородный гиперграф G и его вектор степеней вершин $A(G)$, тогда вектор степеней вершин $\overline{G}$ равен

$$A(\overline{G}) = A(G_F) - A(G) = (C_{n-1}^{k-1} - a_1, \ldots, C_{n-1}^{k-1} - a_n).$$

Доказательство теоремы вытекает из определения дополнения однородного гиперграфа G: так как в дополнении присутствуют все гиперребра, отсутствующие в G, но присутствующие в полном k-однородном гиперграфе на тех же вершинах, что и G.

Замечание 1. Пусть дан k-однородный гиперграф G и его вектор степеней вершин $A(G)$, тогда сумма векторов $A(G)$ и $A(\overline{G})$ равна вектору k-полного однородного гиперграфа, построенного на тех же вершинах, что и G.

Покажем связь между векторами от объединения и пересечения однородных гиперграфов.

Теорема 2. Пусть даны k-однородные гиперграфы G_1 и G_2, а также их векторы $A_1 = A(G_1)$ и $A_2 = A(G_2)$, тогда

$$A_3 = A(G_1 \cup G_2) = A_1 + A_2 - A(G_1 \cap G_2);$$

$$A_4 = A(G_1 \overline{\cup} G_2) = A(G_F) - A_1 - A_2 + A(G_1 \cap G_2).$$

Доказательство. При объединении однородных гиперграфов объединяются множества ребер. Таким образом, при наличии гиперребра в любом из гиперграфов в результирующем гиперграфе оно тоже будет присутствовать. Однако при сложении координат вектора в случае, если гиперребро принадлежит обоим гиперграфам, мы посчитаем его дважды. Другими словами, разница между A_3 и суммой векторов гиперграфов G_1 и G_2 равна вектору, который построен из гиперграфа, имеющего только те ребра, что есть у обоих гиперграфов. Но вектор, у которого учтены только ребра, принадлежащие обоим гиперграфам, это вектор $A(G_1 \cap G_2)$. Таким образом $A_1 + A_2 - A_3 = A(G_1 \cap G_2)$. Что и требовалось доказать.

Следующая теорема может быть сформулирована независимо от предыдущей, но может быть и ее следствием.

Теорема 3. Пусть даны k-однородные гиперграфы G_1 и G_2, а также их векторы $A_1 = A(G_1)$ и $A_2 = A(G_2)$, тогда

