ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, № 4, с. 151–159

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 519.71

ИЗМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ[1]

А. М. Шматков

ИПМех РАН, Москва, Россия

e-mail: shmatkov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 18.02.2020 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принята к публикации 30.03.2020 г.

Получены формулы, позволяющие реализовать заранее заданное движение твердого тела относительно своего центра масс в системе координат с этим центром и поступательно движущимися осями. Показано, что существуют два существенно различающихся случая. В первом точка должна всегда находиться в определенной плоскости, что не только делает возможным реализацию любого требуемого движения из этого класса, но и позволяет воспользоваться неоднозначностью решения для того, чтобы, например, точка всегда перемещалась по одной и той же траектории в указанной плоскости. Во втором случае решение оказывается единственным и материальная точка должна иметь, вообще говоря, отдельную пространственную траекторию для каждой заданной программы переориентации твердого тела. Более того, в этом случае могут быть реализованы только те движения, которые удовлетворяют найденному условию.

DOI: 10.31857/S0002338820040137

Введение. В подавляющем большинстве способных к перемещению в земных условиях технических устройств есть специальные движущиеся части, непосредственно взаимодействующие с окружающей средой: колеса, гусеницы, пропеллеры, ноги и т.д. Они располагаются вне корпуса, что влечет разного рода сложности. В случае, если внешняя среда агрессивна, эти элементы конструкции подвергаются повышенному риску повреждения, а усиление их устойчивости к внешним воздействиям ведет к росту как стоимости самого изделия, так и затрат на его эксплуатацию. В случае, если движение должно происходить в ранимой среде (например, внутри человеческого организма), указанные части представляют собой повышенную опасность. Поэтому желательно создание устройств с движителями, заключенными внутри герметичного корпуса, поверхность которого значительно легче адаптировать к внешним условиям.

Проблемы иного рода возникают при создании космических аппаратов (см., например, [1, 2]). Последние, как правило, используют реактивные двигатели для изменения ориентации в пространстве. Эти двигатели нуждаются в топливе, доставка которого в космос требует больших затрат. Заметим, что трудность состоит не столько в обеспечении необходимой для переориентации энергии, сколько в значительной массе требующегося рабочего тела. Энергия может быть получена от солнечных батарей или, скажем, от бортового атомного реактора, а рабочее тело, например, для функционирующих продолжительное время спутников нужно доставить на орбиту при запуске. Альтернативные способы решения проблемы ориентации основаны, в частности, на применении гиростабилизаторов. Однако для их использования необходимо доставлять на орбиту тяжелые конструкции и годами обеспечивать постоянное вращение с высокой скоростью массивных элементов. Поэтому представляет интерес разработка новых способов изменения ориентации космических аппаратов без использования реактивной тяги и непрерывно движущихся частей.

Оба комплекса проблем — относящихся как к робототехнике, так и к строительству космических аппаратов — могут быть решены путем использования подвижных масс [3–5]. В первом случае массы должны находиться внутри корпуса робота, а во втором это не обязательно, поскольку

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-11-00307).

в безвоздушном пространстве механическую связь спутника и управляемой подвижной массы можно обеспечить разными способами. В обеих областях применения можно для определенных интервалов времени с приемлемой точностью пренебречь внешними воздействиями, поскольку процесс переориентации робота может происходить быстро, а космические аппараты в значительной мере изолированы.

В [6–8] были рассмотрены вопросы, касающиеся двумерного случая, а в данной работе обобщаются и анализируются кратко изложенные в работе [9] результаты.

1. Постановка задачи. Если в рамках задачи об изменении ориентации объекта не требуется перемещать центр масс твердого тела, то, как правило, предполагают, что этот центр в процессе переориентации должен быть неподвижен. Но такое невозможно при управлении с помощью подвижной массы, поскольку любое ее смещение приводит к смещению центра масс твердого тела, несмотря на то, что последний в конце процесса может вернуться в исходное положение относительно неподвижной системы координат, если подвижная масса сделает то же самое. Поэтому в рамках рассматриваемого подхода удобно описывать последовательность положений объекта в осях Кёнига [10], т.е. в поступательно перемещающейся системе координат с началом в центре масс тела.

