УСТОЙЧИВОСТЬ

УДК 517.922, 517.977.1, 517.926.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. А. Д. Кононов[a], А. А. Щеглова[a,*]

[a] Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

*e-mail: shchegl@icc.ru

Поступила в редакцию 18.10.2018 г.
После доработки 14.02.2020 г.
Принята к публикации 30.03.2020 г.

Рассматривается линейная стационарная система дифференциально-алгебраических уравнений произвольно высокого индекса неразрешенности с интервальными коэффициентами. Для того чтобы возмущения не меняли вид и свойства общего решения, получены достаточные условия, при которых возмущенная система имеет такую же структуру общего решения, что и номинальная система. Эти условия представляют собой конечные соотношения, которым должны удовлетворять интервальные коэффициенты. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены конструктивные оценки величины, определяющей размах неопределенностей, при выполнении которых рассматриваемое интервальное семейство робастно устойчиво. В частности, условия робастной устойчивости получены в предположении сверхустойчивости номинальной системы.

DOI: 10.31857/S0002338820060074

0. Введение. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_0x'(t) + B_0x(t) = 0, \quad t \in T = [0,+\infty), \tag{0.1}$$

где A_0 и B_0 – заданные вещественные $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ – искомая n-мерная функция. Предполагается, что $\det A_0 = 0$. Системы такого рода называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы.

ДАУ вида (0.1) возникают при моделировании процессов во многих прикладных областях, в частности, в теории автоматического регулирования [1, с. 19], в теплотехнике [2], при проектировании электронных схем и электрических цепей [3, с. 259], в результате применения метода сферических гармоник к решению задачи переноса нейтронов [1, с. 21], при приближенном решении задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости методом ортогональных разложений [4, с. 86].

В работе изучается вопрос об асимптотической устойчивости семейства ДАУ с интервальными коэффициентами. Прежде чем привести постановку задачи, необходимо охарактеризовать специфику исследования робастных свойств таких систем. Основная трудность, возникающая в такого рода исследованиях, связана с тем, что даже в простейших случаях при сколь угодно малом возмущении коэффициентов может измениться внутренняя структура системы и, следовательно, вид общего решения, в результате чего структура и свойства невозмущенной системы (0.1) могут потерять для анализа всякое значение. В качестве иллюстрации рассмотрим пример индекса неразрешенности единица.

П р и м е р 1. Система ДАУ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - f_2'(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Возмущенная система

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0,$$

имеет однопараметрическое семейство решений, в частности, при $f_1(t) = 0,\ f_2(t) = 1$

$$x_\varepsilon(t,c) = e^{t/\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c \in \mathbf{R}$ – произвольная константа. Очевидно, если $c \neq 0$, то

$$\|x_\varepsilon(t,c) - x(t)\| \to \infty, \quad \epsilon \to 0.$$

Уже из этого примера видно, что для обеспечения робастной устойчивости возмущения (даже достаточно малые) не могут быть произвольного вида. В данной работе для того, чтобы не возникала ситуация, представленная в примере 1, требуется, чтобы интервальные возмущения подчинялись некоторым конечным соотношениям, гарантирующим совпадение размерности пространства решений и структуры общего решения интервальных ДАУ и невозмущенной системы (0.1). Такие возмущения авторы назвали “сохраняющими внутреннюю структуру”.

Таким образом, в статье исследуется асимптотическая устойчивость интервального семейства

$$(A_0 + \gamma\Delta_A)x'(t) + (B_0 + \gamma\Delta_B)x(t) = 0, \quad t \in T, \tag{0.2}$$

где $\Delta_A = (\alpha_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\Delta_B = (\beta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ – матрицы неопределенностей, элементы которых должны удовлетворять некоторым алгебраическим связям, обеспечивающим сохранение внутренней структуры системы. При этом

$$|\alpha_{i,j}| \le g_{i,j}, \quad |\beta_{i,j}| \le h_{i,j}, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{0.3}$$

где величины $g_{i,j}$ и $h_{i,j}$ подчиняются алгебраическим соотношениям, вытекающим из условий сохранения структуры. Матрицы $G = (g_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и $H = (h_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ задают масштабы изменения элементов матриц A_0 и B_0, величина $\gamma > 0$ определяет размах неопределенностей. Точное определение рассматриваемого интервального семейства в рамках сделанных в работе основных предположений сформулировано в разд. 3 (определение 3).

В литературе имеются результаты по робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости стационарных ДАУ [5–7], полученные посредством преобразования системы к канонической форме Кронекера–Вейерштрасса. В статье [8] обоснованы достаточные условия робастной устойчивости ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности в условиях, когда матрицы неопределенностей удовлетворяют некоторым условиям малости матричных норм. В [9–11] изучалась проблема робастной устойчивости ДАУ в случае, когда возмущение присутствует только в матрице B_0.

Что касается нестационарных ДАУ, то известны результаты для систем индекса 1 с периодическими коэффициентами, использующие tractability index подход, базирующийся на построении проекторов на ядро [12, 13]. В [14] представлены необходимые и достаточные условия робастной устойчивости нестационарных ДАУ с интервальными коэффициентами для частного случая индекса один (так называемые impuls-free или удовлетворяющие критерию “ранг-степень”).

Для получения условий робастной устойчивости интервального семейства (0.2) в данной работе используется следующий подход. Сначала находятся достаточные условия того, что интервальные матрицы Δ_A и Δ_B не нарушают внутреннюю структуру ДАУ (0.1). Для этой цели привлекается структурная форма, которая эквивалентна исходной системе в смысле решений. Построение данной структурной формы, в отличие от канонической формы Кронекера–Вейерштрасса, носит конструктивный характер. Затем с применением известных результатов по робастной устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной, получаются условия робастной устойчивости для преобразованной системы.

Наконец, обосновывается эквивалентность в смысле решений преобразованного и исходного интервальных семейств. Таким образом, в предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, найдены оценки для величины γ, определяющей размах неопределенностей, при выполнении которых система (0.2) робастной устойчива. В частности, условия робастной устойчивости получены в предположениии сверхустойчивости номинальной системы. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности.

1. Структурная форма для системы ДАУ. Для ДАУ (0.1) определим $(n(r+1)\times n)$-матрицы

$$\mathcal{B}_r = \operatorname{colon}(B_0, O, \ldots, O), \quad \mathcal{A}_r = \operatorname{colon}(A_0, B_0, O, \ldots, O), \tag{1.1}$$

$(n(r+1)\times nr)$-матрицу

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O & O \\ A_0 & O & \ldots & O & O \\ B_0 & A_0 & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ O & O & \ldots & A_0 & O \\ O & O & \ldots & B_0 & A_0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

и $(n(r+1)\times n(r+2))$-матрицу

$$\mathcal{D}_r = (\mathcal{B}_r \,|\, \mathcal{A}_r \,\|\, \Lambda_r).$$

Предположим, что для некоторого $r (0 \le r \le n)$ в матрице $\mathcal{D}_r$ найдется неособенный минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя $\lambda = \operatorname{rank}\Lambda_r$ столбцов матрицы Λ_r и все столбцы матрицы $\mathcal{A}_r$. Такой минор будем называть *разрешающим минором*.

