
УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.216

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ
СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ¹**

© 2020 г. К. А. Рыбаков

МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

e-mail: rkoffice@mail.ru

Поступила в редакцию 22.02.2019 г.

После доработки 18.03.2019 г.

Принята к публикации 27.01.2020 г.

Рассматривается задача моделирования и анализа выходных процессов линейных непрерывных стохастических систем и предлагается метод ее решения, основанный на спектральной форме математического описания систем управления. Предложенный подход дает явное представление выходного сигнала системы в виде функционального ряда со случайными коэффициентами либо при приближенном решении в виде частичной суммы, что отличает этот метод от других подходов, когда результатом решения задачи являются детерминированные характеристики выходного сигнала: первые два момента или плотность распределения вероятностей. В качестве приложения рассмотрена задача моделирования ветровых воздействий с помощью формирующего фильтра Драйдена.

DOI: 10.31857/S0002338820030154

Введение. Представление функций с помощью рядов широко применяется для решения самых разных прикладных задач, в том числе задач теории управления. Один из подходов к решению задачи анализа выходных процессов линейных детерминированных систем, основанный на представлении функций рядами по произвольным полным ортонормированным системам функций (базисным системам), т.е. обобщенными рядами Фурье, породил спектральную форму математического описания систем управления и спектральный метод анализа и синтеза [1, 2]. Эта форма предполагает переход от операций с функциями к операциям с их спектральными характеристиками — упорядоченными наборами коэффициентов разложения по базисной системе, которые могут быть представлены в виде матриц-столбцов. Элементарным и типовым звеньям линейных систем, например усилительному, дифференцирующему, интегрирующему, апериодическому, колебательному и др., ставятся в соответствие матрицы, а преобразования сигналов сводятся к линейным преобразованиям спектральных характеристик. Спектральная форма математического описания использовалась и для нелинейных систем управления различных классов.

Хорошо известно, что для линейных непрерывных стохастических систем управления можно получить замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для моментных характеристик ее вектора состояния. Если выходной сигнал имеет нормальное распределение (гауссовская случайная функция), то его можно описать первыми двумя моментами. Это свойство линейных систем учитывалось и для спектрального метода: он применялся для анализа линейных систем при случайных воздействиях в рамках корреляционной теории, т.е. задача анализа выходных процессов решалась как детерминированная, где входные и выходные сигналы задавались своими математическими ожиданиями и ковариационными функциями [1, 3, 4]. Анализ нелинейных систем при случайных воздействиях сводился к детерминированной задаче нахождения плотности распределения вероятностей вектора состояния [5].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00530-а).

В статье предлагается расширить спектральную форму математического описания для представления случайных функций, что позволит решать задачу анализа выходных процессов линейных стохастических систем, не переходя от случайных функций к их моментным характеристикам или плотностям распределения вероятностей. Предложенный метод дает возможность рассматривать линейные системы как с аддитивным, так и с мультипликативным шумом и находить явный вид выходного сигнала как случайной функции, т.е. не ограничиваться детерминированными характеристиками вектора состояния. Это особенно важно при моделировании систем управления.

Опишем простейший пример двумерной системы с мультипликативным шумом, модель которой задается двумя стохастическими дифференциальными уравнениями [6]:

$$\dot{x}_1(t) = v_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t)v_2(t), \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

где $v_1(t)$, $v_2(t)$ — стандартные независимые гауссовские белые шумы (процессы с единичной спектральной плотностью мощности). Пусть также $w_1(t)$, $w_2(t)$ — соответствующие стандартные винеровские процессы. Решение первого уравнения очевидно: $x_1(t) = w_1(t)$, решение второго уравнения не выражается аналитически через винеровские процессы, его можно формально записать в виде стохастического интеграла (есть разные определения стохастических интегралов, наиболее часто используемые — интегралы Ито и Стратоновича, но для данного интеграла это не имеет принципиального значения):

$$x_2(t) = \int_0^t w_1(\tau)dw_2(\tau).$$

Исследование этой случайной функции составляет отдельную проблему [7–11]. Она не является гауссовской, знание моментных характеристик (нулевое математическое ожидание и дисперсия $t^2/2$) не позволяет моделировать ее траектории или сечения, в то время как такое моделирование, например, обеспечивает построение численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с порядком сильной или среднеквадратической сходимости выше, чем у стохастического метода Эйлера.

В общем нелинейном случае для решения задачи моделирования и анализа выходных процессов основной метод, используемый на практике, заключается в применении разностных схем [10–12]. В результате процедура моделирования состоит в том, что строится дискретная аппроксимация выходного сигнала шаг за шагом по времени, т.е. с применением рекуррентных формул, и переход от текущего узла дискретизации к следующему связан с добавлением случайной величины, а именно приращения случайной функции. Для моделирования стохастического интеграла, приведенного выше, в [7] был предложен метод, основанный на разложении процесса броуновского моста по собственным функциям его ковариационного оператора, причем этот метод оказался эффективнее дополнительной дискретизации по времени (в пределах выбранного шага дискретизации). Далее в [8, 9] были предложены разложения в виде обобщенных рядов Фурье по различным базисным системам, причем в [8] — сразу для стохастических интегралов, которые связаны с более сложными нестационарными системами, размерность которых больше двух. Численные методы, описанные в [7, 8, 10, 11], используют как дискретизацию по времени, так и представление случайных функций обобщенными рядами Фурье между узлами дискретизации.

В результате применения разностных схем накапливается ошибка, характерная для численных методов, и приближенное решение определено только в узлах дискретизации. Предлагаемый в статье подход позволяет отказаться от дискретизации по времени, получить непрерывную аппроксимацию выходного сигнала сразу на всем заданном промежутке времени для линейных систем с аддитивным и мультипликативным шумом и найти явный вид выходного сигнала как случайной функции. Он обеспечивает моделирование линейных систем, причем свойства траекторий выходного сигнала могут варьироваться с помощью подбора базисной системы, и нахождение в явном виде выходного сигнала системы как случайной функции. В дальнейшем такой подход может быть применен для решения задач оптимизации линейных систем и оценивания сигналов (фильтрации, интерполяции и экстраполяции). В основе метода кроме спектральной формы математического описания систем управления лежат известные факты о представлении случайных функций с помощью функциональных рядов со случайными коэффициентами, обсуждаются связи с разложением Карунена—Лоэва [13] и каноническим представлением случайных функций [14, 15].

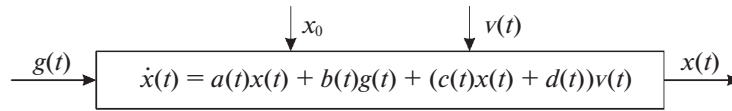


Рис. 1. Структурная схема линейной стохастической системы

Статья помимо введения содержит два раздела и Приложение. В разд. 1 рассматривается задача моделирования и анализа выходных процессов линейных одномерных непрерывных стохастических систем и предлагается спектральный метод для ее решения. В разд. 2 результаты разд. 1 обобщаются для решения задачи моделирования и анализа выходных процессов линейных многомерных непрерывных стохастических систем. Приложение содержит теоретические основы предлагаемого метода.

Апробация метода моделирования и анализа выходных процессов проведена на примере формирующего фильтра Драйдена и его двумерной модификации, которые позволяют моделировать продольные ветровые воздействия на летательный аппарат в неспокойной атмосфере [16–19].