Известно, что в задачах о переориентации важным является случай, когда вектор угловой скорости твердого тела не меняет своего направления [2]. Действительно, любая последовательность вращений этого тела может быть сведена к единственному повороту вокруг некоторой оси [11]. Поэтому интуитивно понятно, что если, скажем, требуется изменить ориентацию объекта за минимальное время, то нужно осуществлять указанное вращение с максимально возможной угловой скоростью. Этот факт нетрудно доказать строго, что мы и сделаем для удобства дальнейшего анализа.

Будем описывать движение твердого тела относительно его центра масс с помощью ортогональной матрицы $\mathbf{A}$. Предположим, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ служит вектором управления, принадлежащим некоторой заданной выпуклой области W, и необходимо перевести твердое тело из начальной ориентации, заданной матрицей $\mathbf{A}_0$, в конечную, заданную матрицей $\mathbf{A}_T$, за кратчайшее время T. В дальнейшем всюду будем обозначать точкой над символом полную производную соответствующей функции по времени в неподвижной системе координат. Функция $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}$, причем кососимметрическая матрица $\boldsymbol{\Omega}$ состоит из компонентов вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат, жестко связанной с телом (см., например, [11]). Согласно принципу максимума Понтрягина [12], гамильтониан в данном случае имеет вид $H = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}^{\mathrm{T}})$, где матрица $\mathbf{P}$ является сопряженной, а символ $^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование. Понятно, что

$$H = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}((\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

Воспользуемся известными соотношениями (см., например, [13]) и с учетом свойств матрицы $\boldsymbol{\Omega}$ получим

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}} = -\mathbf{P}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}(-\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{P}\boldsymbol{\Omega}.$$

Как известно [11], решения уравнений $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}$ и $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Omega}$ отличаются произвольным постоянным множителем, т.е. $\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{A}$, где $\mathbf{C}$ – произвольная постоянная ортогональная матрица. Тогда

$$H = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}),$$

где $\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ – матрица угловой скорости в неподвижной системе координат. Пусть ω_x, ω_y и ω_z – соответствующие компоненты вектора угловой скорости, а c_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{C}$, причем $i = 1,2,3$ и $j = 1,2,3$. Следовательно,

$$H = \omega_x(c_{23} - c_{32}) + \omega_y(-c_{13} + c_{31}) + \omega_z(c_{12} - c_{21}).$$

Для наглядности запишем H в еще более простом виде. Матрице $\mathbf{C}$ соответствует кватернион [11] с компонентами q_i, $i = 0,\ldots,3$, причем

$$c_{23} = 2(q_2q_3 - q_0q_1),\quad c_{32} = 2(q_2q_3 + q_0q_1),\quad c_{13} = 2(q_1q_3 + q_0q_2),$$

$$c_{31} = 2(q_1q_3 - q_0q_2),\quad c_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3),\quad c_{21} = 2(q_1q_2 + q_0q_3),$$

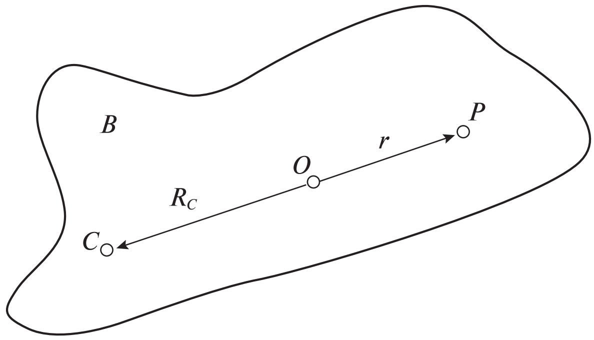

Рис. 1. Рассматриваемая механическая система

где

$$\sum_{i=0}^{3} q_i^2 = 1.$$

Тогда

$$H = \omega_x(-4q_0q_1) + \omega_y(-4q_0q_2) + \omega_z(-4q_0q_3) = (\mathbf{c}, \boldsymbol{\omega}),$$

где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение, а вектор $\mathbf{c}$ имеет компоненты $-4q_0q_1$, $-4q_0q_2$ и $-4q_0q_3$, т.е. является произвольным постоянным вектором. Следовательно, для достижения максимума функции H на множестве $\boldsymbol{\omega} \in W$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ должен быть постоянным в течение всего времени движения. Из теоремы Эйлера о конечном повороте [11] известно, что существует единственная постоянная ось вращения, позволяющая перевести твердое тело из начальной ориентации, заданной матрицей $\mathbf{A}_0$, в конечную, заданную матрицей $\mathbf{A}_T$, что и решает поставленную задачу.

