

## АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИ ОПАСНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ СЕТИ СВЯЗИ. II. ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

© 2020 г. Ю. Е. Малащенко<sup>а</sup>, И. А. Назарова<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2020 г.

После доработки 17.06.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

В рамках вычислительных экспериментов на модели многопользовательской сети связи и управления изучаются изменения работоспособности системы при разрушающих воздействиях. Вектор максимальных потоков, которые можно передавать независимо между всеми вершинами, используется для многокритериальной оценки функциональных возможностей системы. Рассматривается множество повреждений различных типов, состоящее из специально подобранных вершинных и минимальных разрезов, при удалении которых максимально-возможный поток оказывается равен нулю хотя бы для одной пары источник–приемник. Для оценки последствий и влияния на качество связи конкретного разрушающего воздействия для каждой пары узлов–корреспондентов формируется характеристический вектор предельно-допустимых потоков. Вычислительные эксперименты проводятся для всех повреждений из заданного множества и позволяют определить представительный набор характеристических векторов. Для получения гарантированных оценок производится покомпонентный анализ, сортировка и сравнение по нескольким критериям всех показателей функционирования. Строятся итоговые диаграммы, отражающие изменения исходных функциональных характеристик для заданного набора целенаправленных разрушающих воздействий. Агрегированные оценки и показатели позволяют проводить сравнение уязвимости и живучести сетевых систем с различными структурными особенностями.

DOI: 10.31857/S0002338820060098

**Введение.** Данная работа продолжает исследования, начатые в [1]. Здесь излагались результаты вычислительных экспериментов, анализирующие последствия целенаправленных разрушающих воздействий на функционирование сети связи. Для оценки ущерба каждого повреждения определялось как общее число разъединенных пар–корреспондентов, так и все направления связи, пропускная способность которых оказывалась меньше заданного нормативного значения. Расчеты по указанным критериям позволили найти представительные векторные оценки наиболее опасных разрушающих воздействий, а также построить соответствующие многопараметрические диаграммы.

В настоящей работе основное внимание уделено получению гарантированных оценок [2] уязвимости сети. В качестве основной функциональной характеристики изучается вектор предельно-допустимых потоков между всеми парами узлов при разрушении ребер. Исследуется множество повреждений, при которых хотя бы для одной пары источник–приемник предельно возможный поток оказывается равен нулю [3]. При анализе каждого конкретного повреждения вычисляются максимальные потоки для всех пар вершин источник–приемник. Полученные значения располагаются по невозрастанию, перенумеровываются и формируется вектор упорядоченных максимальных потоков всех пар–корреспондентов при данном повреждении. Оценка последствий конкретного разрушения производится по векторному критерию: число разъединенных пар источник–приемник и уменьшение максимально-допустимых потоков между корреспондентами. Для определения гарантированных оценок векторы максимальных потоков сравниваются по указанным критериям. По результатам вычислительных экспериментов находятся гарантированные оценки и строится результирующая диаграмма, отражающая изменения функциональных характеристик при повреждениях из заданного множества.

Получение гарантированных оценок ущерба и потерь для пар-корреспондентов можно рассматривать как способ исследования уязвимости [4] сетей связи. При любом повреждении нижние оценки допустимых потоков можно считать показателем неуязвимости и устойчивости системы к разрушающим воздействиям. Вычислительные эксперименты проводились для сетей с различными структурными особенностями. Сформированы соответствующие характеристические диаграммы, позволяющие сравнивать уязвимость и возможный ущерб.

**1. Математическая модель.** Для описания многопользовательской сетевой системы используется математическая запись модели передачи многопродуктового потока [5]. Структура сети  $G(d)$  задается множествами  $\langle V, R, U \rangle$ : узлы (вершины) сети  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$ ; неориентированных ребер  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\} \subset V \times V$ . Ребро  $r_k = (v_{n_k}, v_{j_k})$  соединяет вершины  $v_{n_k}, v_{j_k}$  (инцидентно вершинам  $v_{n_k}, v_{j_k}$ ), которые для него являются концевыми. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра. Ребру  $r_k$  ставятся в соответствие две ориентированные дуги  $u_k, u_{k+E}$  прямого и обратного направления из множества ориентированных дуг  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$ . Дуги  $\{u_k, u_{k+E}\}$  определяют направление передачи потока по ребру  $r_k$  между концевыми вершинами  $v_{n_k}, v_{j_k}$ . Обозначим через  $S(v_n)$  множество номеров исходящих дуг, по которым поток покидает узел  $v_n$ ;  $T(v_n)$  – множество номеров входящих дуг, по которым поток поступает в узел  $v_n$ .