Введем обозначение

$$(A_1\ A_2) = A_0 Q, \quad (B_1\ B_2) = B_0 Q, \tag{1.3}$$

где Q – матрица перестановок столбцов[1], такая, что все столбцы матрицы

$$\mathcal{B}_{2,r} = \operatorname{colon}(B_2, O, \ldots, O) \tag{1.4}$$

входят в разрешающий минор матрицы $\mathcal{D}_r$, а столбцы матрицы $\operatorname{colon}(B_1, O, \ldots, O)$ не входят в этот минор. Блоки B_2 и A_2 имеют размеры $n\times d$, $d = nr - \lambda$. О построении матрицы Q см. в [8].

Обозначим

$$\Gamma_r = \mathcal{D}_r \operatorname{diag}\left\{Q\begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}, Q, \ldots, Q\right\} = \left(\begin{array}{c|cc||ccccc} B_2 & A_1 & A_2 & O & O & \ldots & O & O \\ O & B_1 & B_2 & A_1 & A_2 & \ldots & O & O \\ O & O & O & B_1 & B_2 & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & O & \ldots & A_1 & A_2 \end{array}\right), \tag{1.5}$$

где E_d – единичная матрица порядка d, $\operatorname{diag}\{P_1, \ldots, P_s\}$ – квазидиагональная матрица, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы нулевые.

О п р е д е л е н и е 1. Наименьшее значение r, при котором в матрице $\mathcal{D}_r$ найдется разрешающий минор, называется *индексом неразрешенности* ДАУ (0.1).

З а м е ч а н и е 1. В работе [8] показано, что в случае регулярного матричного пучка $cA_0 + B_0$ в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор и выполняется условие

$$\operatorname{rank}\Lambda_{r+1} = \operatorname{rank}\Lambda_r + n. \tag{1.6}$$

При этом индекс неразрешенности совпадает с индексом пучка.

[1] О матрицах перестановок строк и столбцов см. в [15, с. 127, 128].

Л е м м а 1 [16]. Наличия разрешающего минора в матрице $\mathcal{D}_r$ необходимо и достаточно для существования оператора

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1\frac{d}{dt} + \ldots + R_r\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{1.7}$$

(R_j – $(n\times n)$-матрицы ($j=\overline{0,r}$)), действие которого преобразует систему (0.1) к виду

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t)\end{pmatrix} + \tilde{B}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = 0, \tag{1.8}$$

где $\operatorname{colon}\left(x_1(t), x_2(t)\right) = Q^{-1}x(t)$, Q – матрица перестановок из (1.3),

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O\end{pmatrix} = \left(R_0A_0 + R_1B_0\right)Q, \quad \tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O\end{pmatrix} = R_0B_0Q, \tag{1.9}$$

J_1 и J_2 – некоторые матрицы соответствующих размеров.

Прямым следствием леммы 1 является следующий результат.

У т в е р ж д е н и е 1. Оператор вида (1.7), преобразующий ДАУ (0.1) к виду (1.8), (1.9), существует тогда и только тогда, когда относительно $R_0, R_1, \ldots, R_r$ разрешима алгебраическая система

$$(R_0\ R_1\ \ldots\ R_r)\Gamma_r = \left(E_n\ O\ \ldots\ O\right), \tag{1.10}$$

где матрица Γ_r определена в (1.5).

Предположим, что в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор. Обозначим через M_r матрицу, определителем которой является этот минор. Покажем, что коэффициенты оператора (1.7) могут быть найдены по формуле

$$(R_0\ R_1\ \ldots\ R_r) = \left(E_n\ O\ \ldots\ O\right)M_r^{-1}. \tag{1.11}$$

Пусть Q_Λ – матрица перестановок столбцов, такая, что

$$\Lambda_r\tilde{Q}_rQ_\Lambda = (\Lambda_r^{[1]}\ \Lambda_r^{[2]}). \tag{1.12}$$

Здесь и далее $\tilde{Q}_r = \operatorname{diag}\{Q,\ldots,Q\}$ имеет на главной диагонали r блоков равных Q; $\Lambda_r^{[1]}$ – матрица размера $n(r+1)\times\lambda$, состоящая из столбцов матрицы Λ_r, которые входят в разрешающий минор; $\Lambda_r^{[2]}$ – матрица размера $n(r+1)\times(nr-\lambda)$, состоящая из столбцов, которые не входят в упомянутый минор.

Тогда

$$M_r^{-1}\mathcal{D}_r\tilde{Q}_{r+2}\operatorname{diag}\{E_{2n}, Q_\Lambda\} = \left(\begin{array}{c|ccc||cc} J_1 & E_d & O & O & O & \Psi_1 \\ J_2 & O & E_{n-d} & O & O & \Psi_2 \\ \hline O & O & O & E_d & O & \Psi_3 \\ O & O & O & O & E_\lambda & \Psi_4 \end{array}\right), \tag{1.13}$$

где J_1 J_2, Ψ_i, $i=1,\ldots,4$, – некоторые матрицы соответствующих размеров. При этом $M_r^{-1}\Gamma_r\operatorname{diag}\{E_{n+d}, Q_\Lambda\}$ – матрица, расположенная в (1.13) правее одиночной вертикальной линии, матрица $M_r^{-1}\Lambda_r\tilde{Q}_rQ_\Lambda$ расположена в (1.13) справа от двойной черты.

Поскольку $\operatorname{rank}\Lambda_r = \lambda$, то и $\operatorname{rank}M_r^{-1}\Lambda_r\tilde{Q}_rQ_\Lambda = \lambda$. На этом основании можно заключить, что $\Psi_1 = O$, $\Psi_2 = O$, $\Psi_3 = O$. Таким образом, коэффициенты оператора $\mathcal{R}$, вычисленные по формуле (1.11), будут решением системы (1.10).

Л е м м а 2 [8]. Пусть в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор и справедливо равенство (1.6). Тогда оператор $\mathcal{R}$ обладает левым обратным оператором $\mathcal{L} = L_0 + L_1\dfrac{d}{dt}$.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор. Для того чтобы в матрице $\mathcal{D}_{r+1}$ нашлась обратимая подматрица M_{r+1} порядка $n(r+2)$, включающая в себя $n+\lambda$ столбцов матрицы Λ_{r+1} и все столбцы матрицы $(\mathcal{B}_{2,r+1}\ \mathcal{A}_{r+1})$ (см. (1.1), (1.3), (1.4)), необходимо и достаточно выполнения условия (1.6).