Таким образом, случай, когда вектор угловой скорости не меняет своего направления, имеет существенное практическое значение, а потому требует особого внимания.

Предположим, что исследуемая механическая система состоит из показанных на рис. 1 материальной точки P с массой m и твердого тела B с массой M и центром масс в точке C, взаимодействующих друг с другом с помощью произвольных сил, внутренних по отношению к системе. Кроме того, исключим из рассмотрения все внешние силы, так что механическую систему можно полагать замкнутой, и пусть в начальный момент времени как материальная точка, так и твердое тело находятся в состоянии покоя. Тогда в процессе движения постоянно покоится и общий центр масс O всей механической системы. Кроме того, для системы в целом выполняются законы сохранения углового момента и количества движения.

Из того, что центр масс всей системы O покоится, а также из законов сохранения количества движения и углового момента для системы в целом, вытекают три соотношения в неподвижной системе координат с началом в точке O. Для радиус-вектора $\mathbf{R}_C$ центра масс тела имеем [6]

$$\mathbf{R}_C = -\mu\mathbf{r}, \quad \mu = \frac{m}{m+M}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор материальной точки относительно точки C, так что радиус-вектор материальной точки относительно общего центра масс O равен сумме $\mathbf{R}_C + \mathbf{r}$. Для абсолютной скорости $\mathbf{v}_C$ центра масс тела запишем [6]

$$\mathbf{v}_C = -\mu(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения твердого тела и $\mathbf{v}$ – скорость материальной точки относительно некоторой жестко связанной с телом подвижной системы координат с началом в центре масс C тела, а символ $\times$ означает векторное произведение. Кроме того, получено [6]

$$c\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}) = 0, \quad c = \frac{M+m}{Mm}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{J}$ – тензор инерции твердого тела относительно своего центра масс.

Подставим в уравнение (1.3) функцию для $\mathbf{r}$ из (1.1) и соотношение для $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{v}$ из (1.2). Тогда

$$c\mu^2\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{R}_C\times\mathbf{v}_C=0 \tag{1.4}$$

и уравнению (1.4) можно придать вид

$$c\mu^2\boldsymbol{\xi}+\mathbf{R}_C\times\dot{\mathbf{R}}_C=0,\quad \boldsymbol{\xi}=\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{1.5}$$

Цель данного исследования состоит в реализации заданного вектором $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(t)$ движения твердого тела в осях Кёнига [10] путем перемещения материальной точки. Следовательно, требуется по компонентам вектора $\boldsymbol{\xi}$ в неподвижной системе координат с началом в центре масс системы O найти вектор $\mathbf{R}_C=\mathbf{R}_C(t)\not\equiv 0$, удовлетворяющий уравнению (1.5).

Способ задания требуемой последовательности ориентаций твердого тела с помощью вектора $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(t)$ в неподвижной системе координат представляется нестандартным, но он следует из структуры уравнения (1.5). При невырожденной матрице $\mathbf{J}$ этот вектор позволяет восстановить ориентацию твердого тела в любой момент времени по начальным данным. Действительно, можно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений для соответствующей ортогональной матрицы $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ с начальным значением $\mathbf{A}_0$:

$$\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega},\quad \boldsymbol{\omega}=\mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi},\quad \mathbf{A}(0)=\mathbf{A}_0,$$

где тензор $\mathbf{J}$ и вектор $\boldsymbol{\omega}$ заданы в жестко связанной с телом системе координат, а кососимметрическая матрица $\boldsymbol{\Omega}$ по-прежнему состоит из компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Заметим, что в случае $\boldsymbol{\xi}(t)\equiv 0$ из соотношения (1.5) вытекает коллинеарность векторов $\mathbf{R}_C$ и $\dot{\mathbf{R}}_C$. Другими словами, центр масс твердого тела должен двигаться по прямой, проходящей через общий центр масс механической системы O. Однако никаких иных ограничений на вид функции $\mathbf{R}_C=\mathbf{R}_C(t)$, помимо дифференцируемости, условие (1.5) не накладывает. Далее будем рассматривать исключительно нетривиальные случаи, когда $\boldsymbol{\xi}\neq 0$.

