ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, № 5, с. 56–59

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.854.6

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХИНДЕКСНОЙ ПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ[1]

© 2020 г. Л. Г. Думбадзе[a], В. Ю. Леонов[b], А. П. Тизик[a],*, В. И. Цурков[b],**

[a] Центральный научно-исследовательский ин-т связи, Москва, Россия

[b] Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

*e-mail: tizik_ap@mail.ru

**e-mail: tsurkov@ccas.ru

Поступила в редакцию 06.04.2020 г.
После доработки 20.04.2020 г.
Принята к публикации 25.05.2020 г.

Рассматривается классическая задача о назначении. Вводится третий индекс, который может характеризовать, например, локацию выполнения работ. Предлагается итеративный декомпозиционный алгоритм. На каждом шаге решается задача с тремя ограничениями из разных групп условий и с одной связывающей переменной. Решаются также тройки задач с одним ограничением и по определенным правилам меняются коэффициенты целевых функций. Монотонный по целевой функции итеративный процесс либо приходит к точному оптимуму исходной задачи, либо указывает на неединственность решения. В последнем случае простая процедура находит оптимумы.

DOI: 10.31857/S0002338820050054

Введение. Трехиндексная планарная задача о назначениях [1], как известно, относится к классу NP-полных задач [2, 3]. Для ее решения используется метод ветвей и границ [4], "жадные" и эвристические алгоритмы [5]. В [6] предложены улучшения приближенных алгоритмов переходом к вероятностной интерпретации. В данной работе применяется метод последовательной модификации целевой функции [7–9] для решения планарной трехиндексной задачи о назначениях. Алгоритм находит точное решение, и численные эксперименты дают полиномиальную относительно размерности исходной задачи временную оценку.

1. Постановка задачи. Трехиндексная планарная задача о назначениях может быть записана в виде задачи линейного целочисленного программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i,j,k = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_{ijk} \to \min. \tag{1.5}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00625).

2. Метод решения задачи. Для начала решим $3n^2$ задач с одним ограничением каждая. Первые n^2 задач:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_{ijk}}{3} x_{ijk} \to \min \tag{2.1}$$

при ограничениях (1.1), (1.4). Вторые n^2 задач:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ijk}}{3} x_{ijk} \to \min \tag{2.2}$$

при ограничениях (1.2), (1.4). Третьи n^2 задач:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{ijk}}{3} x_{ijk} \to \min \tag{2.3}$$

при ограничениях (1.3), (1.4). Все $3n^2$ задач вида (2.1)–(2.3) легко решаются поиском минимального коэффициента при переменных в соответствующих целевых функциях.

Если в результате решения вышеупомянутых $3n^2$ задач значения переменных удовлетворяют ограничениям (1.1)–(1.3), то тем самым решена исходная задача (1.1)–(1.5). Сумма значений целевых функций в оптимальных решениях задач (2.1)–(2.3) будет значением целевой функции в оптимальном решении задачи (1.1)–(1.5). В противном случае будем говорить, что получено псевдорешение этой задачи. Заметим, что значение целевой функции псевдорешения не превосходит значения целевой функции искомого оптимального решения исходной задачи. Построим последовательность псевдорешений с монотонно возрастающими значениями целевых функций.

Для получения второго псевдорешения решим следующую задачу с тремя ограничениями:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i11} = 1, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j1} = 1, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{11k} = 1, \tag{2.6}$$

$$c_{111}x_{111} + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_{i11}}{3} x_{i11} + \sum_{j=2}^{n} \frac{c_{1j1}}{3} x_{1j1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{c_{11k}}{3} x_{11k} \to \min. \tag{2.7}$$

В этой задаче x_{111} – единственная общая переменная в ограничениях (2.4)–(2.6). Обозначим:

$$M_1 = \max_{i \neq 1} \frac{c_{i11}}{3}, \quad M_2 = \max_{j \neq 1} \frac{c_{1j1}}{3}, \quad M_3 = \max_{k \neq 1} \frac{c_{11k}}{3}.$$

Могут иметь место три случая:

(а) $c_{111} < M_1 + M_2 + M_3$;

(б) $c_{111} = M_1 + M_2 + M_3$;

(в) $c_{111} > M_1 + M_2 + M_3$.