1. Моделирование и анализ выходных процессов одномерных линейных стохастических систем.

1.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим одномерные линейные системы, которые описываются стохастическим дифференциальным уравнением (структурная схема системы приведена на рис. 1):

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)g(t) + (c(t)x(t) + d(t))v(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ – заданные функции, $g(t)$ – заданный детерминированный входной сигнал, $v(t)$ – стандартный гауссовский белый шум, x_0 – случайная величина с конечным вторым моментом: $Ex_0^2 < \infty$ (закон распределения x_0 задан), $x(t)$ – выходной сигнал, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$.

Уравнение модели системы записано в форме Ланжевена, под решением этого уравнения будем понимать случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий интегральному соотношению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (a(\tau)x(\tau) + b(\tau)g(\tau)) d\tau + \int_0^t (c(\tau)x(\tau) + d(\tau)) \circ dw(\tau),$$

в котором второй интеграл понимается в смысле Стратоновича, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Это обеспечивает возможность применения таких же правил дифференцирования для случайной функции $x(t)$, как если бы $x(t)$ была гладкой детерминированной функцией. При $c(t) = 0$ уравнение (1.1) задает линейную систему с аддитивным шумом, а при $d(t) = 0$ – линейную систему с мультипликативным шумом. Отметим, что если трактовать белый шум $v(t)$ как входной сигнал, то при $c(t) \neq 0$ систему следует называть билинейной. Линейность уравнения (1.1) и конечность второго момента случайной величины x_0 обеспечивает существование и единственность решения, а также условие $Ex^2(t) < \infty$ [20].

Задача анализа выходных процессов состоит в нахождении выходного сигнала $x(t)$ как случайной функции по заданной модели (1.1) и входному сигналу $g(t)$.

1.2. **Спектральный метод моделирования и анализа выходных процессов.** Воспользуемся для решения задачи анализа выходных процессов спектральным методом (все необходимые сведения приведены в Приложении), представляя все входящие в уравнение (1.1) функции спектральными характеристиками (см. Приложение, разд. А). Для этого нужно применить спектральное преобразование $\mathbb{S}$ (см. Приложение, формула (П.4)) к левой и правой частям (1.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[\dot{x}(t)|_{x(0)=x_0}] &= \mathbb{S}[a(t)x(t) + b(t)g(t) + (c(t)x(t) + d(t))v(t)] = \\ &= \mathbb{S}[a(t)x(t)] + \mathbb{S}[b(t)g(t)] + \mathbb{S}[(c(t)x(t) + d(t))v(t)]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подробно записывать все шаги представляется излишним, поскольку в целом они не отличаются от применения спектрального метода к анализу выходных процессов линейных детерминированных систем [1, 3, 4]. Однако нужно ввести обозначения для спектральных характеристик относительно выбранной базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ на отрезке $\mathbb{T}$ (см. Приложение, разд. А и Д, формулы (П.2), (П.6), (П.9)): G , X и D – спектральные характеристики входного, выходного

сигналов и функции $d(t)$ соответственно; $\mathcal{V}$ – спектральная характеристика стандартного гауссовского белого шума $v(t)$; A , B и C – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ соответственно; $\mathcal{P}$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования; Δ – спектральная характеристика дельта-функции $\delta(t)$, т.е. матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$. Отличие от детерминированного случая состоит в том, что одна из спектральных характеристик, а именно $\mathcal{V}$, образована случайными величинами, начальное значение x_0 также случайно. Кроме того, в уравнении модели имеется произведение $x(t)v(t)$ при $c(t) \neq 0$.

Если условие $c(t) \neq 0$ выполнено, то требуется определить спектральную характеристику множительного звена или трехмерную нестационарную передаточную функцию множительного звена – бесконечную пространственную матрицу V с элементами

$$V_{ijk} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, t)q(k, t)dt, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots$$

С помощью этой матрицы можно преобразовать спектральные характеристики функций в спектральные характеристики операторов умножения на эти функции [1, 5]:

$$\mathbb{S}[x(t)v(t)] = (VX)\mathcal{V} \quad \text{или} \quad \mathbb{S}[x(t)v(t)] = (V\mathcal{V})X,$$

где для нахождения произведения пространственной матрицы и матрицы-столбца производится суммирование по любому индексу i, j или k . Например, если обозначить произведение $V\mathcal{V}$ через Y , то Y – бесконечная матрица с элементами

$$Y_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk} \mathcal{V}_k,$$

а суммирование по другим индексам возможно из-за свойства симметрии: $V_{ijk} = V_{jki} = V_{kij} = V_{ikj} = V_{kji} = V_{jik}$.

В результате из соотношения (1.2) получаем

$$PX - x_0\Delta = AX + BG + (V\mathcal{V})(CX + D),$$

где $P = \mathcal{P} + \Delta\Delta^T$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального условия [1, 3, 4]. Действительно,

$$PX - x_0\Delta = (\mathcal{P} + \Delta\Delta^T)X - x_0\Delta = \mathcal{P}X + \Delta\Delta^T X - x_0\Delta$$

и

$$\Delta^T X = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i, 0) = x(0) = x_0,$$

т.е. $PX - x_0\Delta = \mathcal{P}X + x_0\Delta - x_0\Delta = \mathcal{P}X$.

Таким образом,

$$PX - AX - (V\mathcal{V})CX = x_0\Delta + BG + (V\mathcal{V})D \quad (1.3)$$

и

$$X = (P - A - (V\mathcal{V})C)^{-1} (x_0\Delta + BG + (V\mathcal{V})D). \quad (1.4)$$

При $c(t) = 0$ целесообразно определить спектральную характеристику оператора умножения на функцию $d(t)$, обозначив ее $\tilde{D}$, а спектральную характеристику D , определенную ранее, не использовать. Тогда можно обойтись без пространственной матрицы V , а уравнение (1.3) примет вид

$$PX - AX = x_0\Delta + BG + \tilde{D}\mathcal{V}, \quad (1.5)$$

его решение представляется следующим образом:

$$X = (P - A)^{-1} (x_0\Delta + BG + \tilde{D}\mathcal{V}). \quad (1.6)$$

Применяя обратное спектральное преобразование, находим решение задачи анализа выходных процессов, согласно формуле обращения (см. Приложение, разд. А, формула (П.2)), в виде ряда

$$x(t) = \mathbb{S}^{-1}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i, t), \quad (1.7)$$

коэффициенты X_i которого зависят от элементов спектральной характеристики $\mathcal{V}$ стандартного гауссовского белого шума $v(t)$, т.е. от счетного числа независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от случайной величины x_0 .

Выполнение операций с бесконечными матрицами затрудняет нахождение выходного сигнала точно, особенно это касается умножения и обращения бесконечных матриц. Поэтому перейдем к приближенному решению, используя тот же подход, что и при анализе выходных процессов линейных детерминированных систем, а именно усечение всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L [1, 3, 5]. Это означает, что все матрицы, входящие в соотношение (1.4), являются конечными размера L по каждому измерению, т.е. L для матриц-столбцов, $L \times L$ для квадратных и $L \times L \times L$ для пространственных матриц. В этом случае будет получено приближенное решение задачи анализа выходных процессов в виде частичной суммы:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} X_i q(i, t), \quad (1.8)$$

где коэффициенты X_i зависят от элементов усеченной спектральной характеристики $\mathcal{V}$ стандартного гауссовского белого шума $v(t)$, т.е. от конечного числа L независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от случайной величины x_0 .