Доказательство вынесено в Приложение.

2. Возмущения, сохраняющие внутреннюю структуру системы. Пусть ДАУ (0.1) таковы, что в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор. Тогда, согласно леммам 1 и 2, существует оператор $\mathcal{R}$, который преобразует систему (0.1) к структурной форме (1.8), (1.9). Этот оператор имеет левый обратный оператор $\mathcal{L}$. Непосредственно из существования операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ вытекает эквивалентность в смысле решений систем (0.1) и (1.8), (1.9).

Для того чтобы иметь возможность проводить анализ устойчивости ДАУ (0.2) с использованием информации о структуре и свойствах системы (1.8), (1.9), введем следующее определение.

Определение 2. Будем говорить, что возмущения $\gamma\Delta_A$ и $\gamma\Delta_B$, подчиняющиеся ограничениям (0.3), сохраняют внутреннюю структуру ДАУ (0.1), если при каждом фиксированном выборе матриц Δ_A и Δ_B существует оператор

$$\tilde{\mathcal{R}} = \sum_{j=0}^{r} \tilde{R}_j \left(\frac{d}{dt}\right)^j, \tag{2.1}$$

такой, что его действие на систему (0.2) преобразует ее к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}x'(t) + \begin{pmatrix} U_1 & E_d \\ U_2 & O \end{pmatrix} Q^{-1}x(t) = 0, \tag{2.2}$$

где U_1 и U_2 – некоторые матрицы соответствующих размеров.

Найдем условия, при которых для системы (0.2) при каждом выборе возмущений Δ_A и Δ_B определен оператор $\tilde{\mathcal{R}}$.

Введем следующие обозначения:

$$\left(\Delta_{A_1}\Delta_{A_2}\right) = \Delta_A Q, \quad \left(\Delta_{B_1}\Delta_{B_2}\right) = \Delta_B Q, \tag{2.3}$$

$$\Delta_{\Lambda_r} = \gamma \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & \\ \Delta_A & O & \dots & O & O \\ \Delta_B & \Delta_A & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \Delta_B & \Delta_A \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где Q – матрица перестановок из (1.3); блоки Δ_{A_2}, Δ_{B_2} имеют размеры $n \times d$, так же как блоки A_2, B_2 в (1.3); Δ_{Λ_r} задает возмущение матрицы Λ_r (1.2).

Разобьем Δ_{Λ_r} на блоки, аналогично тому, как это было сделано с матрицей Λ_r (см. (1.12)):

$$\Delta_{\Lambda_r}\tilde{Q}_r Q_\Lambda = (\Delta_\Lambda^{[1]}, \Delta_\Lambda^{[2]}). \tag{2.5}$$

Определим квадратную матрицу порядка $n(r+1)$:

$$\Delta_{M_r} = \left(\begin{array}{c|cc||c} \gamma\Delta_{B_2} & \gamma\Delta_{A_1} & \gamma\Delta_{A_2} & \\ O & \gamma\Delta_{B_1} & \gamma\Delta_{B_2} & \\ O & O & O & \Delta_\Lambda^{[1]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ O & O & O & \end{array}\right), \tag{2.6}$$

которая задает возмущение матрицы M_r, ее определителем является разрешающий минор.

Обозначим

$$F = \left(G\ H\right), \tag{2.7}$$

где элементы матриц G и H задают масштабы изменения элементов матриц A_0 и B_0 (см. (0.3)).

Утверждение 3. Пусть имеет место неравенство

$$\gamma\|F\|_1 < \frac{1}{\|M_r^{-1}\|_1}, \tag{2.8}$$

где для любой $(n \times n)$-матрицы S с элементами s_{ij}

$$\|S\|_1 = \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|\right).$$

Тогда матрица $M_r + \Delta_{M_r}$ обратима при любых матрицах неопределенностей $\Delta_A = (\alpha_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\Delta_B = (\beta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, элементы которых удовлетворяют неравенствам (0.3).

В самом деле [17, с. 142], матрица $M_r + \Delta_{M_r}$ будет обратима, если имеет место оценка

$$\|\Delta_{M_r}\|_1 < \frac{1}{\|M_r^{-1}\|_1}. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что

$$\|\Delta_{M_r}\|_1 \le \gamma\|F\|_1. \tag{2.10}$$

Поэтому условие (2.8) гарантирует выполнение неравенства (2.9).

Теорема 1. Пусть в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор и выполняется условие (2.8). Для того чтобы при каждом фиксированном выборе возмущений Δ_A и Δ_B, удовлетворяющих условиям (0.3), существовал оператор (2.1), преобразующий ДАУ (0.2) к виду (2.2), необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\left(E_n \ O\right)(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = O, \tag{2.11}$$

где $\Delta_\Lambda^{[2]}$ и Δ_{M_r} определены в (2.5) и (2.6). При этом коэффициенты оператора (2.1) могут быть найдены по формуле

$$(\tilde{R}_0 \ \tilde{R}_1 \ \ldots \ \tilde{R}_r) = \left(E_n \ O\right)\left(M_r + \Delta_{M_r}\right)^{-1}. \tag{2.12}$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Поскольку в общем случае проверить равенство (2.11) не представляется возможным, найдем достаточные условия существования оператора $\tilde{\mathcal{R}}$.

Лемма 3. Пусть в матрице $\mathcal{D}_r$ имеется разрешающий минор и выполняется условие (2.8). И кроме того, при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B, подчиняющихся ограничениям (0.3),

$$\left(E_{n+d} \ O_\lambda\right) M_r^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = O \tag{2.13}$$

(индекс при нулевой матрице указывает на число ее столбцов), а матрица $M_r^{-1}\Delta_{M_r}$ обладает структурой

$$M_r^{-1}\Delta_{M_r} = \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

где размеры нулевого блока $(n+d)\times\lambda$; $*$ обозначает матрицу, явный вид которой несущественен. Тогда

$$\left(E_{n+d} \ O\right)(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = O. \tag{2.15}$$

Доказательство леммы вынесено в Приложение.

Замечание 2. Очевидно, что предположения леммы 3 обеспечивают выполнение условия (2.11) и, следовательно, гарантируют существование оператора $\tilde{\mathcal{R}}$, преобразующего ДАУ (0.2) к виду (2.2). С другой стороны, условие (2.15) выглядит избыточным. Тем не менее, именно ограничение вида (2.15) потребуется в дальнейшем для того, чтобы обосновать левую обратимость оператора (2.1) и, в конечном итоге, доказать эквивалентность в смысле решений систем (0.2) и (2.2).

Т е о р е м а 2. Пусть:

1) в матрице $\mathscr{D}_r$ имеется разрешающий минор;

2) справедливо равенство (1.6);

3) для всех матриц Δ_A и Δ_B, элементы которых подчиняются условиям (0.3), выполняются условия (2.13) и (2.14).