2. Решение задачи. Поскольку компоненты вектора $\dot{\mathbf{R}}_C$ не могут быть явно выражены из системы уравнений (1.5), обратим внимание на то, что искомый вектор $\mathbf{R}_C$ всегда ортогонален вектору $\boldsymbol{\xi}$. Действительно, если умножить обе части соотношения (1.5) скалярно на вектор $\mathbf{R}_C$, то получим равенство $(\mathbf{R}_C,\boldsymbol{\xi})=0$. Поэтому будем искать $\mathbf{R}_C$ в форме

$$\mathbf{R}_C=\zeta_\eta\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}, \tag{2.1}$$

где $\zeta_\eta=\zeta_\eta(t)\not\equiv 0$ – неизвестная дифференцируемая скалярная функция, а $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}(t)\not\equiv 0$ – неизвестный дифференцируемый вектор, причем свойство дифференцируемости необходимо для существования скорости $\dot{\mathbf{R}}_C$.

Из (2.1) получаем

$$\dot{\mathbf{R}}_C=\dot{\zeta}_\eta\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}+\zeta_\eta\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})=\dot{\zeta}_\eta\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}+\zeta_\eta\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\eta}+\zeta_\eta\boldsymbol{\xi}\times\dot{\boldsymbol{\eta}}. \tag{2.2}$$

Тогда из (2.1) и (2.2) имеем

$$\mathbf{R}_C\times\dot{\mathbf{R}}_C=(\zeta_\eta\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})\times(\dot{\zeta}_\eta\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}+\zeta_\eta\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\eta}+\zeta_\eta\boldsymbol{\xi}\times\dot{\boldsymbol{\eta}})=\zeta_\eta^2(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})\times(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}\times\dot{\boldsymbol{\eta}}). \tag{2.3}$$

Преобразуем двойное векторное произведение

$$(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})\times(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\eta})=\dot{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\xi}})=-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\xi}}). \tag{2.4}$$

Аналогично получаем

$$(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})\times(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\boldsymbol{\eta}})=\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}})-\dot{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}(\dot{\boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\xi}(\dot{\boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \tag{2.5}$$

где через $(\cdot,\cdot,\cdot)$ обозначено смешанное произведение векторов. Подставим (2.3) в (1.4), приняв во внимание (2.4) и (2.5). Тогда в каждый момент времени должно выполняться соотношение

$$(c\mu^2+\zeta_\eta^2(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}}))\boldsymbol{\xi}=\zeta_\eta^2(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{\eta}. \tag{2.6}$$

Вектор $\boldsymbol{\xi}(t)\not\equiv 0$ не может быть коллинеарен вектору $\boldsymbol{\eta}(t)\not\equiv 0$, поскольку иначе из (2.1) вытекает, что $\mathbf{R}_C=\mathbf{R}_C(t)\equiv 0$, а это противоречит условию, наложенному при постановке задачи. Следовательно, должны обращаться в нуль множители, стоящие в (2.6) перед векторами $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$. Смешанное произведение $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\xi}})$ равно нулю, если коллинеарны либо векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, либо векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. Поскольку нас больше интересует случай, когда вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ не меняет своего направления, то сначала рассмотрим вариант, когда коллинеарны векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. Тогда из равенства нулю множителя перед $\boldsymbol{\xi}$ в (2.6) имеем

$$\zeta_\eta^2 = \frac{-c\mu^2}{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})}. \tag{2.7}$$

Подставив (2.7) в (2.1), получаем искомый вектор в случае коллинеарных векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$:

$$\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})}}\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}. \tag{2.8}$$

Представим векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ в виде следующих сумм векторов:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\perp + \boldsymbol{\eta}_\|, \quad (\boldsymbol{\eta}_\perp, \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \boldsymbol{\eta}_\| \times \boldsymbol{\xi} = 0, \\ &\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}^\perp + \dot{\boldsymbol{\eta}}^\|, \quad (\dot{\boldsymbol{\eta}}^\perp, \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}^\| \times \boldsymbol{\xi} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Другими словами, разложим каждый из векторов $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ на два вектора, один из которых коллинеарен вектору $\boldsymbol{\xi}$, а другой лежит в плоскости, ортогональной этому вектору. Коллинеарные составляющие отмечены индексом $\|$, а ортогональные – индексом $\perp$. При разложении вектора $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ использованы верхние индексы, чтобы не возникло ошибочного представления, например, о равенстве в общем случае вектора $\dot{\boldsymbol{\eta}}^\|$ производной по времени от вектора $\boldsymbol{\eta}_\|$.