Если получен случай (а), то решением задачи (2.4)–(2.7) является $x_{111} = 1$, остальные переменные равны нулю. Если возник случай (б), то очевидно, что задача (2.4)–(2.7) имеет несколько оптимальных решений, которые могут быть описаны системой из трех линейных ограничений с участием x_{111}. Если имеет место (в), то $x_{111} = 0$, а решение задачи (2.4)–(2.7) представляет собой объединение трех задач с ограничениями (2.4)–(2.6) соответственно при условии $x_{111} = 0$.

Решив задачу (2.4)–(2.7), преобразуем ее, сохраняя оптимальное решение, в три независимые задачи с ограничениями (2.4)–(2.6) соответственно. Для этого достаточно в случае (а) исходя из равенства

$$c_{111} = M_1 + M_2 + M_3 - \delta, \quad \delta > 0,$$

Таблица. Зависимость времени поиска решения от размерности задачи

Размерность	21	26	31	36	41	46	51	56
Время, мин	0.5	1.5	3.5	11	24	60	147	192

в ограничении (2.4) вместо $c_{111}/3$ записать $M_1 - \delta/3$, в ограничении (2.5) вместо $c_{111}/3$ записать $M_2 - \delta/3$, в ограничении (2.6) вместо $c_{111}/3$ записать $M_3 - \delta/3$. В случае (б) новые коэффициенты при x_{111} запишутся следующим образом: в ограничении (2.4) будет M_1, в ограничении (2.5) будет M_2, в ограничении (2.6) будет M_3. В случае (в) новые коэффициенты при x_{111} исходя из равенства

$$c_{111} = M_1 + M_2 + M_3 + \gamma, \quad \gamma > 0,$$

в ограничении (2.4) будет $M_1 + \gamma/3$, в ограничении (2.5) будет $M_2 + \gamma/3$, в ограничении (2.6) будет $M_3 + \gamma/3$.

В итоге получим второе псевдорешение с возросшим, в общем случае, значением целевой функции. Решая циклически все n^3 задач с тремя ограничениями, получаем последовательность псевдорешений с монотонно возрастающей целевой функцией, ограниченной сверху значением целевой функции в оптимальном решении исходной задачи (1.1)–(1.5). Имеет место следующая очевидная теорема.

Т е о р е м а 1. Если в предельном псевдорешении все задачи с одним ограничением имеют единственное решение, то тем самым получено оптимальное решение исходной задачи (1.1)–(1.5).

В случае неединственности решения в некоторых задачах с одним ограничением будем говорить, что имеет место вырождение. Заметим, что вся вышеописанная схема решения уже применялась для решения других задач в [8, 9] и там в случае вырождения требовались дополнительные конструкции алгоритма и дополнительные, возможно значительные, объемы вычислений.

Покажем, что для преодоления вырождения в задаче (1.1)–(1.5) не потребуются значительные дополнительные вычисления. Для этого сначала рассмотрим одну из задач с тремя ограничениями после окончания циклического процесса. Пусть в одном из трех уравнений имеет место вырождение с участием общей переменной. Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. В этом случае вырождение имеет место и в двух других уравнениях. Кроме того, во всех задачах с тремя ограничениями, где общей переменной является участвующая в вырождении в данной задаче, также будет иметь место вырождение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что при решении данной задачи с тремя ограничениями имеет место случай (б), иначе равенства коэффициентов не было бы ни в одном из ограничений. Второе утверждение непосредственно следует из первого.