Если, кроме того,

$$\gamma\|F\|_1 < \frac{1}{\|M_{r+1}^{-1}\|_1}, \tag{2.16}$$

то при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B оператор (2.1), (2.12), преобразующий ДАУ (0.2) к виду (2.2), существует и имеет левый обратный оператор $\mathscr{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_1 \frac{d}{dt}$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

3. Достаточные условия робастной устойчивости ДАУ. В этом разделе в предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены достаточные условия робастной устойчивости ДАУ.

Опираясь на результаты теоремы 1 и леммы 3, можно дать корректное определение рассматриваемого интервального семейства. В системе (0.2) матрицы возмущений должны подчиняться оценкам (0.3) и удовлетворять равенству (2.11), другими словами, обеспечивать существование оператора (2.1), преобразующего ДАУ (0.2) к виду (2.2). В частности, условие (2.11) выполнено, если имеют место алгебраические связи (2.13) и (2.14). Поскольку основные результаты работы получены в рамках предположений (2.13), (2.14), то можно сформулировать следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3. В предположениях теоремы 1 под *интервальным семейством ДАУ* будем понимать систему (0.2), в которой матрицы возмущений Δ_A и Δ_B подчиняются оценкам (0.3) и удовлетворяют алгебраическим соотношениям (2.13) и (2.14).

О п р е д е л е н и е 4. *Решением* ДАУ (0.1) будем называть n-мерную вектор-функцию $x_*(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, обращающую систему (0.1) в тождество при подстановке.

При каждом выборе возмущений Δ_A и Δ_B из рассматриваемого интервального семейства решение системы (0.2) будем понимать в смысле определения 4.

З а м е ч а н и е 3. В предположениях леммы 2 системы (0.1) и (1.8), (1.9) имеют одно и то же множество решений и, следовательно, обладают одними и теми же свойствами устойчивости. Пусть дифференциальная подсистема ДАУ (1.8), (1.9)

$$x_1'(t) + J_2 x_1(t) = 0 \tag{3.1}$$

асимптотически устойчива, т.е. любое решение $x_1(t)$ этой системы обладает свойством $\|x_1(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$. В свою очередь любое решение алгебраической подсистемы ДАУ (1.8) находится по формуле $x_2(t) = -J_1 x_1(t)$ и, следовательно, $\|x_2(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому будем называть систему (1.8), (1.9) и ДАУ (0.1) *асимптотически устойчивыми*, если этим свойством обладает система (3.1).

З а м е ч а н и е 4. В предположениях теоремы 2 можно провести аналогичные рассуждения в отношении систем (0.2) и (2.2) при каждом выборе возмущений Δ_A и Δ_B из рассматриваемого интервального семейства. Так что будем называть интервальные семейства (0.2) и (2.2) *асимптотически устойчивыми*, если этим же свойством обладает каждая система из интервального семейства

$$x_1'(t) + U_2 x_1(t) = 0. \tag{3.2}$$

В условиях теоремы 2 при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B для ДАУ (0.2) определен оператор $\tilde{R}$ (2.1), который преобразует (0.2) к виду (2.2). Коэффициенты этого оператора вычисляются по формуле (2.12). По построению в (2.2)

$$U_2 = (O_d \;\; E_{n-d})\tilde{R}_0\left(B_1 + \gamma\Delta_{B_1}\right),$$

матрицы B_1 и Δ_{B_1} определены в (1.3) и (2.3) соответственно.

С учетом (2.12) можно получить представление

$$U_2 = J_2 + \Delta_{U_2}, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_{U_2} = (O_d E_{n-d} O_{nr})((M_r + \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1})\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} + \gamma(O_d E_{n-d} O_{nr})(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\begin{pmatrix} \Delta_{B_1} \\ O \end{pmatrix},$$
$$J_2 = (O_d \;\; E_{n-d}) R_0 B_1 \tag{3.4}$$

— матричный коэффициент из (1.9), R_0 — первый коэффициент оператора (1.7).

О п р е д е л е н и е 5. В условиях теоремы 2 будем говорить, что интервальное семейство (0.2) *робастно устойчиво*, если каждая система из интервального семейства (3.2)—(3.4) асимптотически устойчива.

Определим величины

$$\nu(J_2) = \inf_{\omega} \xi_1(j\omega E_{n-d} + J_2),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, ω — вещественный параметр, ξ_1 — наименьшее сингулярное число матрицы $j\omega E_{n-d} + J_2$, и

$$\mu(J_2) = \inf_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \xi_{2(n-d)-1} K(\omega, \alpha),$$

где $\xi_{2(n-d)-1}$ — второе справа из упорядоченных по возрастанию сингулярных чисел матрицы

$$K(\omega, \alpha) = \begin{pmatrix} W(\omega) & -\alpha V(\omega) \\ \alpha^{-1} V(\omega) & -W(\omega) \end{pmatrix},$$

$$W(\omega) = \mathrm{Re}(j\omega E_{n-d} + J_2)^{-1}, \quad V(\omega) = \mathrm{Im}(j\omega E_{n-d} + J_2)^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы J_2 имеют положительные вещественные части, т.е.

$$\min_{1 \le i \le n-d} \mathrm{Re}\,\eta_i(J_2) > 0. \tag{3.5}$$

Известно [18, с. 201—203], что в этом случае семейство ДАУ (3.2), (3.3) будет асимптотически устойчиво, если

$$\|\Delta_{U_2}\|_2 \le \nu(J_2) \tag{3.6}$$

или

$$\|\Delta_{U_2}\|_2 \le \mu(J_2). \tag{3.7}$$

Заметим, что несмотря на то, что $\mu(J_2) \ge \nu(J_2)$, условие (3.6) значительно проще для проверки, чем условие (3.7). Здесь и далее $\|S\|_2$ — спектральная норма матрицы:

$$\|S\|_2 = \max_i \sqrt{\eta_i(S^* S)},$$

S^* — сопряженная матрица.

Матрицу H, определяющую масштаб изменения элементов матрицы B_0 (см. (0.3)), разобьем на блоки аналогично тому, как это было сделано в отношении матрицы B (см. (1.3)):

$$\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} = HQ, \tag{3.8}$$

где блок H_1 имеет размер $n \times (n-d)$.

Определим величину

$$\theta = \|M_r^{-1}\|_1 \|F\|_1 \|B_1\|_1 + \|H_1\|_1, \tag{3.9}$$

где F находится по формуле (2.7).

В соответствии с замечанием 4 интервальное семейство (2.2) будет асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда этим же свойством обладает семейство (3.2).

Перейдем к получению условий робастной устойчивости.