Состав множеств  $S(v_n), T(v_n)$  однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро  $r_k \in R$  соединяет вершины с номерами  $n$  и  $j$ , такими, что  $n < j$ , тогда ориентированная дуга  $u_k = (v_n, v_j)$  считается *исходящей* из вершины  $v_n$  и ее номер  $k$  заносится в множество  $S(v_n)$ , а ориентированная дуга  $u_{k+E} = (v_j, v_n)$  – *входящей* для  $v_n$  и ее номер  $k + E$  помещается в список  $T(v_n)$ . Соответственно дуга  $u_k$  является *входящей* для  $v_j$  и ее номер  $k$  попадает в  $T(v_j)$ , а дуга  $u_{k+E}$  – *исходящей* и номер  $k + E$  вносится в список исходящих дуг  $S(v_j)$ .

Предполагается, что в сети между любой парой узлов могут передаваться потоки различных видов. Пара узлов корреспондентов  $p_m$  определяется упорядоченными вершинами  $(v_{s_m}, v_{t_m})$ , где вершина с номером  $s_m$  называется источником, а с номером  $t_m$  – стоком или приемником потока  $m$ -го вида. Далее в сети из  $N$  узлов рассматривается  $M = N(N - 1)$  независимых, невзаимозаменяемых и равноправных потоков различных видов, которые передаются между узлами корреспондентами из  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ .

Пусть  $x_{mk}$  – величина потока  $m$ -го вида, который передается по ребру  $r_k$ ,  $x_{mk} \geq 0$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, E}$ . Каждому  $r_k \in R$  приписывается неотрицательное число  $d_k$ , определяющее суммарный предельно-допустимый поток, который можно передать по ребру  $r_k$  в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей –  $d = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$  – наперед заданные положительные числа  $d_k > 0$ . Вектором  $d$  определяются следующие ограничения на все потоки, передаваемые по ребру  $r_k$ :

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.1)$$

Обозначим через  $z_m$ , величину потока  $m$ -го вида, который поступает в сеть в узле с номером  $s_m$  и покидает из узла с номером  $t_m$ .

Во всех узлах  $v_n \in V$ ,  $n = \overline{1, N}$ , сети для всех видов потоков должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина  $z_m$  равна, входному потоку  $m$ -го вида, который пропускается от источника к стоку пары  $p_m$  при распределении потоков  $x_{mi}$  по дугам сети.

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество достижимых значений компонент векторов потоков  $z = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$ :

$$Z(x, d) = \{z \geq 0 \mid (z, x) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим произвольную пару узлов  $p_m \in P$  и определим максимальный поток, который можно независимо передать в сети из вершины с номером  $s_m$  в вершину с номером  $t_m$  без учета всех остальных потоков.

**З а д а ч а 1.** Для некоторой фиксированной пары  $p_m$  найти максимальный поток из узла с номером  $s_m$  в узел с номером  $t_m$ :

$$z_m^* = \max_{z, x} \{z_m \mid z \in Z(x, d)\}.$$

Согласно [5], максимальному значению  $z_m^*$ , найденному при решении задачи 1, соответствует некоторый минимальный разрез  $R(z_m^*) \subset R$ , такой, что суммарная пропускная способность ребер  $r_k \in R(z_m^*)$  равна величине  $z_m^*$ . При удалении из сети ребер минимального разреза  $R(z_m^*)$  вершины с номерами  $s_m$  и  $t_m$  окажутся в разных фрагментах сети, а максимально возможный поток из  $v_{s_m}$  в  $v_{t_m}$  станет равным нулю. Обозначим через

$$h(m) = \{k \mid r_k \in R(z_m^*)\} \quad (1.4)$$

множество номеров ребер, которые образуют минимальный разрез  $R(z_m^*)$ :