Из (2.9) следует, что

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}_\perp, \quad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = (\dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\dot{\boldsymbol{\eta}}^\perp + \dot{\boldsymbol{\eta}}^\|, \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}_\perp) = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}_\perp, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\perp),$$

и выражение (2.8) можно записать в форме

$$\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}_\perp, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\perp)}}\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}_\perp.$$

Следовательно, искомый вектор $\mathbf{R}_C$ зависит только от тех составляющих векторов $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}$, которые лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\xi}$. Тогда можно выбирать вектор $\boldsymbol{\eta}$ так, чтобы он всегда лежал в этой плоскости.

Теперь докажем, что указанный вектор можно всегда полагать единичным без ограничения общности. Пусть

$$\boldsymbol{\eta} = \varrho\boldsymbol{\rho}, \quad |\boldsymbol{\rho}| = 1, \quad \varrho = |\boldsymbol{\eta}| > 0, \tag{2.10}$$

где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ – некоторый дважды дифференцируемый единичный вектор. Приняв во внимание (2.10), получим

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \left(\boldsymbol{\xi}, \varrho\boldsymbol{\rho}, \frac{d(\varrho\boldsymbol{\rho})}{dt}\right) = (\boldsymbol{\xi}, \varrho\boldsymbol{\rho}, \dot{\varrho}\boldsymbol{\rho} + \varrho\dot{\boldsymbol{\rho}}) = (\boldsymbol{\xi}, \varrho\boldsymbol{\rho}, \varrho\dot{\boldsymbol{\rho}}) + (\boldsymbol{\xi}, \varrho\boldsymbol{\rho}, \dot{\varrho}\boldsymbol{\rho}). \tag{2.11}$$

Поскольку смешанное произведение векторов $(\boldsymbol{\xi}, \varrho\boldsymbol{\rho}, \dot{\varrho}\boldsymbol{\rho})$ равно нулю, имеем

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \varrho^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}). \tag{2.12}$$

Подставим (2.10) и (2.12) в (2.8). Тогда

$$\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-\varrho^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}}\boldsymbol{\xi} \times (\varrho\boldsymbol{\rho}) = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}}\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Таким образом, при коллинеарных векторах $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ можно ограничиться случаем, когда вектор $\boldsymbol{\eta}$ лежит в плоскости, ортогональной этим векторам и является единичным. Тогда в рассматриваемом варианте искомый вектор $\mathbf{R}_C$ зависит от единственной произвольной скалярной функции времени. Например, ею может быть функция $\beta = \beta(t)$, представляющая собой полярный угол для вектора $\boldsymbol{\eta}$ в некоторой неподвижной двумерной системе координат, лежащей в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{\xi}$, с началом в центре масс O исследуемой механической системы.

Так как вектор $\boldsymbol{\eta}$ единичный, то векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ всегда ортогональны. Их векторное произведение коллинеарно вектору $\boldsymbol{\xi}$. Тогда смешанное произведение $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \pm|\boldsymbol{\xi}||\dot{\beta}|$. В этом выражении, как следует из (2.8), необходимо выбрать знак “минус”, т.е. векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ должны составлять левую тройку. Механическую причину этого легче всего понять, если представить себе твердое тело в виде однородного шара. Тогда движущаяся в плоскости материальная точка и сечение шара этой же плоскостью должны вращаться в противоположные стороны для того, чтобы суммарный угловой момент механической системы в целом был равен нулю. Окончательно получаем

$$|\mathbf{R}_C| = \mu\sqrt{\frac{c|\boldsymbol{\xi}|}{|\dot{\beta}|}}. \tag{2.13}$$

Зависимость $|\mathbf{R}_C| = |\mathbf{R}_C(t)|$ может быть следствием конкретной технической реализации рассматриваемой упрощенной механической системы. В частности, форма возможных траекторий движения материальной точки может быть раз и навсегда определена. Тогда из соотношения (2.13) вытекает, что

$$|\dot{\beta}| = \frac{\mu^2 c|\boldsymbol{\xi}|}{\mathbf{R}_C^2}. \tag{2.14}$$

Выражение (2.14) дает модуль скорости изменения полярного угла материальной точки при движении по заданной траектории для получения требуемой реализации вектора $\boldsymbol{\xi}$ в случае, когда его направление не меняется. Если траектории представляют собой, например, произвольные дуги, лежащие на фиксированной сфере с центром в общем центре масс устройства, то формула (2.14) приобретает особенно ясный механический смысл.