При доказательстве теоремы 2 показано, что предположение (2.16) влечет за собой оценку (2.9). В этом случае [17, с. 142]

$$\|(M_r + \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1}\|_1 \le \frac{\|M_r^{-1}\|_1^2 \|\Delta_{M_r}\|_1}{1 - \|\Delta_{M_r}\|_1 \|M_r^{-1}\|_1}, \tag{3.10}$$

$$\|(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\|_1 \le \frac{\|M_r^{-1}\|_1}{1 - \|\Delta_{M_r}\|_1 \|M_r^{-1}\|_1}. \tag{3.11}$$

Из представления (3.4) и оценок (3.10) и (3.11) получим

$$\|\Delta_{U_2}\|_1 \le \frac{\|M_r^{-1}\|_1}{1 - \|\Delta_{M_r}\|_1 \|M_r^{-1}\|_1} (\|M_r^{-1}\|_1 \|\Delta_{M_r}\|_1 \|B_1\|_1 + \gamma \|\Delta_{B_1}\|_1).$$

Это неравенство можно усилить, воспользовавшись тем, что $\|\Delta_{B_1}\|_1 \le \gamma \|H_1\|_1$, условием (2.10) и обозначением (3.9):

$$\|\Delta_{U_2}\|_1 \le \frac{\gamma \|M_r^{-1}\|_1 \theta}{1 - \gamma \|F\|_1 \|M_r^{-1}\|_1}. \tag{3.12}$$

Заметим, что в силу (2.8)

$$1 - \gamma \|F\|_1 \|M_r^{-1}\|_1 > 0. \tag{3.13}$$

С учетом известного соотношения между нормами $\|\Delta_{U_2}\|_2 \le \sqrt{n-d}\,\|\Delta_{U_2}\|_1$ условие (3.6) будет выполнено, если

$$\frac{\gamma \sqrt{n-d}\,\|M_r^{-1}\|_1 \theta}{1 - \gamma \|F\|_1 \|M_r^{-1}\|_1} \le \nu(J_2).$$

Из последнего неравенства получаем оценку

$$\gamma \le \frac{\nu(J_2)}{\|M_r^{-1}\|_1 (\sqrt{n-d}\,\theta + \|F\|_1 \nu(J_2))}. \tag{3.14}$$

Таким образом, имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены все предположения теоремы 2, а также условия (3.5) и (3.14). Тогда система ДАУ (0.2) будет робастно устойчива.

З а м е ч а н и е 5. В условии (3.14) величину $\nu(J_2)$ можно заменить на $\mu(J_2)$. Возрастет или уменьшится выражение, стоящее в правой части неравенства (3.14), в общем случае установить невозможно.

4. Робастная устойчивость с использованием свойства сверхустойчивости номинальных ДАУ. В данном разделе с использованием свойства сверхустойчивости системы (0.1) получены достаточные условия робастной устойчивости интервальных ДАУ (0.2).

В работах [19, 20] обоснованы оценки радиуса сверхустойчивости для систем с интервальными коэффициентами, разрешенных относительно производной. К сожалению, получить такой же изящный результат для интервальных ДАУ невозможно, поскольку построение для системы (0.2) структурной формы (2.2), эквивалентной ей в смысле решений, связано с обращением интервальной матрицы.

Для матрицы $J_2 = (\zeta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$ из (3.1) определим величину

$$\sigma(J_2) = \min_{1 \le i \le n-d} \left(\zeta_{i,i} - \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n-d} |\zeta_{i,j}| \right).$$

Система (3.1) называется *сверхустойчивой* [18, с. 199], если

$$\sigma(J_2) > 0. \tag{4.1}$$

Если система сверхустойчива, то она будет асимптотически устойчива.

Нетрудно показать, что в предположениях леммы 2 система (0.1) будет асимптотически устойчива, если сверхустойчива система (3.1), т.е. если имеет место неравенство (4.1).

Как отмечалось выше, в условиях теоремы 2 интервальные семейства (0.2) и (2.2) обладают одними и теми же свойствами устойчивости. Легко видеть, что ДАУ (0.2) будут асимптотически устойчивы, если сверхустойчива интервальная система (3.2). Последнее имеет место в случае, когда для всех матриц из анализируемого интервального семейства справедливо неравенство

$$\sigma(U_2) > 0. \tag{4.2}$$

Найдем достаточные условия выполнения оценки (4.2). Для этого воспользуемся представлением (3.3), где $\Delta_{U_2} = (\delta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$ – интервальная матрица. Тогда

$$\sigma(U_2) = \sigma\left(J_2 + \Delta_{U_2}\right) = \min_{1\le i\le n-d}\left(\zeta_{i,i} + \delta_{i,i} - \sum_{j=1,j\ne i}^{n-d}|\zeta_{i,j} + \delta_{i,j}|\right).$$

Рассмотрим сумму

$$\zeta_{i,i} + \delta_{i,i} - \sum_{j=1,j\ne i}^{n-d}|\zeta_{i,j} + \delta_{i,j}| \ge \sigma(J_2) + \delta_{i,i} - \sum_{j=1,j\ne i}^{n-d}|\delta_{i,j}| =$$
$$= \sigma(J_2) + \delta_{i,i} + |\delta_{i,i}| - \sum_{j=1}^{n-d}|\delta_{i,j}| \ge \sigma(J_2) + \delta_{i,i} + |\delta_{i,i}| - \|\Delta_{U_2}\|_1.$$

По построению нулевая матрица принадлежит интервальному семейству Δ_{U_2}, поэтому минимальное значение $\delta_{i,i} + |\delta_{i,i}|$ по всем $i = \overline{1, n-d}$ и по всем матрицам из представленного интервального семейства равно нулю. Используя этот факт и неравенство (3.12), получим

$$\sigma(U_2) \ge \sigma(J_2) - \frac{\gamma\|M_r^{-1}\|_1\theta}{1 - \gamma\|F\|_1\|M_r^{-1}\|_1}.$$

Очевидно, что интервальное семейство ДАУ (3.2) будет сверхустойчиво, если

$$\sigma(J_2) - \frac{\gamma\|M_r^{-1}\|_1\theta}{1 - \gamma\|F\|_1\|M_r^{-1}\|_1} > 0$$

или с учетом (3.13)

$$\gamma < \frac{\sigma(J_2)}{\|M_r^{-1}\|_1\left(\theta + \|F\|_1\sigma(J_2)\right)}. \tag{4.3}$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены все предположения теоремы 2 и условие (4.1). Интервальное семейство ДАУ (0.2) будет робастно устойчиво, если выполняется неравенство (4.3).

5. Иллюстрирующий пример. Для простоты рассмотрим систему индекса 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0. \tag{5.1}$$

Начнем с предположений теоремы 2. В матрице

$$\mathcal{D}_1 = \left(\begin{array}{cc|c|ccc||c|cc} 4 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2 & 0 & & & \\ 8 & 0 & 1 & 6 & 2 & -2 & & & \\ \hline & & & 4 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 8 & 0 & 1 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

пунктирной линией выделены столбцы матрицы M_1, определителем которой является разрешающий минор. При этом $r = 1$, $d = 1$, $Q = E_3$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{rank}\Lambda_1 = \lambda = 2$. Используя явный вид матрицы Λ_2, нетрудно вычислить $\mathrm{rank}\Lambda_2 = 5$. Следовательно, условие (1.6) выполнено.