В качестве базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ могут использоваться различные полные ортонормированные системы функций, успешно применяемые при решении задач в спектральной форме математического описания, например, полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша и функции Хаара [1, 3]. Для всех перечисленных базисных систем разработано алгоритмическое обеспечение (элементарные и специализированные алгоритмы динамического расчета), включающее алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых входных воздействий, спектральных характеристик операторов умножения на типовые функции, операторов дифференцирования и интегрирования, а также спектральную характеристику множительного звена [1, 3, 5]. Все эти алгоритмы реализованы в виде пакетов программ для систем компьютерной математики и отдельных приложений [21].

Приведем методику решения задачи анализа выходных процессов одномерных линейных стохастических систем.

1. Выбрать отрезок $\mathbb{T} = [0, T]$, на котором нужно найти решение задачи анализа выходных процессов, а также соответствующую базисную систему $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$.

2. Найти спектральную характеристику G входного сигнала $g(t)$; спектральную характеристику $\mathcal{V}$ стандартного гауссовского белого шума $v(t)$; спектральные характеристики A , B и C операторов умножения на функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ соответственно; спектральную характеристику $\mathcal{P}$ оператора дифференцирования; матрицу-столбец Δ значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$. Дополнительно определить при $c(t) \neq 0$ спектральную характеристику D функции $d(t)$, спектральную характеристику V множительного звена, а при $c(t) = 0$ – спектральную характеристику $\tilde{D}$ оператора умножения на функцию $d(t)$.

3. При $c(t) \neq 0$ записать уравнение (1.3) для спектральной характеристики X выходного сигнала $x(t)$ и найти его решение (1.4). При $c(t) = 0$ записать уравнение (1.5) для спектральной характеристики X и найти его решение (1.6).

4. Применить обратное спектральное преобразование: найти выходной сигнал $x(t)$ по спектральной характеристике X , используя формулу обращения (1.7).

При приближенном решении задачи анализа выходных процессов дополнительно задается порядок усечения спектральных характеристик L и на шаге 4 методики применяется формула (1.8) вместо (1.7). Для получения выборочной траектории выходного сигнала достаточно вос-

пользоваться методикой для реализаций спектральной характеристики $\mathcal{V}$ и случайной величины x_0 .

Получив явный вид выходного сигнала как случайной функции, можно оценить моментные характеристики любого порядка и плотность распределения вероятностей состояния системы, описываемой уравнением (1.1), т.е. решить задачу статистического анализа стохастической системы. Использовать этот прием для моментных характеристик вряд ли оправдано, поскольку для линейных непрерывных стохастических систем управления можно записать замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для моментных характеристик, ее решение с вычислительной точки зрения значительно проще. Для плотности распределения вероятностей $p(t, x)$ состояния, если она не является гауссовской, можно предложить следующую ядерную оценку [22]:

$$p(t, x) \approx \frac{1}{Mh_x} \sum_{j=1}^M K\left(\frac{x - x^j(t)}{h_x}\right), \quad (1.9)$$

где $K(x)$ — ядро, т.е. функция, обладающая свойствами плотности (неотрицательность, условие нормировки); $h_x > 0$ — параметр сглаживания; M — число выборочных траекторий; j — номер траектории, каждому номеру соответствует реализация $x^j(t)$ выходного сигнала $x(t)$, а также реализации $\mathcal{V}^j$ спектральной характеристики $\mathcal{V}$ и x_0^j случайной величины x_0 . Например, если $K(x)$ — стандартная гауссовская плотность, то для оценки $p(t, x)$ используется полигауссовская аппроксимация.

Пример 1. Рассмотрим формирующий фильтр Драйдена для моделирования продольного турбулентного ветра [19]. Он задается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + \sigma v(t), \quad x(0) = x_0, \quad \mu = \frac{V_t}{L_t}, \quad \sigma = \sqrt{2\mu}\sigma_0, \quad (1.10)$$

где V_t — продольная скорость полета, L_t — масштаб турбулентности, σ_0 — среднее квадратическое отклонение скорости ветра, т.е. $a(t) = -\mu$, $b(t) = 0$, $c(t) = 0$, $d(t) = \sigma$; выходной сигнал $x(t)$ — скорость ветра, x_0 — его начальное значение.

На основе формулы (1.6) запишем выражение для спектральной характеристики X процесса $x(t)$, удовлетворяющей уравнению (1.5):

$$X = (P + \mu E)^{-1}(x_0 \Delta + \sigma \mathcal{V}), \quad (1.11)$$

пользуясь свойством спектрального преобразования операторов умножения, а именно равенством спектральной характеристики оператора умножения на константу произведению этой константы на единичную матрицу E , т.е. $A = -\mu E$, $B = O$, $C = O$, $\tilde{D} = \sigma E$ (O — нулевая матрица).

В выражении (1.11) $P = \mathcal{P} + \Delta \Delta^T$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального условия; Δ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$; $\mathcal{V}$ — спектральная характеристика стандартного гауссовского белого шума $v(t)$. Тогда точное решение уравнения (1.10) задается формулой (1.7), а приближенное решение — формулой (1.8) с учетом усечения всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L .

Далее приведем результаты моделирования на основе соотношений (1.8) и (1.11) для базисной системы косинусоид:

$$q(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{i\pi t}{T}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad \Delta_i = q(i, 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{T}}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

при $T = 100$ с, $V_t = 60$ м/с, $L_t = 1000$ м, $\sigma_0 = 1.5$ м/с. Начальное значение x_0 будем полагать случайной величиной, имеющей нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 . Для рассматриваемой модели значение дисперсии σ_0^2 соответствует установившемуся режиму, поэтому при таком выборе начального распределения выходной сигнал

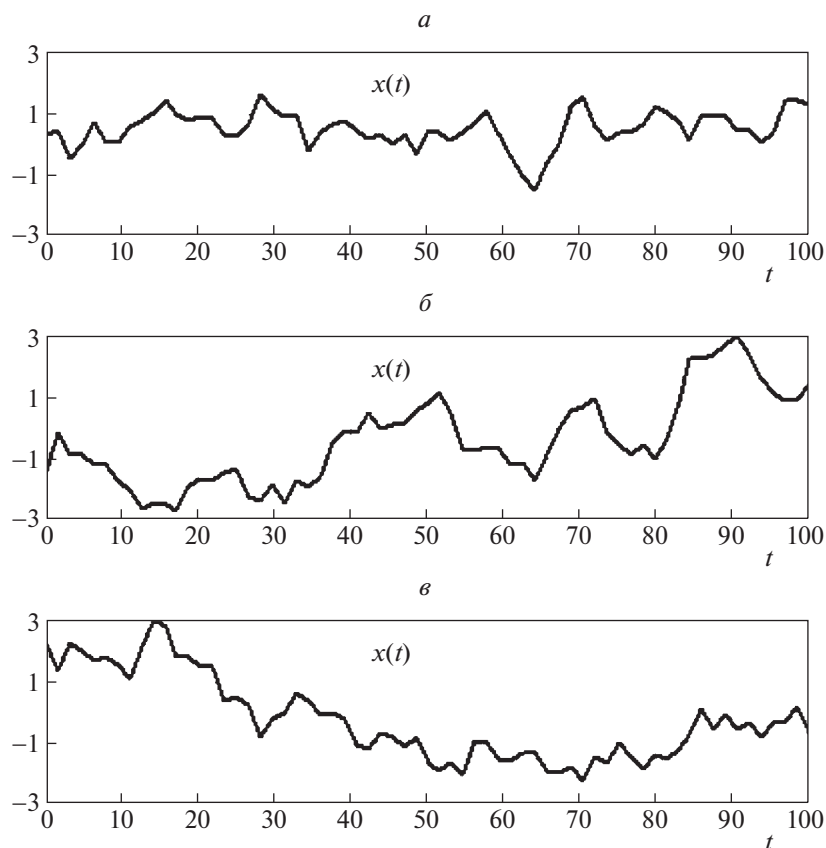


Рис. 2. Пример трех траекторий выходного сигнала для формирующего фильтра Драйдена