3. Общий случай. В случае, если векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ неколлинеарны, векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ должны быть, наоборот, коллинеарны, как это было отмечено выше при анализе соотношения (2.6). Тогда в (2.1) следует взять $\boldsymbol{\eta} = \zeta_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}$, где $\zeta_\xi = \zeta_\xi(t)$ – некоторая дифференцируемая скалярная функция. Но в этом случае можно в (2.1) заменить произведение $\zeta_\eta \zeta_\xi$ двух неизвестных скалярных функций на единственную, оставив за ней прежнее обозначение ζ_η, и просто выбрать $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\xi}}$. Следовательно, при неколлинеарных векторах $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ искомый вектор, согласно (2.8), имеет вид

$$\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \ddot{\boldsymbol{\xi}})}}\boldsymbol{\xi} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}. \tag{3.1}$$

В формуле (3.1) векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ и $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$ должны образовывать левую тройку по тем же самым механическим причинам, которые были очевидны в описанном выше упрощенном случае. Заметим, что для существования вектора $\dot{\mathbf{R}}_C$ из соотношения (3.1) следует необходимость наличия третьей производной по времени вектора $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$.

Обратим внимание на интересную интерпретацию формулы (3.1), связывающую ее с дифференциальной геометрией [14]. Запишем (3.1) в форме

$$\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-\varkappa}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\boldsymbol{\chi}} \times \ddot{\boldsymbol{\chi}}}{|\dot{\boldsymbol{\chi}} \times \ddot{\boldsymbol{\chi}}|}, \quad \varkappa = \frac{(\dot{\boldsymbol{\chi}}, \ddot{\boldsymbol{\chi}}, \dddot{\boldsymbol{\chi}})}{|\dot{\boldsymbol{\chi}} \times \ddot{\boldsymbol{\chi}}|^2}, \quad \boldsymbol{\chi}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\xi}(\tau)d\tau, \tag{3.2}$$

где единичный вектор $\mathbf{b}$ – бинормаль, а величина $\varkappa$ – кручение кривой, задаваемой вектором $\boldsymbol{\chi}$. Оказывается, что заданное для рассматриваемой механической системы движение в осях Кёнига может быть реализовано только тогда, когда кручение $\varkappa$ кривой, описанной в (3.2) с помощью радиус-вектора $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(t)$, отрицательно.

4. Пример для случая регулярной прецессии. Поскольку применение соотношения (3.1) может оказаться неочевидным, рассмотрим конкретный простой пример. Выберем классическую задачу о качении однородного кругового конуса по плоскости. Пусть масса конуса равна M, высота – h, а угол при вершине составляет 2α. Обозначим через J_A и J_C экваториальный и полярный моменты инерции соответственно. Следуя [10], предположим, что при качении нет проскальзывания, а плоскость, по которой оно происходит, является горизонтальной и неподвижной. Рассмотрим сечение конуса в начальный момент времени $t_0 = 0$ вертикальной плоскостью. На рис. 2 оно обозначено точками U_1, U_2 и U_3. Вершина конуса U_1 закреплена неподвижно. Пусть, согласно [10], в начальный момент времени центру основания конуса придана горизонтальная

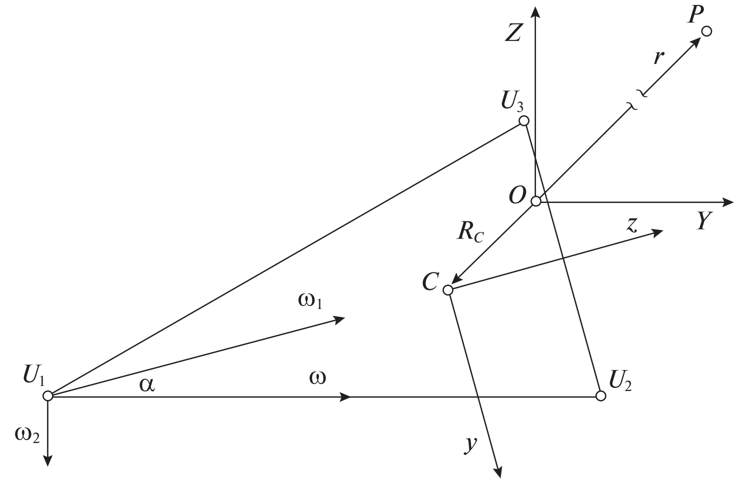

Рис. 2. Реализация регулярной прецессии в осях Кёнига

скорость v. Тогда наличие момента внешних сил заставляет конус осуществлять регулярную прецессию. Представим мгновенную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ в виде суммы угловой скорости собственного вращения $\boldsymbol{\omega}_1$ и угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$, причем вектор $\boldsymbol{\omega}_1$ направлен коллинеарно оси симметрии тела, а вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ – вертикально вниз.