$$z_m^* = \sum_{k \in h(m)} d_k.$$

**2. Характеристические диаграммы неповрежденной сети.** В результате последовательного решения цепочки задач 1 для каждой пары узлов  $p_m \in P$  определяются максимальные потоки  $z_m^*$ ,  $m = \overline{1, M}$ . Найдем величину максимального

$$z^{**} = \max_m z_m^* = \max_m \{z_m^* \mid p_m \in P\}$$

и минимального

$$z_* = \min_m z_m^* = \min_m \{z_m^* \mid p_m \in P\}$$

потоков для всех пар из  $P$ . Вычислим и обозначим

$$z_m^*(\cdot) = \frac{z_m^*}{z_*}, \quad m = \overline{1, M},$$

нормированные значения максимальных потоков. Набор  $z_m^*(\cdot)$  сортируется по убыванию (невозрастанию). Элементы полученной упорядоченной последовательности переобозначаются и нумеруются подряд в соответствии с установленным порядком от большего  $z^*(1) = (z^{**}/z_*)_1$  к меньшему  $z^*(M) = (z_*/z_*)_M = 1$ . Для элементов последовательности выполняются следующие условия:

$$z^*(j-1) \geq z^*(j) \geq z^*(j+1), \quad j = \overline{2, M-1},$$

$$z^*(1) = \left( \frac{z^{**}}{z_*} \right)_1, \quad z^*(M) = \left( \frac{z_*}{z_*} \right)_M = 1, \quad z^*(j) = z_m^*(j) = \left( \frac{z_m^*}{z_*} \right)_j.$$

Полученные значения  $z^*(j)$ ,  $j = \overline{1, M}$ , далее рассматриваются как компоненты вектора нормированных упорядоченных максимальных потоков (далее – вектор NM-потока):

$$z^* = (z^*(1), z^*(2), \dots, z^*(j), \dots, z^*(M)). \quad (2.1)$$

Компоненты  $z^*$  – нормированные упорядоченные по величине максимальные потоки всех узлов корреспондентов в исходной неповрежденной сети.