будет иметь нулевое математическое ожидание и постоянную дисперсию σ_0^2 . Порядок усечения выбран следующим образом: $L = 64$.

Для выбранной базисной системы элементы спектральной характеристики P оператора дифференцирования с учетом начального условия задаются в виде [1, 3, 4]

$$P_{00} = \frac{1}{T}, \quad P_{0m} = \frac{(-1)^m \sqrt{2}}{T}, \quad P_{m0} = \frac{\sqrt{2}}{T}, \quad P_{mm} = \frac{2}{T},$$

$$P_{m-k,m} = \frac{2}{T} \frac{(m-k)^2 - (-1)^k m^2}{(m-k)^2 - m^2}, \quad P_{m,m-k} = \frac{2}{T} \frac{(-1)^k (m-k)^2 - m^2}{(m-k)^2 - m^2},$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

Пример трех траекторий выходного сигнала (скорости ветра) приведен на рис. 2, а–в. Максимальное отклонение выборочной дисперсии выходного сигнала на рассматриваемом промежутке времени, рассчитанной по ансамблю 10^6 траекторий, от точного значения $\sigma_0^2 = 2.25$ составляет 2.07%, при увеличении порядка усечения до $L = 128$ и 256 максимальные отклонения составляют 1.10 и 0.69% соответственно, т.е. увеличение порядка усечения в 2 раза примерно в 2 раза сокращает погрешность расчетов для дисперсии. Данные приведены для узловых точек, которые получены следующим образом: отрезок $[0, T]$ был разбит на 20 отрезков одинаковой длины и взяты центры этих отрезков. Для базисной системы косинусоид выборочная дисперсия меньше точного значения в узловых точках. Здесь нужно принять во внимание, что помимо методической погрешности спектрального метода, связанной с усечением спектральных характеристик, есть еще и статистическая погрешность, обусловленная моделированием конечного числа траекторий.

2. Моделирование и анализ выходных процессов многомерных линейных стохастических систем.

2.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений, записанную в матричной форме:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)g(t) + \sum_{k=1}^s (c^k(t)x(t) + d^k(t))v_k(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

при условии, что $a(t)$, $b(t)$, $c^k(t)$ и $d^k(t)$ – заданные матричные и векторные функции размеров $n \times n$, $n \times q$, $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $g(t)$ – заданный детерминированный q -мерный входной сигнал, $v_k(t)$ – стандартный гауссовский белый шум (все шумы попарно независимы), $k = \overline{1, s}$; x_0 – случайный n -мерный вектор с конечными вторыми моментами: $E|x_0|^2 < \infty$ (закон распределения x_0 задан), $x(t)$ – n -мерный вектор состояния, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$:

$$x(t) = [x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t)]^T, \quad x_0 = [x_{10} x_{20} \dots x_{n0}]^T, \\ g(t) = [g_1(t) g_2(t) \dots g_q(t)]^T, \quad v(t) = [v_1(t) v_2(t) \dots v_s(t)]^T.$$

Решение этой системы следует понимать как случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий интегральному соотношению (см. одномерный случай), в котором стохастический интеграл – интеграл Стратоновича. Решение такой системы существует, единственно и удовлетворяет условию $E|x(t)|^2 < \infty$ [20].

Задача анализа выходных процессов, как и для одномерного случая, состоит в нахождении сигнала $x(t)$ как случайной вектор-функции по заданной модели (2.1) и входному сигналу $g(t)$.

2.2. **Спектральный метод моделирования и анализа выходных процессов.** Перепишем систему (2.1) в координатной форме:

$$\dot{x}_l(t) = \sum_{m=1}^n a_{lm}(t)x_m(t) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(t)g_r(t) + \\ + \sum_{k=1}^s \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^k(t)x_m(t) + d_l^k(t) \right) v_k(t), \quad x_l(0) = x_{l0}, \quad l = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

где $a_{lm}(t)$, $b_{lr}(t)$, $c_{lm}^k(t)$ и $d_l^k(t)$ – элементы матричных и векторных функций $a(t)$, $b(t)$, $c^k(t)$ и $d^k(t)$ соответственно. Здесь и далее индексы принимают следующие значения: $l, m = \overline{1, n}$; $r = \overline{1, q}$; $k = \overline{1, s}$.

Применим спектральное преобразование $\mathbb{S}$ (см. Приложение, формула (П.4)) к левой и правой частям (2.2):

$$\mathbb{S}[\dot{x}_l(t)|_{x_l(0)=x_{l0}}] = \mathbb{S} \left[\sum_{m=1}^n a_{lm}(t)x_m(t) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(t)g_r(t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^s \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^k(t)x_m(t) + d_l^k(t) \right) v_k(t) \right] = \sum_{m=1}^n \mathbb{S}[a_{lm}(t)x_m(t)] + \sum_{r=1}^q \mathbb{S}[b_{lr}(t)g_r(t)] + \\ + \sum_{k=1}^s \mathbb{S} \left[\left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^k(t)x_m(t) + d_l^k(t) \right) v_k(t) \right], \quad (2.3)$$

тогда

$$PX_l - x_{l0}\Delta = \sum_{m=1}^n A_{lm}X_m + \sum_{r=1}^q B_{lr}G_r + \sum_{k=1}^s (V^{\circ}V_k) \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^k X_m + D_l^k \right), \quad (2.4)$$

где наряду с обозначениями, введенными для одномерного случая, используются следующие (см. Приложение, разд. А и Д, формулы (П.2), (П.6), (П.9)): G_r , X_l и D_l^k – спектральные характеристики функций $g_r(t)$, $x_l(t)$ и $d_l^k(t)$ соответственно; V_k – спектральные характеристики стандартных гауссовских белых шумов $v_k(t)$; A_{lm} , B_{lr} и C_{lm}^k – спектральные характеристики операторов

умножения на функции $a_{lm}(t)$, $b_{lr}(t)$ и $c_{lm}^k(t)$ соответственно. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, заданной на отрезке $\mathbb{T}$.