3. Включение переменных в решение при вырождении. Пусть при решении задачи с общей переменной $x_{i_0j_0k_0}$ имеет место вырождение. Тогда кроме $x_{i_0j_0k_0}$ в задаче с первым ограничением на включение в решение на равных претендуют $x_{i_1j_0k_0}$, $x_{i_2j_0k_0}$ и т.д. В задаче со вторым ограничением на включение в решение претендуют $x_{i_0j_1k_0}$, $x_{i_0j_2k_0}$ и т.д. В задаче с третьим ограничением на включение в решение претендуют $x_{i_0j_0k_1}$, $x_{i_0j_0k_2}$ и т.д. Для выделения одного оптимального решения поступим следующим образом. Выберем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и уменьшим $c^1_{i_0j_0k_0}$, $c^2_{i_0j_0k_0}$ и $c^3_{i_0j_0k_0}$ на $\varepsilon/6$. Тогда в рассматриваемой задаче с тремя ограничениями будет $x_{i_0j_0k_0} = 1$, а все остальные переменные равны нулю. Далее уменьшим $c^1_{i_1j_0k_0}$, $c^1_{i_2j_0k_0}$ и т.д., $c^2_{i_0j_1k_0}$, $c^2_{i_0j_2k_0}$ и т.д., $c^3_{i_0j_0k_1}$, $c^3_{i_0j_0k_2}$ и т.д. на $\varepsilon/12$. Это не изменит оптимального решения. Одновременно увеличим на $\varepsilon/24$ соответствующие коэффициенты в двух других уравнениях для каждой из этих переменных, что обеспечит им равенство нулю во всех уравнениях. При рассмотрении следующей переменной, участвующей в вырождении, ее коэффициенты уменьшаем на $\varepsilon/12$ и т.д. Заметим, что, не ограничивая общности, можно считать коэффициенты целевой функции (1.5) целыми числами и поэтому циклический процесс можно остановить, если модуль разности между претендентами меньше $1/n^2$.

4. Результаты численного эксперимента. На персональном компьютере (процессор Intel Core i7-2600, 3.40GHz) была решена серия тестовых задач. Коэффициенты целевой функции выбирались случайным образом в диапазоне от 200 до 500. В таблице дана длительность вычислений в зависимости от размерности задачи.

Аппроксимационная формула зависимости времени расчета в минутах при коэффициенте корреляции 0.98 имеет вид $T = 1.6 \times 10^{-9} n^{6.35}$.

Заключение. Итак, итеративный алгоритм находит точное решение трехиндексной задачи о назначении. При этом имеет место полиномиальный рост времени решения в зависимости от размерности исходной задачи. Конструктивно алгоритм распространяется на случай любого количества индексов. Тогда на каждом шаге итеративного процесса решается промежуточная задача с количеством ограничений, которое равно числу исходных индексов. Детальный анализ таких обобщений представляет интерес для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burkard R.* Assignment Problems / Rainer Burkard, Mauro Dell'Amico, Silvano Martello – Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 2009. 382 c.
2. *Frieze A.M.* Complexity of a 3-dimensional Assignment Problem // European J. Operational Research. 1983. V. 13. P. 161–164.
3. *Fon-Der-Flaass D.G.* Array of Distinct Representatives – a Very Simple NP-Complete Problem // Discrete Math. 1997. V. 171. № 1–3. P. 295–298.
4. *Vlach M.* Branch and Bound Method for the Three-index Assignment Problem // Ekonomicko-Matematicky Obzor. 1967. V. 3. P. 181–191.
5. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 382 с.
6. *Медведев С.Н.* Адаптивные алгоритмы решения трехиндексных задач о назначениях // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: Сб. тр. VI Междунар. конф. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2013. С. 153–156.
7. *Тизик А.П., Цурков В.И.* Метод последовательной модификации функционала для решения транспортной задачи // АиТ. 2012. № 1. С. 148–158.
8. *Кузовлев Д.И., Тизик А.П., Тресков Ю.П.* Метод последовательных изменений параметров функционала при решении задачи о назначении // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6. С. 67–78.
9. *Кузовлев Д.И., Тизик А.П., Тресков Ю.П.* Итеративный алгоритм для задачи о назначении // Технические науки: теория и практика: материалы междунар. заоч. науч. конф. Чита: Молодой ученый, 2012. С. 41–43.