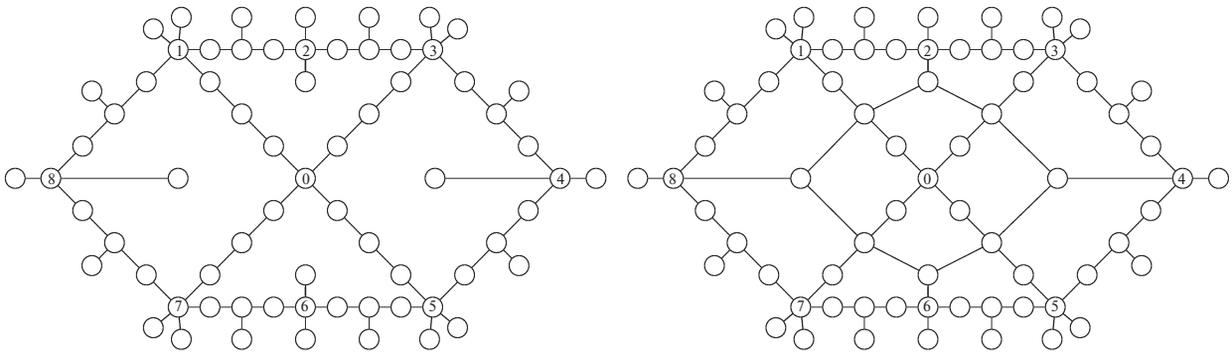


Рис. 1. Базовая и кольцевая сети

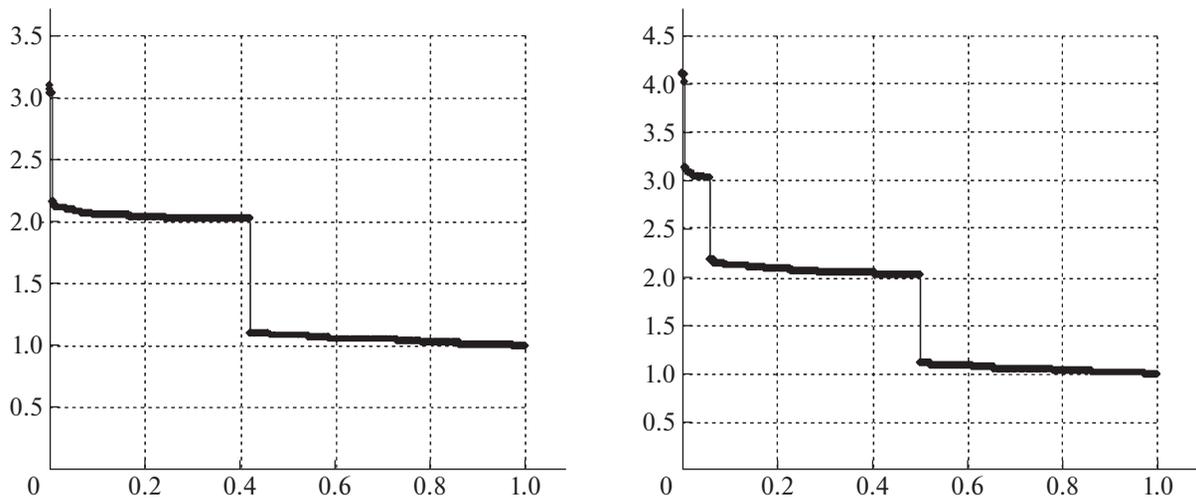


Рис. 2. Максимальные потоки в неповрежденных сетях

Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1 (слева – базовая, справа – кольцевая). В каждой сети 69 узлов. Пропускные способности ребер – значения  $d_k$ , выбирались случайным образом из отрезка  $[1, 1.11]$  и совпадают для ребер, общих для обеих сетей. В кольцевой сети пропускная способность всех добавленных ребер равна 1. Статистика проведенных экспериментов подробно изложена в [1]. В настоящей работе для различных сетей на первом этапе для всех  $p_m \in P$ ,  $m = \overline{1, M}$ , решалась задача 1 и формировался вектор  $z^*$ . Значения компонент вектора  $z^*$  использовались для построения диаграмм, изображенных на рис. 2–4.

На рис. 2 по горизонтальной оси откладываются величины

$$\pi(j) = \frac{j}{M}, \quad j = \overline{1, M},$$

по вертикальной – значения нормированного максимального потока  $z^*(j)$ , соответствующие каждой  $j$ -й компоненте вектора  $z^*$  (2.1).

Диаграмма на рис. 2 слева относится к базовой сети, справа – к кольцевой. Диаграммы характеризуют предельные возможности исходной неповрежденной сети по передаче максимально-достижимых потоков между всеми парами источник–приемник. Диаграмму можно рассматривать как построенную эмпирическим путем функцию распределения NM-потоков при случайно заданных пропускных способностях ребер сети. Почти горизонтальные “ступени” на рис. 2 соответствуют парам  $p_m \in P$ , для которых минимальный разделяющий разрез содержит одно, два или три ребра.