Как и в одномерном случае, при $c(t) = 0$ полученные соотношения можно упростить, определив $\tilde{D}_l^k$ как спектральные характеристики операторов умножения на функции $d_l^k(t)$ вместо спектральных характеристик D_l^k . Тогда систему уравнений (2.4) можно записать в виде

$$PX_l - x_{l0}\Delta = \sum_{m=1}^n A_{lm}X_m + \sum_{r=1}^q B_{lr}G_r + \sum_{k=1}^s \tilde{D}_l^k \mathcal{V}_k. \quad (2.5)$$

Решение задачи анализа выходных процессов в многомерном случае может быть получено в результате нахождения спектральных характеристик X_l , удовлетворяющих линейной системе (2.4) или (2.5), и применения обратного спектрального преобразования, или формулы обращения (см. Приложение, разд. А, формула (П.2)):

$$x_l(t) = \mathbb{S}^{-1}[X_l] = \sum_{i=0}^{\infty} X_l^i q(i, t), \quad l = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

где коэффициенты X_l^i выражаются через элементы спектральных характеристик $\mathcal{V}_k$ стандартных гауссовских белых шумов $v_k(t)$, т.е. зависят от счетного числа независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от n координат случайного вектора x_0 . Для детерминированных систем, т.е. при отсутствии случайных возмущений, такие уравнения приведены в [23].

Приближенное решение задачи анализа выходных процессов выражается в виде частичных сумм:

$$x_l(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} X_l^i q(i, t), \quad l = \overline{1, n}, \quad (2.7)$$

где коэффициенты X_l^i зависят от элементов усеченных спектральных характеристик $\mathcal{V}_k$, т.е. от конечного числа sL независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от n координат случайного вектора x_0 .

Опишем подробнее частный случай: $n = 2$ (размерность $x(t)$), $q = s = 1$ (входной сигнал $g(t)$ и белый шум $v(t)$ скалярные), т.е. системы уравнений (2.2) и (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_l(t) &= a_{l1}(t)x_1(t) + a_{l2}(t)x_2(t) + b_l(t)g(t) + \\ &+ (c_{l1}(t)x_1(t) + c_{l2}(t)x_2(t) + d_l(t))v(t), \quad x_l(0) = x_{l0}, \end{aligned}$$

и

$$PX_l - x_{l0}\Delta = A_{l1}X_1 + A_{l2}X_2 + B_lG + (V^q \mathcal{V})(C_{l1}X_1 + C_{l2}X_2 + D_l), \quad l = 1, 2.$$

Решение последней системы матричных уравнений несложно получить методом исключения неизвестных:

$$X_l = (Z_{ll} - Z_{lj}Z_{jj}^{-1}Z_{jl})^{-1}(Q_l - Z_{lj}Z_{jj}^{-1}Q_j), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{ll} &= P - A_{ll} - (V^q \mathcal{V})C_{ll}, \quad Z_{lj} = -A_{lj} - (V^q \mathcal{V})C_{lj}, \\ Q_l &= x_{l0}\Delta + B_lG + (V^q \mathcal{V})D_l, \quad l, j = 1, 2, \quad l \neq j, \end{aligned}$$

или при $c(t) = 0$:

$$Z_{ll} = P - A_{ll}, \quad Z_{lj} = -A_{lj}, \quad Q_l = x_{l0}\Delta + B_lG + \tilde{D}_l^q \mathcal{V}, \quad l, j = 1, 2, \quad l \neq j.$$

Если размерность n больше двух и матричные функции $a(t)$ и $c^k(t)$ имеют специальный вид, например это треугольные или трехдиагональные матрицы, то решение систем (2.2) и (2.4) также несложно получить методом исключения неизвестных. В случае матричных функций $a(t)$ и $c^k(t)$

общего вида при использовании спектрального метода можно применить специальные операции для матриц: агрегирование и декомпозицию [5].

Приведем методику решения задачи анализа выходных процессов многомерных линейных стохастических систем.

1. Выбрать отрезок $\mathbb{T} = [0, T]$, на котором нужно найти решение задачи анализа выходных процессов, а также соответствующую базисную систему $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$.

2. Найти спектральные характеристики G_r координат входного сигнала $g_r(t)$; спектральные характеристики $\mathcal{V}_k$ стандартных гауссовских белых шумов $v_k(t)$; спектральные характеристики A_{lm} , B_{lr} и C_{lm}^k операторов умножения на функции $a_{lm}(t)$, $b_{lr}(t)$ и $c_{lm}^k(t)$ соответственно; спектральную характеристику $\mathcal{P}$ оператора дифференцирования; матрицу-столбец Δ значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$. Дополнительно определить при $c(t) \neq 0$ спектральные характеристики D_i^k функций $d_i^k(t)$, спектральную характеристику V множительного звена, а при $c(t) = 0$ – спектральные характеристики $\tilde{D}_i^k$ операторов умножения на функции $d_i^k(t)$.

3. При $c(t) \neq 0$ записать систему уравнений (2.4) для спектральных характеристик X_i координат выходного сигнала $x_i(t)$ и решить эту систему (при $n = 2$ воспользоваться формулой (2.8)). При $c(t) = 0$ записать систему уравнений (2.5) для спектральных характеристик X_i и найти решение этой системы.

4. Применить обратное спектральное преобразование: найти координаты выходного сигнала $x_i(t)$ по спектральным характеристикам X_i , используя формулу обращения (2.6).

При приближенном решении задачи анализа выходных процессов дополнительно задается порядок усечения спектральных характеристик L и на шаге 4 методики применяется формула (2.7) вместо (2.6).

Здесь, как и для одномерного случая, используя явный вид выходного сигнала как случайной функции, можно оценить моментные характеристики любого порядка и плотность распределения вероятностей вектора состояния системы, описываемой уравнением (2.1). Ядерная оценка плотности распределения вероятностей $p(t, x)$ вектора состояния имеет вид, аналогичный (1.9):

$$p(t, x) \approx \frac{1}{Mh_x^n} \sum_{j=1}^M K\left(\frac{x - x^j(t)}{h_x}\right),$$

где все параметры имеют тот же смысл, что и в одномерном случае, но ядро $K(x)$ теперь является функцией n -мерного вектора.

Пример 2. Рассмотрим двумерный формирующий фильтр Драйдена [19]. Он задается системой линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2(t) &= -\lambda\mu x_1(t) - (\lambda + \mu)x_2(t) + \sigma^* v(t), & x_2(0) &= x_{20}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где используются обозначения предыдущего примера, а также $\lambda = 10\mu$, $\sigma^* = \sqrt{2\lambda\mu(\lambda + \mu)}\sigma_0$, т.е. $n = 2$, $q = s = 1$, $a_{11}(t) = 0$, $a_{12}(t) = 1$, $a_{21}(t) = -\lambda\mu$, $a_{22}(t) = -(\lambda + \mu)$, $b_1(t) = b_2(t) = 0$, $c_{11}(t) = c_{12}(t) = c_{21}(t) = c_{22}(t) = 0$, $d_1(t) = 0$, $d_2(t) = \sigma^*$; выходной сигнал $x(t) = x_1(t)$ – скорость ветра. Эта модель сглаживает траекторию, которую формирует фильтр Драйдена из примера 1, с сохранением значения σ_0^2 для дисперсии выходного сигнала в установившемся режиме.