$$A_3 = A(G_1 \cap G_2) = A_1 + A_2 - A(G_1 \cup G_2);$$

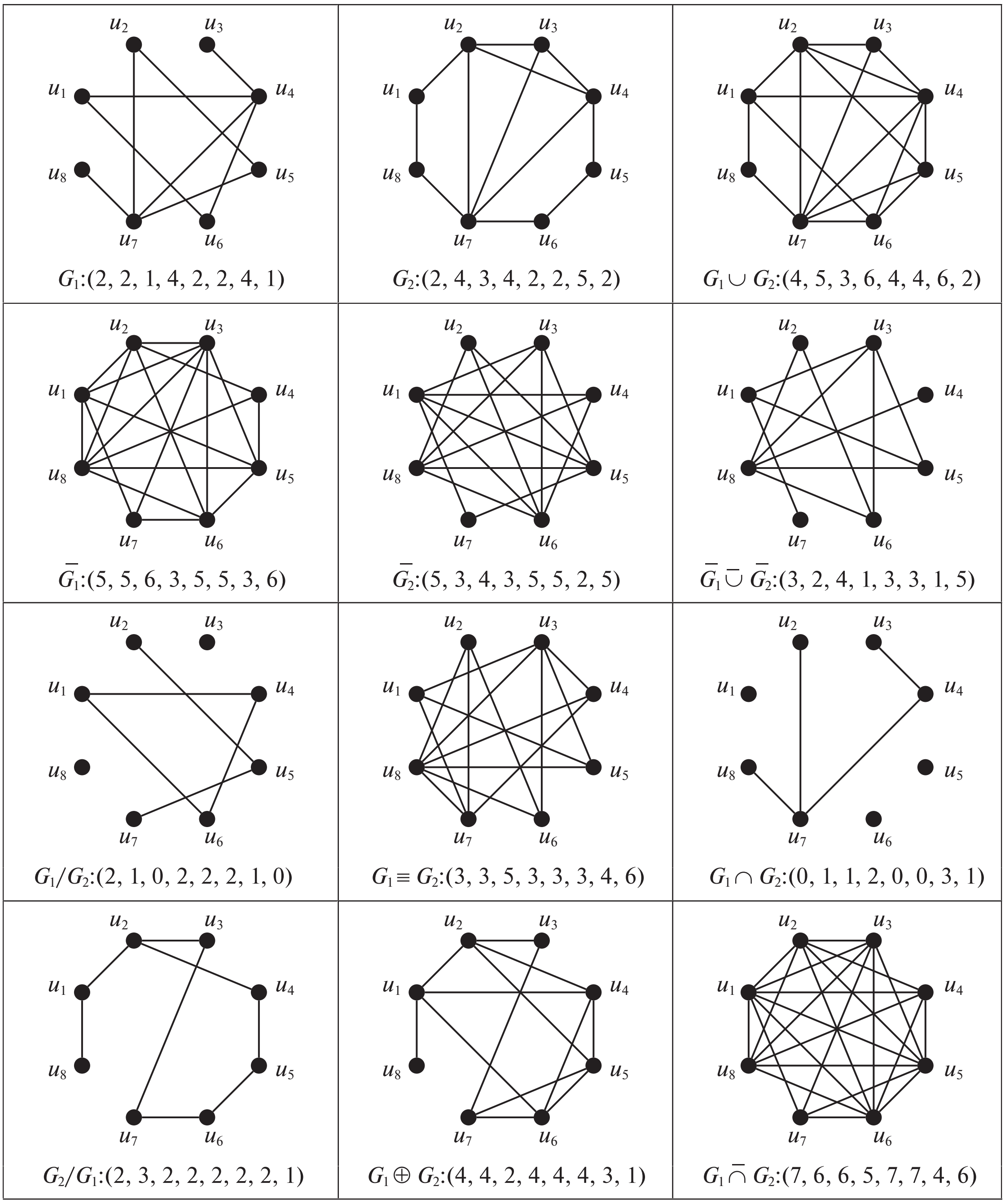

Рисунок. Графы-результаты операций и их векторы степеней вершин

$$A_4 = A(G_1 \bar{\cap} G_2) = A(G_F) - A_1 - A_2 + A(G_1 \cup G_2) = A(G_F) - A(G_1 \cap G_2).$$

Доказательство аналогично предыдущей теореме.

Теперь покажем, что можно выразить все операции через одну из уже определенных нами операций. Для демонстрации возьмем пересечение как базисную операцию над векторами.

Перейдем к вектору от операции разности однородных гиперграфов.

Т е о р е м а 4. Пусть даны k-однородные гиперграфы G_1 и G_2, а также их векторы $A_1 = A(G_1)$ и $A_2 = A(G_2)$, тогда

$$A_3 = A(G_1/G_2) = A_1 - A(G_1 \cap G_2);$$

$$A_4 = A(G_2/G_1) = A_2 - A(G_1 \cap G_2).$$

Доказательство аналогично теореме 2.

Теперь рассмотрим связь векторов и операции эквивалентности.