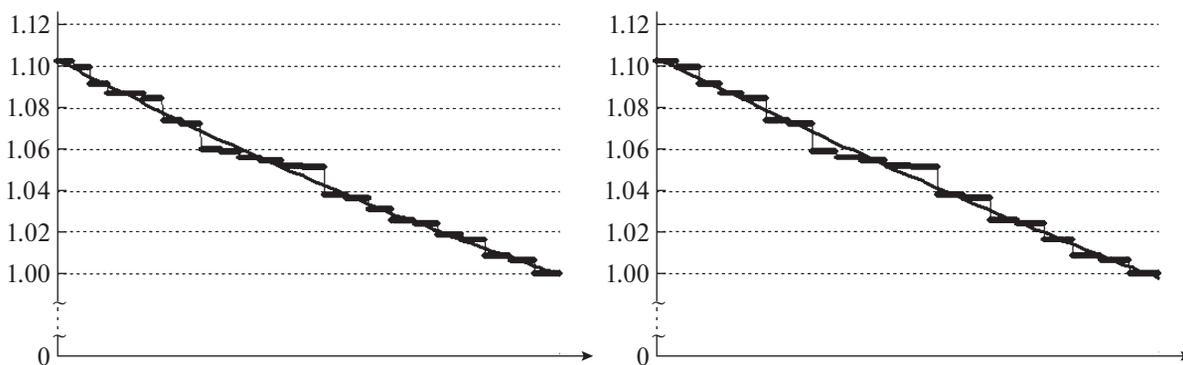


Рис. 3. Потоки для минимального разреза  $deg(1)$

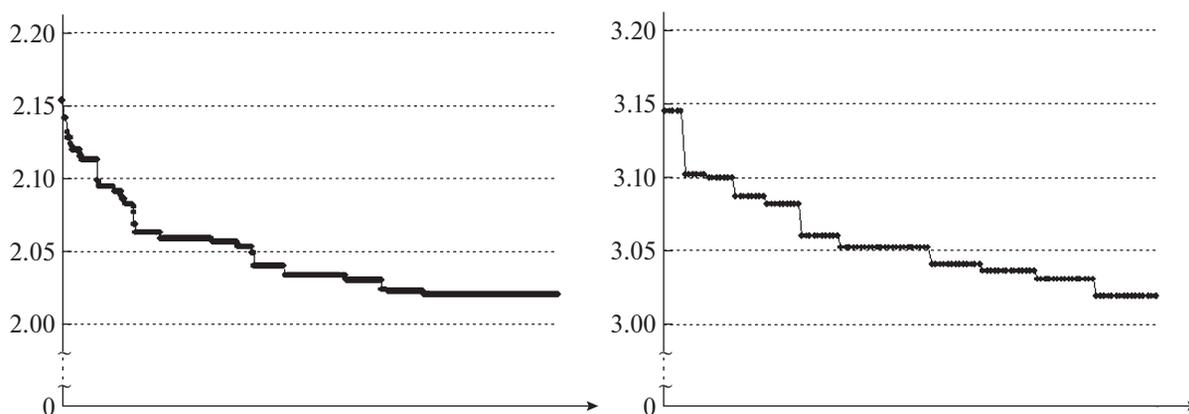


Рис. 4. Потоки для минимальных разрезов  $deg(2)$  и  $deg(3)$

Значения максимальных потоков, вернее компонент вектора NM-потоков, указанные по вертикали в диапазоне:

- $1 \leq z^*(j) < 2$  относятся к парам, для которых минимальный разрез содержит только одно ребро;
- $2 \leq z^*(j) < 3$  – парам с минимальным разрезом из двух ребер;
- $3 \leq z^*(j) < 4$  – парам с минимальным разрезом с тремя ребрами.

Из анализа диаграмм на рис. 2 следует, что для половины всех пар-корреспондентов минимальный разрез содержит единственное ребро.

На рис. 3 представлены детализированные диаграммы распределения NM-потоков, соответствующих минимальному разрезу из одного ребра. Согласно исходным данным пропускная способность любого ребра является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке  $[1, 1.11]$ . Далее для обозначения узлов с одним, двумя или  $k$  инцидентными ребрами (вершин со степенью  $1, 2, \dots, k$ ) будем использовать обозначения  $deg(1), deg(2), \dots, deg(k)$ . Рассмотрим пару узлов корреспондентов  $(deg(1), deg(k))$ , где  $k \geq 2$ . Для таких пар пропускная способность минимального разреза определяется пропускной способностью ребра для узла  $deg(1)$  и имеет равномерное распределение. Доля таких пар составляет 80% при  $1 \leq z^*(j) < 2$ . Эти NM-потоки образуют основу *линейной составляющей* графика на диаграмме. Для пар узлов  $(deg(1), deg(1))$  функция распределения минимума пропускной способности из двух независимых случайных величин является квадратичной. Доля таких пар составляет 20% от общего числа разрезов, состоящих из одного ребра. Результирующая функция распределения пропускной способности минимальных разрезов ближе к линейной, но с небольшой квадратичной составляющей. Изображенная на диаграмме квазилинейная линия трендов для распределения NM-потоков соответствует указанному *почти* равномерному распределению пропускных способностей минимальных разрезов из одного ребра.