Воспользуемся соотношением (2.8), в котором

$$Z_{11} = P, \quad Z_{12} = -E, \quad Z_{21} = \lambda\mu E, \quad Z_{22} = P + (\lambda + \mu)E, \quad Q_1 = x_{10}\Delta, \quad Q_2 = x_{20}\Delta + \sigma^{*q}\mathcal{V},$$

т.е. $A_{11} = O$, $A_{12} = E$, $A_{21} = -\lambda\mu E$, $A_{22} = -(\lambda + \mu)E$, $B_1 = B_2 = O$, $C_{11} = C_{12} = C_{21} = C_{22} = O$, $\tilde{D}_1 = O$, $\tilde{D}_2 = \sigma^* E$ (E – единичная матрица, O – нулевая матрица).

Решение системы матричных уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= (P^2 + (\lambda + \mu)P + \lambda\mu E)^{-1} [x_{10}(P + (\lambda + \mu)E)\Delta + x_{20}\Delta + \sigma^{*q}\mathcal{V}], \\ X_2 &= PX_1 - x_{10}\Delta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

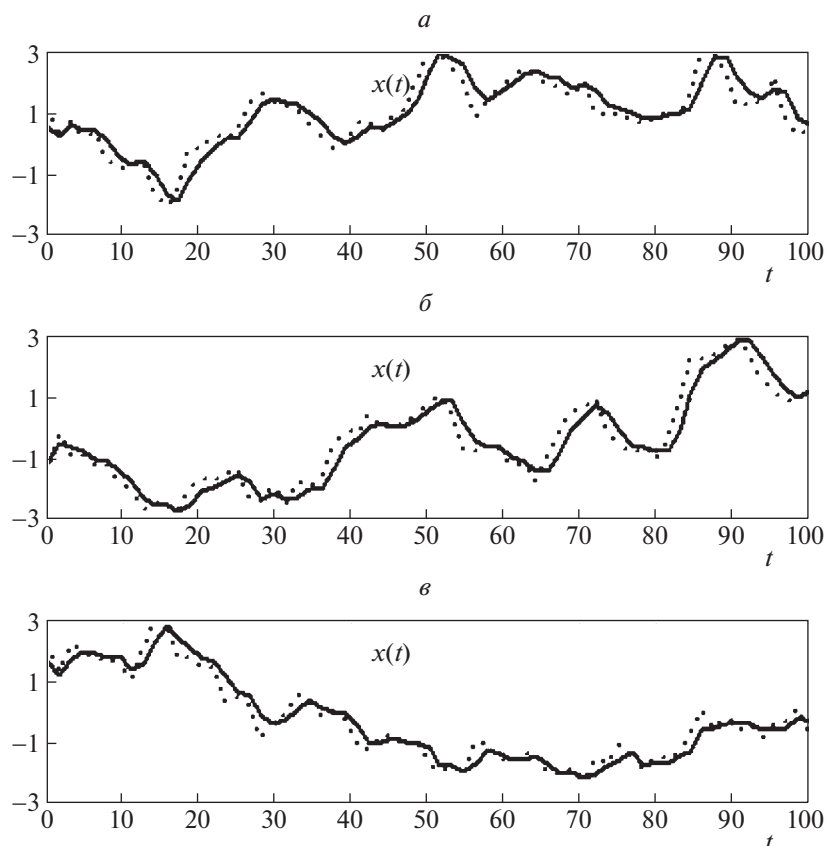


Рис. 3. Пример трех траекторий выходного сигнала для двумерного формирующего фильтра Драйдена и их сравнение с рис. 2

где все обозначения были введены в примере 1. Тогда точное решение системы уравнений (2.9) задается формулой (2.6), а приближенное решение — формулой (2.7) с учетом усечения всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L .

Далее приведем результаты моделирования на основе соотношений (2.7) и (2.10) для той же базисной системы косинусоид и тех же числовых параметров. Дисперсии координат $x_1(t)$ и $x_2(t)$, которые соответствуют установившемуся режиму, равны σ_0^2 и $\lambda \mu \sigma_0^2$ соответственно, поэтому начальные значения x_{10} и x_{20} зададим как случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями для установившегося режима. Другими словами, дисперсии координат $x_1(t)$ и $x_2(t)$ не зависят от времени для рассматриваемой модели, а их математические ожидания нулевые. Порядок усечения не меняется: $L = 64$.

Пример трех траекторий выходного сигнала (скорости ветра) приведен на рис. 3, а–в, дополнительно на этом рисунке пунктиром показаны траектории из примера 1 для сравнения. Максимальное отклонение выборочной дисперсии выходного сигнала на рассматриваемом промежутке времени, рассчитанной по ансамблю 10^6 траекторий, от точного значения $\sigma_0^2 = 2.25$ составляет 0.82%, при увеличении порядка усечения до $L = 128$ и 256 максимальные отклонения составляют 0.35 и 0.22% соответственно, т.е. наблюдается такая же зависимость погрешности расчетов для дисперсии от порядка усечения спектральных характеристик. Знак отклонения выборочной дисперсии от точного значения для базисной системы косинусоид в этом примере зависит от узловых точек (узловые точки формируются так же, как и в примере 1). Меньшая погрешность по сравнению с результатами примера 1 объясняется сглаженностью траектории выходного сигнала.

Заключение. Предложен спектральный метод решения задачи моделирования и анализа выходных процессов линейных непрерывных стохастических систем. При его применении выходной сигнал системы представляется в виде функционального ряда или частичной суммы со случайными коэффициентами, которые выражаются через независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, а также через начальные данные, т.е. получа-

ется непрерывная аппроксимация выходного сигнала на всем заданном промежутке времени. В дальнейшем этот метод можно развивать в нескольких направлениях. Первое из них — применение спектральной формы математического описания для общего пуассоновского процесса и решение задачи моделирования и анализа выходных процессов линейных стохастических систем с пуассоновской составляющей [24], второе — оптимизация линейных стохастических систем, третье — решение задачи оценивания сигналов (фильтрации, интерполяции и экстраполяции) в линейных стохастических системах по косвенным измерениям, предполагающее совместное применение спектральной формы математического описания и фильтров частиц [25].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Спектральная форма математического описания линейных нестационарных систем управления

А. Описание функций (сигналов). Пусть система функций $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ со значениями в $\mathbb{R}$, является полной и ортонормированной, т.е. базисной системой:

$$(q(i, t), q(j, t))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, t)dt = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П.1})$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathbb{T})}$ означает скалярное произведение элементов пространства квадратично-интегрируемых функций $L_2(\mathbb{T})$ и $x(t) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратично-интегрируемая функция:

$$\int_{\mathbb{T}} x^2(t)dt < \infty \quad (x(t) \in L_2(\mathbb{T})).$$

Тогда функция $x(t)$ представляется обобщенным рядом Фурье:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i, t), \quad (\text{П.2})$$

где коэффициенты разложения X_i вычисляются по формуле

$$X_i = (q(i, t), x(t))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)x(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

при этом функциональный ряд сходится к $x(t)$ по норме $L_2(\mathbb{T})$ и

$$\sum_{i=0}^{\infty} X_i^2 < \infty.$$

Упорядоченный набор X коэффициентов разложения X_i функции $x(t)$ по базисной системе $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ представляется в виде бесконечной матрицы-столбца и называется нестационарной спектральной характеристикой функции $x(t)$. Этот термин был введен в [1], нестационарность состояла в том, что границы отрезка $\mathbb{T}$ в общем случае могли быть функциями времени, однако здесь ограничимся фиксированным отрезком и будем называть X и аналогичные ей характеристики спектральными характеристиками. Представление функции $x(t)$ в виде ряда (П.2) называется формулой обращения. Также можно в качестве $\mathbb{T}$ рассматривать отрезок $[t_0, T]$, однако здесь удобно положить $t_0 = 0$.