Введем подвижную систему координат Cxy, жестко связанную с конусом и имеющую центр в точке C, являющейся центром масс конуса. Пусть ее оси Cx и Cy параллельны основанию. Тогда ось Cz будет направлена вдоль оси симметрии тела. Без ограничения общности предположим, что в начальный момент времени ось абсцисс этой системы направлена на читателя и, следовательно, перпендикулярна плоскости рисунка. В этой системе, согласно [10], проекции вектора кинетического момента $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ можно выразить с помощью углов Эйлера следующим образом:

$$\mathbf{K}_x = J_A\omega_2 \sin\theta\sin\varphi, \quad \mathbf{K}_y = J_A\omega_2 \sin\theta\cos\varphi, \quad \mathbf{K}_z = J_C(\omega_2\cos\theta + \omega_1), \tag{4.1}$$

где $\theta = \pi/2 + \alpha$ – постоянный угол нутации, образованный векторами $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. В соотношениях (4.1) функция $\varphi = \varphi(t)$ представляет собой угол собственного вращения конуса и в начальный момент времени $\varphi(0) = 0$. Заметим, что $\dot\varphi = \omega_1 = \omega/\cos\alpha$, $\omega_2 = \omega\mathrm{tg}\alpha$ и $\omega = v/(h\sin\alpha)$.

Однако выражение (3.1) получено при условии, что компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}$ заданы в неподвижной системе координат. Поэтому рассмотрим показанную на рис. 2 неподвижную систему координат OXY. Ее ось абсцисс в начальный момент времени сонаправлена оси абсцисс подвижной системы координат Cxy, ось OZ вертикальна, а ось OY горизонтальна и дополняет оси OX и OZ до правой тройки векторов. В этой системе вектор кинетического момента $\mathbf{K}$ имеет следующие проекции:

$$\begin{gathered} K_X = \Phi\sigma\sin(\omega_1 t), \quad K_Y = \Phi\sin\alpha(\sigma\cos(\omega_1 t) + 2\cos^2\alpha), \\ K_Z = -\Phi\cos\alpha(\sigma\cos(\omega_1 t) - 2\sin^2\alpha), \quad \Phi = \frac{3}{20}\frac{Mhv}{\cos^2\alpha}, \end{gathered} \tag{4.2}$$

причем $\sigma = 3\cos^2\alpha + 1$. Выражения (4.2) определяют соответствующие компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}$ в соотношении (3.1).

Как видно из (4.2), вектор $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$ имеет третью производную по времени. Помимо этого, для возможности реализации заданного движения, согласно формуле (3.1), необходимо, чтобы входящее в него смешанное произведение векторов было отрицательно. Действительно, если подставить выражения (4.2) в соотношение (3.1), получим

$$\sqrt{-(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \ddot{\boldsymbol{\xi}})} = \frac{3\sqrt{30}}{200}\frac{\sigma v^3 M\sqrt{M}}{\sin\alpha\cos^4\alpha}.$$

Следовательно, заданное формулами (4.2) движение можно реализовать в осях Кёнига.

Основываясь на соотношениях (3.1) и (1.1), можно выразить описывающий относительное движение материальной точки вектор **r** с компонентами в подвижной системе координат Cxy, равными

$$r_x = -r_{xy}\sin(\omega_1 t), \quad r_y = -r_{xy}\cos(\omega_1 t), \quad r_z = \frac{\sqrt{30}}{20}\frac{\sigma h}{\sqrt{\mu}\cos\alpha}, \tag{4.3}$$

причем $r_{xy} = \sqrt{30}h\sin\alpha/(10\sqrt{\mu})$. Соотношения (4.3) означают, что для реализации заданного движения материальная точка должна вращаться с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии конуса, всегда оставаясь в плоскости, перпендикулярной этой оси и находящейся на расстоянии r_z от центра масс конуса. Траектория материальной точки при этом должна представлять собой окружность радиуса r_{xy}, а частота вращения должна быть равна частоте собственного вращения конуса. Понятно, что последний не будет катиться по некоторой неподвижной плоскости, как это происходит при регулярной прецессии, описанной в [10], но движение в осях Кёнига будет тем же самым.