Оператор

$$\mathcal{R} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -12 & -6 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ -18 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}$$

преобразует систему (5.1) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0,$$

так что

$$J_2 = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$M_1^{-1} = \frac{1}{24}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -12 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ -18 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -12 & -6 & 6 \\ 18 & -3 & -9 & -18 & 3 & 9 \\ 50 & -3 & -9 & -40 & -8 & 8 \end{array}\right),$$

то условие (2.13) приобретает форму $-2\alpha_{1,1} - \alpha_{2,1} + \alpha_{3,1} = 0$, откуда следует

$$\alpha_{3,1} = 2\alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} \quad \forall \alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}\colon |\alpha_{1,1}| \le g_{1,1}, \quad |\alpha_{2,1}| \le g_{2,1} \tag{5.2}$$

и

$$g_{3,1} = 2g_{1,1} + g_{2,1}. \tag{5.3}$$

В свою очередь (2.14) означает, что

$$\alpha_{3,k} = 2\alpha_{1,k} + \alpha_{2,k} \quad \forall \alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}\colon |\alpha_{1,k}| \le g_{1,k}, \quad |\alpha_{2,k}| \le g_{2,k} \tag{5.4}$$

и

$$g_{3,k} = 2g_{1,k} + g_{2,k}, \quad k = \{2, 3\}. \tag{5.5}$$

Условия (5.2) и (5.4) задают структуру матрицы Δ_A:

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 2\alpha_{1,1}+\alpha_{2,1} & 2\alpha_{1,2}+\alpha_{2,2} & 2\alpha_{1,3}+\alpha_{2,3} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

а равенства (5.3) и (5.5) определяют вид матрицы G:

$$G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ 2g_{1,1}+g_{2,1} & 2g_{1,2}+g_{2,2} & 2g_{1,3}+g_{2,3} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Пусть для простоты элементы матриц G и H, определяющих масштабы изменения элементов матриц A_0 и B_0, $g_{i,j} = g = \mathrm{const}$ $(i = \{1,2\}, j = \{1,2,3\})$ $h_{i,j} = h = \mathrm{const}$ $(i, j = \{1,2,3\})$. Тогда (см. (2.7) и (3.8)) $\|F\|_1 = 9g + 3h$, $\|H_1\|_1 = 2h$.

Матрицу M_2^{-1} по причине громоздкости выписывать не будем, но найдем

$$\|M_2^{-1}\|_1 = \frac{401}{36},$$

и оценка (2.16) принимает вид

$$\gamma < \frac{12}{401(3g + h)}. \tag{5.8}$$

В частности, $\gamma < 0.059$ при $g = h = 0.5$.

Таким образом, для того чтобы возмущения системы (0.2) сохраняли структуру ДАУ (0.1) (другими словами, чтобы существовал оператор (2.1), преобразующий (0.2) в семейство (2.2), имеющее то же множество решений, что и система (0.2)), требуется, чтобы матрицы Δ_A и G имели вид (5.6), (5.7), а размах неопределенностей удовлетворял неравенству (5.8).

Обратимся к условиям робастной устойчивости.

Легко видеть, что предположение (3.5) теоремы 3 имеет место. С учетом того, что $\|B_1\|_1 = 8$, $\|M_1^{-1}\|_1 = \dfrac{59}{12}$, в сделанных допущениях в соответствии с (3.9)

$$\theta = 354g + 120h.$$

Несложно вычислить $\nu(J_2) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, поэтому условие (3.14) можно записать как

$$\gamma \le \frac{4}{59(180g + 61h)}. \tag{5.9}$$

Итак, в условиях сохранения структуры по теореме 3 каждая система из семейства (0.2) будет асимптотически устойчива, если размах неопределенностей удовлетворяет условию (5.9). В частности, $\gamma \le 0.00056$ при $g = h = 0.5$. Если же возмущения матрицы A_0 отсутствуют ($g = 0$), то $\gamma \le 0.002$.

Рассмотрим предположения (4.1) и (4.3) теоремы 4. Очевидно, что $\sigma(J_2) = 1 > 0$, т.е. (4.1) имеет место. Оценка (4.3) в данном случае приобретает форму

$$\gamma < \frac{4}{59(121g + 41h)}. \tag{5.10}$$

В соответствии с утверждением теоремы 4 в том случае, если возмущения не нарушают структуру рассматриваемой системы, для асимптотической устойчивости семейства ДАУ (0.2) необходимо выполнение условия (5.10). В частности, $\gamma < 0.0008$ при $g = h = 0.5$. В случае, когда $g = 0$, $\gamma \le 0.003$.

Заключение. В работе получены достаточные условия, при которых интервальное семейство ДАУ имеет ту же структуру общего решения, что и номинальная система. Для интервальных ДАУ построена структурная форма, имеющая то же множество решений, что и исходное семейство. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, найдены условия робастной устойчивости для ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности, у которых неопределенность присутствует не только в матрице при $x(t)$, но и в матрице при производной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. По построению матрица $\mathcal{D}_{r+1}$ имеет вид

$$\mathcal{D}_{r+1} = \left(\begin{array}{c|c||cc} \mathcal{B}_r & \mathcal{A}_r & \Lambda_r & O \\ \hline O & O & (O \ \ldots \ O \ B_0) & A_0 \end{array}\right).$$

Умножим $\mathcal{D}_{r+1}$ слева на

$$\begin{pmatrix} M_r^{-1} & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

и справа на матрицу перестановок $\operatorname{diag}\{\tilde{Q}_{r+2}, E_n\} \times \operatorname{diag}\{E_{2n}, Q_\Lambda, E_n\}$. С учетом того, что $\operatorname{rank}\Lambda_r = \lambda$, в результате получим матрицу вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc||ccc} J_1 & E_d & O & O & O & O & O \\ J_2 & O & E_{n-d} & O & O & O & O \\ O & O & O & E_d & O & O & O \\ O & O & O & O & E_\lambda & F_1 & O \\ \hline O & O & O & O & F_2 & F_3 & A_0 \end{array}\right), \tag{П.1}$$

где F_1, F_2, F_3 – некоторые матрицы соответствующих размеров.

Последующее умножение слева на

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O \\ O & E_\lambda & O \\ O & -F_2 & E_n \end{pmatrix}$$

позволяет заметить, что

$$\operatorname{rank}\Lambda_{r+1} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} E_\lambda & F_1 & O \\ O & F_3 - F_2F_1 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть выполнено условие (1.6). Тогда матрица $(F_3 - F_2F_1A_0)$ должна быть полного ранга по строкам, вследствие чего в ней найдется обратимая подматрица F порядка n. Таким образом, матрица M_{r+1}, фигурирующая в формулировке утверждения, существует и включает в себя все столбцы матрицы $\mathcal{D}_{r+1}$, соответствующие столбцам матрицы (П.1), в которых расположены единичные матрицы и матрица F.