Для функций двух переменных $h(t, \tau) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, также вводится спектральная характеристика, по терминологии [1] — двумерная нестационарная спектральная характеристика (ДНСХ), т.е. бесконечная матрица H с элементами:

$$H_{ij} = (q(i, t)q(j, \tau), h(t, \tau))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, \tau)h(t, \tau)dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} H_{ij} q(i, t)q(j, \tau).$$

Последнее соотношение для представления функции $h(t, \tau)$ в виде ряда также называется формулой обращения.

Определение спектральных характеристик можно расширить на случайные функции $x(t)$, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} R_x^2(t, \tau) dt d\tau < \infty,$$

где

$$R_x(t, \tau) = \text{cov}(x(t), x(\tau)) = E[(x(t) - m_x(t))(x(\tau) - m_x(\tau))], \quad m_x(t) = Ex(t).$$

В этих соотношениях E — математическое ожидание, cov — ковариация ($R_x(t, \tau)$ — ковариационная функция).

Таким образом, если

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i, t), \quad X_i = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) x(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где X_i — случайные величины, то упорядоченный набор X этих случайных величин будем также представлять в виде бесконечной матрицы-столбца и называть спектральной характеристикой случайной функции $x(t)$. При этом функциональный ряд сходится к $x(t)$ в среднеквадратическом смысле и

$$E \sum_{i=0}^{\infty} X_i^2 < \infty. \quad (\text{П.3})$$

Для указания соответствия функций и их спектральных характеристик будем использовать обозначение $\mathbb{S}$ — спектральное преобразование ($\mathbb{S}^{-1}$ — обратное спектральное преобразование):

$$\mathbb{S}[x(t)] = X, \quad x(t) = \mathbb{S}^{-1}[X]; \quad \mathbb{S}[h(t, \tau)] = H, \quad h(t, \tau) = \mathbb{S}^{-1}[H]. \quad (\text{П.4})$$

Отметим, что определение спектральной характеристики функции можно расширить на обобщенные функции, например дельта-функцию и ее производные. Так, спектральной характеристикой функции $\delta(t - \tau)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{T}$ называется упорядоченный набор Δ_τ значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = \tau$. Аналогично можно расширить класс случайных функций, для которых вводится определение спектральной характеристики, но для них не будет выполняться свойство (П.3).

Рассмотрим стандартный винеровский процесс, или броуновское движение, $w(t)$ (гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $R_w(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$) и представим его в виде следующего ряда [8, 9, 26]:

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i Q(i, t), \quad Q(i, t) = \int_0^t q(i, \tau) d\tau, \quad (\text{П.5})$$

в котором коэффициенты ξ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Дифференцируя формально левую и правую части, получаем выражение для стандартного гауссовского белого шума (единичной интенсивности):

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i q(i, t), \quad (\text{П.6})$$

т.е. спектральная характеристика $\mathcal{V}$ стандартного гауссовского белого шума — это бесконечная матрица-столбец, элементы которой являются независимыми случайными величинами ξ_i , имеющими стандартное нормальное распределение, для любой базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$.

Б. Связь с описанием случайных функций в рамках корреляционной теории. Укажем, как связана спектральная характеристика X случайной функции с первой и второй нестационарными спектральными плотностями (НСП) — спектральными характеристиками математического ожидания и ковариационной функции $x(t)$. По определению [1] первой НСП ${}^1S^x$ называется спектральная характеристика математического ожидания $m_x(t) = Ex(t)$, т.е.

$${}^1S^x = \mathbb{S}[m_x(t)], \quad {}^1S_i^x = (q(i, t), m_x(t))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) m_x(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} {}^1S_i^x &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) E x(t) dt = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) E \left[\sum_{j=0}^{\infty} X_j q(j, t) \right] dt = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[X_j \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, t) dt \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij} E X_j = E X_i. \end{aligned}$$

Второй НСП S^x называется спектральная характеристика ковариационной функции $R_x(t, \tau) = \text{cov}(x(t), x(\tau))$, т.е.

$$\begin{aligned} S^x &= \mathbb{S}[R_x(t, \tau)], \quad S_{ij}^x = (q(i, t) q(j, \tau), R_x(t, \tau))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, \tau) R_x(t, \tau) dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

По аналогии с первой НСП можно показать, что

$$S_{ij}^x = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, \tau) \text{cov}(x(t), x(\tau)) dt d\tau = \text{cov}(X_i, X_j).$$

Таким образом, ${}^1S^x = E X$, $S^x = \text{cov}(X) = E(X - {}^1S^x)(X - {}^1S^x)^T$. Например, для стандартного гауссовского белого шума $v(t)$ ${}^1S^v$ — бесконечная нулевая матрица-столбец, а $S^v = E$ — бесконечная единичная матрица.

В. Связь с разложением Карунена—Лозеа. Разложение Карунена—Лозеа [13] — это разложение случайной функции $x(t)$ в ряд по собственным функциям линейного интегрального оператора с ядром $R_x(t, \tau)$, т.е. система функций $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ формируется из условия

$$\int_{\mathbb{T}} R_x(t, \tau) q(i, \tau) d\tau = \lambda_i q(i, t), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

При таком выборе базисной системы вторая НСП S^x — диагональная матрица, образованная собственными значениями λ_i , а спектральная характеристика X формируется на основе значений $\sqrt{\lambda_i}$ и некоррелированных случайных величин с единичной дисперсией. Однако разложение Карунена—Лозеа сопряжено с нахождением собственных функций и собственных значений линейного оператора, поэтому далее оно не применяется, а в качестве базисных систем предлагаются использовать универсальные системы функций, например полиномы Лежандра, тригонометрические функции (косинусоиды) и др., в том числе и системы функций, порожденные вейвлетами [3].

Г. Связь с каноническими представлениями случайных функций. Если представить случайную функцию $x(t)$ в виде суммы $m_x(t) + \dot{x}(t)$, где $E \dot{x}(t) = 0$, то несложно установить связь с каноническим представлением случайной функции [14, 15]:

$$x(t) = m_x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \dot{X}_i q(i, t),$$

где $\dot{X}_i$ — некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, упорядоченный набор $\dot{X}$ которых образует спектральную характеристику случайной функции $\dot{x}(t)$: $\mathbb{S}[\dot{x}(t)] = \dot{X}$, $\dot{x}(t) = \mathbb{S}^{-1}[\dot{X}]$. Следовательно, $X = {}^1S^x + \dot{X}$ и $x(t) = m_x(t) + \mathbb{S}^{-1}[\dot{X}]$.