Обратим внимание на то, что расстояние r_z между центром масс конуса и плоскостью, в которой должна вращаться материальная точка, может оказаться весьма большим, из-за чего на рис. 2 центр масс O системы в целом показан существенно смещенным относительно центра масс C конуса, а положение материальной точки, описываемое радиус-вектором **r**, показано с учетом разрыва этого вектора. Действительно, пусть $\alpha = \pi/12$, $m = 0.01$ кг, $M = 0.05$ кг и $h = 0.1$ м. Тогда из соотношений (4.3) имеем $r_{xy} \approx 0.035$ м и расстояние $r_z \approx 0.26$ м.

Заключение. Для изменения ориентации твердого тела с помощью перемещающейся массы необходимо сделать следующее. Сперва следует задать требуемое движение объекта в некоторой системе координат с началом в центре масс тела и осями, перемещающимися поступательно, причем движение самой этой системы относительно какой-либо инерциальной системы координат роли не играет. Далее нужно найти компоненты вектора $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ как функции времени в неподвижной системе координат и определить, существуют ли интервалы времени, на которых векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ коллинеарны. Если такие интервалы есть, то на них требуемое движение материальной точки всегда существует и может быть найдено по формуле (2.8), куда входит произвольный дважды дифференцируемый вектор $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$, причем смешанное произведение векторов $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ должно быть отрицательным. Из соотношения (2.8) вытекает, что материальная точка должна двигаться в плоскости, ортогональной векторам $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. Без ограничения общности вектор $\boldsymbol{\eta}$ можно выбирать единичным и лежащим в той же плоскости. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\eta}$ фактически определен с точностью до произвольной дифференцируемой скалярной функции времени, обеспечивающей отрицательный знак указанного смешанного произведения. В качестве таковой функции может выступать, скажем, полярный угол этого вектора в некоторой двумерной системе координат, находящейся в плоскости, ортогональной векторам $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. Данное свойство позволяет, например, обеспечить требуемое движение при произвольно выбранной траектории движения материальной точки в указанной плоскости.

На тех интервалах времени, где векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ неколлинеарны, движение материальной точки определяется однозначно формулой (3.1), а потому существует лишь тогда, когда существует третья производная вектора $\boldsymbol{\xi}$ как функции времени, причем смешанное произведение векторов $(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \ddot{\boldsymbol{\xi}})$ должно быть отрицательно. Это накладывает ограничения на алгоритмы переориентации объекта.

Итоговые соотношения (2.8) и (3.1) могут быть использованы как для изменения ориентации капсульных роботов, так и при эксплуатации космических аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Борисов А.Е., Гавриков А.А., Емельянов Г.А.* Управление ориентацией объекта на вращающемся основании с помощью двухступенчатого электропривода // Изв. РАН ТиСУ. 2019. № 6. С. 3–17.
2. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Изв. РАН ТиСУ. 2019. № 6. С. 139–162.
3. *Schmoeckel F., Worn H.* Remotely Controllable Microrobots Acting as Nano Positioners and Intelligent Tweezers in Scanning Electron Microscopes (SEMs) // Proc. Intern. Conf. Robotics and Automation, IEEE. V. 4. N.Y., 2001. P. 3903–3913.

4. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // Transactions of ASME. J. Dynamical Systems, Measurement and Control. 2006. V. 128. P. 122–133.
5. *Chernousko F.L.* Two-dimensional Motions of a Body Containing Internal Moving Masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
6. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
7. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
8. *Черноусько Ф.Л., Шматков А.М.* Оптимальное управление поворотом твердого тела при помощи внутренней массы // Изв. РАН ТиСУ. 2019. № 3. С. 10–23.
9. *Шматков А.М.* Осуществление заданного движения твердого тела относительно своего центра масс перемещением материальной точки // ДАН. 2019. Т. 64. № 11. С. 434–437.
10. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
11. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
13. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1992. 576 с.
14. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.