Т е о р е м а 5. Пусть даны k-однородные гиперграфы G_1 и G_2, а также их векторы $A_1 = A(G_1)$ и $A_2 = A(G_2)$, тогда

$$A_3 = A(G_1 \equiv G_2) = A(G_F) - A_1 - A_2 + 2A(G_1 \cap G_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операцию эквивалентности можно представить как

$$G_1 \equiv G_2 = (G_1 \cap G_2) \cup (\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2) = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2).$$

Теперь возьмем вектор от полученного гиперграфа:

$$A(G_1 \equiv G_2) = A((G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2)) = A(G_1 \cap G_2) + A(G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2) - A((G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2)).$$

При этом $A((G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2)) = A(G_0)$, так как $(G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2) = \varnothing$. Следовательно,

$$A(G_1 \cap G_2) + A(G_1 \mathbin{\overline{\cup}} G_2) = A(G_1 \cap G_2) + A(G_F) - A_1 - A_2 + A(G_1 \cap G_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(G_1 \equiv G_2) = A(G_F) - A_1 - A_2 + 2A(G_1 \cap G_2).$$

Отсюда легко получить следующую теорему.

Т е о р е м а 6. Пусть даны k-однородные гиперграфы G_1 и G_2, а также их векторы $A_1 = A(G_1)$ и $A_2 = A(G_2)$, тогда

$$A_3 = A(G_1 \oplus G_2) = A_1 + A_2 - 2A(G_1 \cap G_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данное утверждение легко доказывается, если вспомнить, что гиперграф $G_1 \oplus G_2 = \overline{G_1 \equiv G_2}$.

Единственное препятствие для простого расчета вектора от результата любой из предложенных операций состоит в том, что нужно находить вектор от пересечения k-однородных гиперграфов. Для данной проблемы можно предложить следующее решение.

З а м е ч а н и е 2. Пусть даны k-однородные гиперграфы G_1 и G_2 и их матрицы смежности X_1 и X_2 соответственно. Тогда для вектора $A(G_1 \cap G_2) = (a_1, \ldots, a_n)$ его координаты можно найти следующим образом:

$$a_i = \sum_{p=1}^{n} \min(x_{1\,p,i_2\ldots i_k}, x_{2\,p,i_2\ldots i_k}) = \sum_{p=1}^{n} x_{1\,p,i_2\ldots i_k} \cdot x_{2\,p,i_2\ldots i_k}.$$

Проиллюстрируем полученные результаты на примере.

П р и м е р 2. Рассмотрим векторы, представленные в примере 1: $A_1 = A(G_1) = (2,2,1,4,2,2,4,1)$ и $A_2 = A(G_2) = (2,4,3,4,2,2,5,2)$. Также возьмем вектор $A_3 = A(G_1 \cap G_2) = (0,1,1,2,0,0,3,1)$.

Так как G_1 и G_2 – это графы (2-однородные гиперграфы), то вектор полного графа на восьми вершинах будет равен $A_F = A(G_F) = (7,7,7,7,7,7,7,7)$.

Теперь мы можем найти векторы для других операций:

$$A(\bar{G}_1) = A_F - A_1 = (7,7,7,7,7,7,7,7) - (2,2,1,4,2,2,4,1) = (5,5,6,3,5,5,3,6);$$
$$A(\bar{G}_2) = A_F - A_2 = (7,7,7,7,7,7,7,7) - (2,4,3,4,2,2,5,2) = (5,3,4,3,5,5,2,5);$$
$$A(G_1/G_2) = A_1 - A_3 = (2,2,1,4,2,2,4,1) - (0,1,1,2,0,0,3,1) = (2,1,0,2,2,2,1,0);$$
$$A(G_2/G_1) = A_2 - A_3 = (2,4,3,4,2,2,5,2) - (0,1,1,2,0,0,3,1) = (2,3,2,2,2,2,2,1);$$

$$A(G_1 \cup G_2) = A_1 + A_2 - A_3 = (2,2,1,4,2,2,4,1) +$$
$$+ (2,4,3,4,2,2,5,2) - (0,1,1,2,0,0,3,1) = (4,5,3,6,4,4,6,2);$$

$$A(G_1 \oplus G_2) = A_1 + A_2 - 2A_3 = (2,2,1,4,2,2,4,1) +$$
$$+ (2,4,3,4,2,2,5,2) - 2(0,1,1,2,0,0,3,1) = (4,4,2,4,4,4,3,1);$$