Д. Описание линейных систем. Перейдем к описанию линейных систем управления [2, 4]. Такие системы можно описывать линейными дифференциальными уравнениями с постоянными (для стационарных систем) или переменными (для нестационарных систем) коэффициентами. В теории управления широкое применение нашло описание линейных систем переходными функциями, в частности импульсной переходной функцией (ИПФ) $k(t, \tau)$ — реакцией системы на импульсное входное воздействие $\delta(t - \tau)$ при нулевых начальных условиях. В спектральной форме математического описания для линейных систем применяется двумерная

нестационарная передаточная функция (ДНПФ) – ДНСХ ИПФ $k(t, \tau)$, т.е. бесконечная матрица W , элементы которой рассчитываются по формуле

$$W_{ij} = (q(i, t)q(j, \tau), k(t, \tau))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, \tau)k(t, \tau)dt d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t k(t, \tau)q(j, \tau)d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П.7})$$

с учетом условия физической реализуемости: $k(t, \tau) = 0$ при $t \leq \tau$.

В [5] применялось эквивалентное определение матрицы W :

$$W_{ij} = (q(i, t), \mathcal{A}q(j, t))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)\mathcal{A}q(j, t)dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П.8})$$

где $\mathcal{A}$ – линейный оператор, соответствующий линейной системе с ИПФ $k(t, \tau)$. В [5] матрица W названа спектральной характеристикой линейного оператора $\mathcal{A}$, а в [14] – матричным оператором.

Связь вход-выход для линейной системы с ИПФ $k(t, \tau)$ при детерминированных воздействиях

$$x(t) = \int_0^t k(t, \tau)g(\tau)d\tau,$$

где $g(t)$ и $x(t)$ – входной и выходной сигналы соответственно, в спектральной форме математического описания определяется соотношением $X = WG$ [1, 3, 4], в котором $G = \mathbb{S}[g(t)]$, $X = \mathbb{S}[x(t)]$.

При случайных воздействиях

$$m_x(t) = \int_0^t k(t, \tau)m_g(\tau)d\tau, \quad R_x(t, \tau) = \int_0^t \int_0^\tau k(t, \theta)k(\tau, \vartheta)R_g(\theta, \vartheta)d\theta d\vartheta,$$

где $m_g(t)$, $m_x(t)$, $R_g(t, \tau)$, $R_x(t, \tau)$ – математические ожидания и ковариационные функции входного и выходного сигналов соответственно, имеем ${}^1S^x = W{}^1S^g$, $S^x = WS^gW^T$ [1, 3, 4]. Здесь ${}^1S^g = \mathbb{S}[m_g(t)]$, ${}^1S^x = \mathbb{S}[m_x(t)]$, $S^g = \mathbb{S}[R_g(t, \tau)]$ и $S^x = \mathbb{S}[R_x(t, \tau)]$.

В работе используются усилительное ($k(t, \tau) = a(t)\delta(t - \tau)$, $a(t)$ – коэффициент усиления), дифференцирующее ($k(t, \tau) = \delta'(t - \tau)$) и интегрирующее ($k(t, \tau) = 1(t - \tau)$ – единичная ступенчатая функция) звенья. Для каждого из этих звеньев определяется ДНПФ [1, 3] или спектральная характеристика соответствующего линейного оператора: умножения, дифференцирования или интегрирования [5], т.е. матрицы A , $\mathcal{P}$ и P^{-1} с элементами

$$A_{ij} = \int_{\mathbb{T}} a(t)q(i, t)q(j, t)dt, \quad \mathcal{P}_{ij} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)\frac{dq(j, t)}{dt}dt,$$

$$P_{ij}^{-1} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t q(j, \tau)d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П.9})$$

согласно (П.8).

С учетом введенных обозначений можно записать представление спектральной характеристики $\mathcal{W}$ стандартного винеровского процесса $w(t)$ с помощью спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования и спектральной характеристики $\mathcal{V}$ стандартного гауссовского белого шума:

$$\mathcal{W} = P^{-1}\mathcal{V}, \quad (\text{П.10})$$

что является следствием связи

$$w(t) = \int_0^t v(t)dt,$$

т.е. винеровский процесс $w(t)$ – это выходной сигнал интегрирующего звена, входной сигнал для которого – гауссовский белый шум $v(t)$.

Установим связь между формулами (П.4) и (П.10). Представим функцию $Q(i, t)$ в виде ряда по базисной системе $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, тогда с учетом определения элементов P_{ij}^{-1} имеем

$$w(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j Q(j, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^{-1} q(i, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{-1} \xi_j \right) q(i, t).$$

Обозначая выражение в скобках через ${}^{\mathcal{W}}_i$, получаем упорядоченный набор ${}^{\mathcal{W}}$ коэффициентов разложения ${}^{\mathcal{W}}_i$.

Кроме того, используя связи вход–выход для линейной системы при случайных воздействиях в спектральной форме математического описания и учитывая, что $S^v = E$, находим $S^w = P^{-1}[P^{-1}]^T$, где S^w – спектральная характеристика ковариационной функции винеровского процесса $R_w(t, \tau)$. Таким образом, $S^w = \text{cov}({}^{\mathcal{W}}_i) = E({}^{\mathcal{W}}_i {}^{\mathcal{W}}_i^T)$ и матрица P^{-1} определяет линейное преобразование столбца ${}^{\mathcal{V}}$, результатом которого будет столбец с ковариационной матрицей S^w .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.
2. Семенов В.В. Формы математического описания линейных систем. М.: МАИ, 1980.
3. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. М.: Изд-во МАИ, 2011.
4. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М.: Инфра-М, 2016.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2015.
6. Clark J.M.C., Cameron R.J. The Maximum Rate of Convergence of Discrete Approximations for Stochastic Differential Equations // Stochastic Differential Systems. Filtering and Control (ed. by Grigelionis B.). Springer-Verlag, 1980. P. 162–171.
7. Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.
8. Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1997. № 1. С. 18–77.
9. Пригарин С.М., Белов С.М. Об одном применении разложений винеровского процесса в ряды // Препринт 1107. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1998.
10. Milstein G.N., Tret'yakov M.V. Stochastic Numerics for Mathematical Physics. Springer-Verlag, 2004.
11. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. С. А.1–А.1073.
12. Graham C., Talay D. Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods. Berlin: Springer-Verlag, 2013.
13. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
14. Лапina С.В., Егупов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
15. Силицын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: Торус Пресс, 2009.
16. Доброленский Ю.П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. М.: Машиностроение, 1969.
17. Парышева Г.В., Ярошевский В.А. Проблема формирования расчетных ветровых возмущений для задач динамики полета // Уч. зап. ЦАГИ. 2001. Т. 32. № 1–2. С. 102–118.
18. Бобылев А.В., Ярошевский В.А. Применение вероятностных методов к задачам динамики полета // Уч. зап. ЦАГИ. 2008. Т. 39. № 1–2. С. 111–119.
19. Куликов В.Е. Формирующий фильтр дифференцируемого турбулентного ветра // Тр. МИЭА. 2013. Вып. 7. С. 36–42.
20. Øksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
21. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания // Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. Ростов-на-Дону: Научное сотрудничество, 2018. С. 171–199.
22. Silverman B.W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London: Chapman & Hall/CRC, 1986.
23. Пантелеев А.В., Якимов А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. М.: Инфра-М, 2016.
24. Rudenko E.A. Continuous Finite-Dimensional Locally Optimal Filtering of Jump Diffusions // J. Computer and Systems Sciences International. 2018. V. 57. № 4. P. 505–528.
25. Rybakov K.A. Solving the Nonlinear Problems of Estimation for Navigation Data Processing Using Continuous Particle Filter // Gyroscopy and Navigation. 2019. V. 10. № 1. P. 27–34.
26. Липцер П.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974.