Обратно. Пусть в $\mathcal{D}_{r+1}$ имеется обратимая подматрица M_{r+1} порядка $n(r+2)$ из формулировки утверждения. Тогда $\operatorname{rank}(F_3 - F_2F_1A_0) = n$. Отсюда очевидным образом вытекает условие (1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Из определения 2 следует, что оператор $\tilde{\mathcal{R}}$ существует тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \tilde{R}_0 & \tilde{R}_1 & \ldots & \tilde{R}_r \end{pmatrix}(\Gamma_r + \Delta_r) = \begin{pmatrix} E_n & O \end{pmatrix} \tag{П.2}$$

разрешима относительно коэффициентов $\tilde{R}_0, \ldots, \tilde{R}_r$. В (П.2)

$$\Delta_r = \gamma\left(\begin{array}{c|cc||ccccc} \Delta_{B_2} & \Delta_{A_1} & \Delta_{A_2} & O & O & \ldots & O & O \\ O & \Delta_{B_1} & \Delta_{B_2} & \Delta_{A_1} & \Delta_{A_2} & \ldots & O & O \\ O & O & O & \Delta_{B_1} & \Delta_{B_2} & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & O & \ldots & \Delta_{A_1} & \Delta_{A_2} \end{array}\right).$$

По теореме Кронекера–Капелли необходимым и достаточным условием разрешимости системы (П.2) является равенство

$$\operatorname{rank}(\Gamma_r + \Delta_r) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Gamma_r + \Delta_r \\ (E_n O) \end{pmatrix}. \tag{П.3}$$

Согласно утверждению 3, предположение (2.8) гарантирует обратимость матрицы $M_r + \Delta_{M_r}$, которая по построению является подматрицей для $\Gamma_r + \Delta_r$. Поскольку порядок $M_r + \Delta_{M_r}$ совпадает с числом строк матрицы $\Gamma_r + \Delta_r$, то

$$\operatorname{rank}(\Gamma_r + \Delta_r) = n + d + \lambda = n(r+1).$$

С другой стороны, умножив матрицу, стоящую в (П.3) справа от знака равенства, на матрицы

$$\begin{pmatrix} (M_r + \Delta_{M_r})^{-1} & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

и $\mathrm{diag}\{E_{n+d}, Q_\Lambda\}$ слева и справа соответственно, получим

$$\left(\begin{array}{cc|cc} E_n & O & O & W_1 \\ O & E_d & O & W_2 \\ O & O & E_\lambda & W_3 \\ \hline E_n & O & O & O \end{array}\right)$$

(о матрице перестановок Q_Λ упоминалось в (1.12) и (2.5)). Поэтому

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \Gamma_r + \Delta_r \\ (E_n O) \end{pmatrix} = n + d + \lambda + \mathrm{rank}\, W_1.$$

Очевидно, что (П.3) справедливо тогда и только тогда, когда

$$W_1 = O. \tag{П.4}$$

По построению $W_1 = (E_n O)(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]}$, следовательно, (П.4) суть условие (2.11).

Если искать коэффициенты оператора $\tilde{\mathcal{R}}$ в виде (2.12), то в общем случае они не будут удовлетворять уравнению (П.2), поскольку может не выполниться равенство

$$(\tilde{R}_0\ \tilde{R}_1 \ldots \tilde{R}_r)\Delta_\Lambda^{[2]} = O. \tag{П.5}$$

Тем не менее, с учетом (2.12) условие (П.5) будет иметь место в силу предположения (2.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. В сделанных предположениях матрица $M_r + \Delta_{M_r}$ обратима и [21, с. 205]

$$(M_r + \Delta_{M_r})^{-1} = M_r^{-1}\left(E_n + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(\Delta_{M_r}M_r^{-1})^i\right). \tag{П.6}$$

Отсюда

$$(E_{n+d}O)(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = (E_{n+d}O)\,M_r^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} + (E_{n+d}O)\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(M_r^{-1}\Delta_{M_r})^i\right)M_r^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]}. \tag{П.7}$$

Условие (2.13) обеспечивает равенство нулю первого слагаемого в правой части равенства (П.7). Так что утверждение леммы будет верно, если

$$(E_{n+d}O)\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(M_r^{-1}\Delta_{M_r})^i\right)M_r^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = O. \tag{П.8}$$

Рассмотрим матрицу

$$M_r^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \tag{П.9}$$

где V_1 и V_2 – некоторые матрицы, состоящие из $n + d$ и λ строк соответственно. В силу (2.13) $V_1 = O$.

В свою очередь представление (2.14) гарантирует, что матрицы $(M_r^{-1}\Delta_{M_r})^i$ будут иметь такую же структуру для любого $i = \overline{1, \infty}$. С учетом (П.9) легко видеть, что условие (П.8) будет выполнено.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Сначала покажем, что предположение (2.16) влечет за собой оценку (2.8).

Согласно утверждению 2, в матрице $\mathcal{D}_{r+1}$ содержится обратимая подматрица M_{r+1} порядка $n(r + 2)$, включающая в себя $\lambda + n$ столбцов матрицы Λ_{r+1}, причем $\mathrm{rank}\Lambda_{r+1} = \lambda + n$. Доказательство утверждения 2 можно рассматривать как изложение способа построения матрицы M_{r+1}^{-1}, при этом

$$M_{r+1}^{-1} = \begin{pmatrix} M_r^{-1} & O \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix},$$

где P_1, P_2 – некоторые матрицы соответствующих размеров. Поэтому $\|M_{r+1}^{-1}\|_1 \geq \|M_r^{-1}\|_1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\|M_{r+1}^{-1}\|_1} \leq \frac{1}{\|M_r^{-1}\|_1}.$$

Таким образом, неравенство (2.16) гарантирует оценку (2.8).

В соответствии с леммой 3 в сделанных предположениях имеет место равенство (2.11). Поэтому на основании теоремы 1 можно заключить, что оператор (2.1), преобразующий ДАУ (0.2) к виду (2.2), существует и его коэффициенты находятся по формуле (2.12).

Покажем, что это оператор обладает левым обратным оператором при любых матрицах Δ_A и Δ_B, элементы которых подчиняются условиям (0.3).

По лемме 2 левый обратный для оператора $\tilde{\mathcal{R}}$ существует, если имеет место равенство

$$\operatorname{rank}(\Lambda_{r+1} + \Delta_{\Lambda_{r+1}}) = \operatorname{rank}(\Lambda_r + \Delta_{\Lambda_r}) + n, \tag{П.10}$$

где $\Delta_{\Lambda_{r+1}}$ и Δ_{Λ_r} строятся по правилу (2.4).