$$A(G_1 \equiv G_2) = A_F - A_1 - A_2 + 2A_3 = (7,7,7,7,7,7,7,7) - (2,2,1,4,2,2,4,1) - \\ - (2,4,3,4,2,2,5,2) + 2(0,1,1,2,0,0,3,1) = (3,3,5,3,3,3,4,6);$$

$$A(G_1 \,\bar{\cap}\, G_2) = A_F - A_3 = (7,7,7,7,7,7,7,7) - (0,1,1,2,0,0,3,1) = (7,6,6,5,7,7,4,6);$$
$$A(G_1 \,\bar{\cup}\, G_2) = A_F - A_1 - A_2 + A_3 = (7,7,7,7,7,7,7,7) - (2,2,1,4,2,2,4,1) - \\ - (2,4,3,4,2,2,5,2) + (0,1,1,2,0,0,3,1) = (3,2,4,1,3,3,1,5).$$

При сравнении с примером 1 видим, что все векторы найдены верно.

В заключение рассмотрим пример с 5-однородными гиперграфами.

Пример 3. Пусть заданы два 5-однородных гиперграфа $G_1 = G_1(S_1,V)$ и $G_2 = G_2(S_2,V)$, где $V = u_1,\ldots,u_7$ — множество вершин, S_1 и S_2 — множества гиперребер. Зададим гиперребра из множества S в упрощенном виде как наборы по 5 чисел-индексов вершин:

$$S_1 = \{\{1,2,4,6,7\},\{1,2,5,6,7\},\{1,3,4,5,7\},\{1,3,4,6,7\},\{1,3,5,6,7\},\{2,3,4,5,6\},\{2,3,4,6,7\},\{2,3,5,6,7\}\};$$
$$S_2 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,6,7\},\{1,2,4,5,6\},\{1,2,4,5,7\},\{1,2,4,6,7\},\{1,3,4,5,6\}, \\ \{1,3,4,5,7\},\{1,3,5,6,7\},\{2,3,4,5,7\},\{2,3,4,6,7\},\{2,3,5,6,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\}.$$

Легко находим векторы степеней вершин $A_1 = A(G_1) = (5,5,6,5,5,7,7)$ и $A_2 = A(G_2) = (10, 11, 11, 12,10,10,11)$. Также легко определить вектор полного 5-однородного гиперграфа на семи вершинах: $A_F = (15,15,15,15,15,15,15)$.

Далее построим гиперграф-пересечение $G_3 = G_3(S_3,V) = G_1 \cap G_2$, где $S_3 = S_1 \cap S_2$:

$$S_3 = \{\{1,2,4,6,7\},\{1,3,4,5,7\},\{1,3,5,6,7\},\{2,3,4,6,7\},\{2,3,5,6,7\}\}.$$

Соответственно вектор $A_3 = A(G_1 \cap G_2) = (3,3,4,3,3,4,5)$. Следовательно, векторы остальных гиперграфов-результатов операций равны:

$$A(\bar{G}_1) = A_F - A_1 = (10,10,9,10,10,8,8);$$
$$A(\bar{G}_2) = A_F - A_2 = (5,4,4,3,5,5,4);$$
$$A(G_1/G_2) = A_1 - A_3 = (2,2,2,2,2,3,2);$$
$$A(G_2/G_1) = A_2 - A_3 = (7,8,7,9,7,6,6);$$
$$A(G_1 \,\bar{\cap}\, G_2) = A_F - A_3 = (12,12,11,12,12,11,10);$$
$$A(G_1 \oplus G_2) = A_1 + A_2 - 2A_3 = (9,10,9,11,9,9,8);$$
$$A(G_1 \equiv G_2) = A_F - A_1 - A_2 + 2A_3 = (6,5,6,4,6,6,7);$$
$$A(G_1 \cup G_2) = A_1 + A_2 - A_3 = (12,13,13,14,12,13,13);$$
$$A(G_1 \,\bar{\cup}\, G_2) = A_F - A_1 - A_2 + A_3 = (3,2,2,1,3,2,2).$$

В завершение примера построим множества гиперребер для гиперграфов-результатов рассматриваемых операций. Убедиться в соответствии найденных векторов построенным гиперграфам несложно:

$$\bar{S}_1 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,5,7\},\{1,2,3,6,7\},\{1,2,4,5,6\}, \\ \{1,2,4,5,7\},\{1,3,4,5,6\},\{1,4,5,6,7\},\{2,3,4,5,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\};$$

$$\bar{S}_2 = \{\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,5,7\},\{1,2,5,6,7\},\{1,3,4,6,7\},\{1,4,5,6,7\},\{2,3,4,5,6\}\};$$
$$S_1/S_2 = \{\{1,2,5,6,7\},\{1,3,4,6,7\},\{2,3,4,5,6\}\};$$

$$S_1/S_2 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,6,7\},\{1,2,4,5,6\}, \\ \{1,2,4,5,7\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\};$$

$$S_1 \,\bar{\cap}\, S_2 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,5,7\}, \\ \{1,2,3,6,7\},\{1,2,4,5,6\},\{1,2,4,5,7\},\{1,2,5,6,7\},\{1,3,4,5,6\},\{1,3,4,6,7\}, \\ \{1,4,5,6,7\},\{2,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\};$$

$$S_1 \cup S_2 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,6,7\},\{1,2,4,5,6\},\{1,2,4,5,7\},\{1,2,4,6,7\},$$
$$\{1,2,5,6,7\},\{1,3,4,5,6\},\{1,3,4,5,7\},\{1,3,4,6,7\},\{1,3,5,6,7\},\{2,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,7\},\{2,3,4,6,7\},$$
$$S_1 \bar{\cup} S_2 = \{\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,5,7\},\{1,4,5,6,7\}\};$$
$$S_1 \oplus S_2 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,6,7\},\{1,2,4,5,6\},\{1,2,4,5,7\},\{1,2,5,6,7\},$$
$$\{1,3,4,5,6\},\{1,3,4,6,7\},\{2,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\};$$
$$S_1 \equiv S_2 = \{\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,5,7\},\{1,2,4,6,7\},\{1,3,4,5,7\},\{1,3,5,6,7\},\{1,4,5,6,7\},$$
$$\{2,3,4,6,7\},\{2,3,5,6,7\}\};\ \{2,3,5,6,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\}.$$

Заключение. Таким образом мы получили способ нахождения вектора от результата любой из рассматриваемых операций через вектор от пересечения k-однородных гиперграфов, который также можно легко определить через матрицу смежности. В частном случае, алгоритм для вычисления вектора от пересечения графов имеет сложность $O(n^k)$, но, вычислив один раз вектор пересечения, можно рассчитать остальные операции со сложностью $O(n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mironov A.A.* Minimax under Transportation Constraints. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 309 p.
2. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 1995. V. 33. № 3. P. 107–116.
3. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 2 // J. Computer and Systems Sciences International. 1994. V. 32. № 6. P. 1–11.
4. *Egorova E.K., Mokryakov A.V., Vang L.* Development of Hypergraph Theory // J. Computer and Systems Sciences International. 2018. V. 57. № 1. P. 109–114.
5. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. XXIX. № 6 (180). С. 89–154.
6. *Александров П.С.* Комбинаторная топология. М.: Гостехтеориздат, 1947. 660 с.
7. *Мокряков А.В., Селин П.С., Цурков В.И.* Минимакс и восстановление по вектору в графах. М.: Физматлит, 2017. 309 с.
8. *Mokryakov A.V.* Hypergraphs as Algebraic Structures // J. Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 5. P. 734–740.
9. *Kostyanoi D.S., Mokryakov A.V., Tsurkov V.I.* Hypergraph Recovery Algorithms from a Given Vector of Vertex Degrees // J. Computer and Systems Sciences International. 2014. V. 53. № 4. P. 511–516.