Рассмотрим матрицу $\Lambda_r + \Delta_{\Lambda_r}$. Умножив ее слева и справа соответственно на матрицы $(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}$ и $\tilde{Q}_r Q_\Lambda$, с учетом представлений (1.12) и (2.5) получим

$$\left(M_r + \Delta_{M_r}\right)^{-1}(\Lambda_r^{[1]} + \Delta_\Lambda^{[1]};\ \Lambda_r^{[2]} + \Delta_\Lambda^{[2]}) = \begin{pmatrix} O & \hat{V}_1 \\ E_\lambda & \hat{V}_2 \end{pmatrix}, \tag{П.11}$$

где $\operatorname{colon}(\hat{V}_1, \hat{V}_2) = \left(M_r + \Delta_{M_r}\right)^{-1}(\Lambda_r^{[2]} + \Delta_\Lambda^{[2]})$, матрицы $\hat{V}_1$ и $\hat{V}_2$ состоят из $n + d$ и λ строк соответственно. Обозначим

$$\left(M_r + \Delta_{M_r}\right)^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} = \operatorname{colon}\left(\hat{W}_1, \hat{W}_2\right),$$

где $\hat{W}_i$ – некоторые матрицы, имеющие соответственно те же размеры, что и матрицы $\hat{V}_i$. В силу (2.15) $\hat{W}_1 = O$.

Принимая во внимание (П.6), рассмотрим произведение

$$\left(M_r + \Delta_{M_r}\right)^{-1}\Lambda_r^{[2]} = M_r\Lambda_r^{[2]} + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i (M_r^{-1}\Delta_{M_r})^i M_r^{-1}\Lambda_r^{[2]}. \tag{П.12}$$

Поскольку $\operatorname{rank}\Lambda_r = \lambda$, то по построению

$$M_r^{-1}\Lambda_r^{[2]} = \begin{pmatrix} O \\ * \end{pmatrix},$$

где нулевой блок состоит из $n + d$ строк. Предположение (2.14) гарантирует, что

$$(M_r^{-1}\Delta_{M_r})^i = \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix} \quad \forall i = \overline{1,\infty}$$

с нулевым блоком размера $(n + d) \times \lambda$. Следовательно, первые $n + d$ строк матрицы (П.12) будут нулевыми. Таким образом, в (П.11) $\hat{V}_1 = O$ и $\operatorname{rank}(\Lambda_r + \Delta_{\Lambda_r}) = \lambda$.

Рассмотрим матрицу

$$\Lambda_{r+1} + \Delta_{\Lambda_{r+1}} = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda_r + \Delta_{\Lambda_r} & O \\ \hline (O\ \ B_0 + \gamma\Delta_B) & A_0 + \gamma\Delta_A \end{array}\right). \tag{П.13}$$

Умножив (П.13) слева и справа соответственно на матрицы

$$\begin{pmatrix} (M_r + \Delta_{M_r})^{-1} & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \tilde{Q}_r Q_\Lambda & O \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

получим

$$\left(\begin{array}{cc|c} O & O & O \\ E_\lambda & \hat{V}_2 & O \\ \hline \hat{F}_1 & \hat{F}_2 & \hat{F}_3 \end{array}\right),$$

где $\hat{F}_i$ – некоторые матрицы, явный вид которых неважен. Последующее умножение слева на

$$\left(\begin{array}{cc|c} E_{n+d} & O & O \\ O & E_\lambda & O \\ \hline O & -\hat{F}_1 & E_n \end{array}\right)$$

дает матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} O & O & O \\ E_\lambda & \hat{V}_2 & O \\ \hline O & \hat{F}_2 - \hat{F}_1\hat{V}_2 & \hat{F}_3 \end{array}\right).$$

В соответствии с утверждением 2 матрица M_{r+1} включает в себя $\lambda + n$ столбцов матрицы Λ_{r+1}. В свою очередь, согласно утверждению 3, условие (2.16) обеспечивает обратимость матрицы $M_{r+1} + \Delta_{M_{r+1}}$. Поэтому должно выполниться равенство

$$\operatorname{rank}(\hat{F}_2 - \hat{F}_1\hat{V}_2\hat{F}_3) = n.$$

Следовательно, $\operatorname{rank}(\Lambda_{r+1} + \Delta_{\Lambda_{r+1}}) = \lambda + n$.

Из всего вышесказанного вытекает справедливость условия (П.10), которое обеспечивает левостороннюю обратимость оператора $\tilde{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
2. *Серов Е.П., Корольков Б.П.* Динамика парогенератора. М.: Энергоиздат, 1981.
3. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988.
4. *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.
5. *Byers R., Nichols N.K.* On the Stability Radius of a Generalized State-space System // Linear Algebra Appl. 1993. № 188–189. P. 113–134.
6. *Du N.H.* Stability Radii of Differential-algebraic Equations with Structured Perturbations // Syst. Control Lett. 2008. № 57. P. 546–553.
7. *Du N.H., Thuan D.D., Liem N.C.* Stability Radius of Implicit Dynamic Equations with Constant Coefficients on Time Scales // Syst. Control Lett. 2011. № 60. P. 596–603.
8. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // АиТ. 2017. № 5. С. 36–55.
9. *Fang C.-H., Chang F.-R.* Analysis of Stability Robustness for Generalized State-space Systems with Structured Perturbations // Systems Control Lett. 1993. № 21. P. 109–114.
10. *Lee L., Fang C.-H., Hsieh J.-G.* Exact Uninderectional Perturbation Bounds for Robustness of Uncertain Generalized State-space Systems: Continuous-time Cases // Automatica. 1997. № 33. P. 1923–1927.
11. *Qiu L., Davisov E.J.* The Stability Robustness of Generalized Eigenvalues // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. № 37. P. 886–891.
12. *Du N.H., Linh V.H.* Stability Radii for Linear Time-varying Differential-algebraic Equations with Respect to Dynamics Perturbations // J. Differ. Equat. 2006. № 230. P. 579–599.

13. *Chyan C.J., Du N.H., Linh V.H.* On Data-dependence of Exponential Stability and the Stability Radii for Linear Time-varying Differential-algebraic Systems // J. Differ. Equat. 2008. № 245. P. 2078–2102.
14. *Lin Ch., Lam J., Wang J., Yang G.-H.* Analysis on Robust Stability for Interval Descriptor Systems // System & Control Letters. 2001. № 42. P. 267–278.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
16. *Щеглова А.А.* Преобразование линейной алгебро-дифференциальной системы к эквивалентной форме // Тр. IX Междунар. Четаевской конф. “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”. Иркутск, 2007. Т. 5. С. 298–307.
17. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
18. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления I // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.
20. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления II // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.
21. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.