На рис. 4 слева для базовой сети представлена детализированная диаграмма распределения NM-потоков для минимальных разрезов из двух ребер; справа – для кольцевой сети с минимальным разрезом из трех ребер.

**3. Множество повреждений.** Вычислительные эксперименты проводились для оценки последствий разрушений специально выбранных ребер сети [1]. В настоящей работе рассматривались повреждения различных типов. Элементами множества повреждений первого типа

$$H(\cdot) = \{h(1), h(2), h(3), \dots, h(m), \dots, h(M)\}$$

являются наборы номеров ребер  $h(m)$  минимальных разрезов (см. (1.4)), найденных при решении последовательности задач 1 для всех  $p_m \in P$ . В ходе выполнения вычислительных экспериментов при решении задачи 1 для некоторой фиксированной пары  $p_a$  максимальному потоку  $z_a^*$  ставится в соответствие единственный минимальный разрез  $R(z_a^*)$  и набор ребер  $h(a)$ .

В качестве критически опасных повреждений второго типа рассматриваются минимальные разрезы в сети с единичными пропускными способностями. В ходе вычислительного эксперимента пропускные способности всех ребер исходной сети полагаются равными единице:

$$d_k = 1, \quad k = \overline{1, E}.$$

Граф сети с единичными пропускными способностями обозначим  $G(1)$ , а соответствующее множество достижимых потоков –  $Z(x, 1)$ :

$$Z(x, 1) = \{Z(x, d) | d_k = 1, k = \overline{1, E}\}.$$

Минимальный разрез для каждой пары  $p_m \in P$  в такой сети определяется в ходе решения задачи о максимальном потоке.

**З а д а ч а 2.** Для некоторой фиксированной пары  $p_m$  найти максимальный поток

$$z_m^1 = \max_{z, x} \{z_m | z \in Z(x, 1)\}.$$

Величина  $z_m^1$  равна числу ребер в минимальном разрезе  $R(z_m^1)$  для максимального целочисленного потока из вершины с номером  $s_m$  в вершину с номером  $t_m$ ,  $z_m^1 = |R(z_m^1)|$ . В ходе решения задачи 2 максимальному потоку  $z_m^1$  ставится в соответствие единственный список номеров ребер

$$q(m) = \left\{ k | r_k \in R(z_m^1), z_m^1 = \sum_{k \in q(m)} d_k \right\},$$

при удалении которых максимальный поток из  $v_{s_m}$  в  $v_{t_m}$  становится равным нулю. Элементами множества повреждений второго типа

$$Q(\cdot) = \{q(1), q(2), \dots, q(m), \dots, q(M)\}$$

являются номера ребер, входящих в минимальные разрезы, найденные при решении последовательности задач 2 для всех пар узлов  $p_m, m = \overline{1, M}$ .

Повреждения третьего типа возникают в исходной сети при удалении всех ребер  $r_k \in R(v_k)$ , инцидентных некоторой вершине  $v_k$ . Элементами множества повреждений третьего типа

$$Y(\cdot) = \{y(1), y(2), \dots, y(n), \dots, y(N)\}$$

являются подмножества номеров ребер, инцидентных вершине  $v_n$ :

$$y(n) = \{k | r_k \in R(v_n)\}.$$

В множествах  $H(\cdot)$ ,  $Q(\cdot)$ ,  $Y(\cdot)$  могут содержаться тождественные элементы. Для сокращения объема необходимых вычислений производится сравнение, сортировка и удаление повторяющихся повреждений любого типа. Из оставшихся формируется множество *уникальных* повреждений

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_l, \dots, w_L\},$$

которое не содержит одинаковых элементов.

Для каждого  $w_l \in W$  рассматривается поврежденная сеть, в которой пропускная способность ребер  $d_k(l)$  полагается равной:

$$d_k(l) = \begin{cases} d_k, & \text{если } k \notin w_l, \\ 0, & \text{если } k \in w_l. \end{cases}$$

В поврежденной сети для некоторой пары узлов  $p_m$  определяется допустимый максимальный поток  $z_m^0(l)$ .

**Задача 3.** При некоторых заданных  $w_l$  и  $p_m$  найти:

$$z_m^0(l) = \max_{z,x} \{z_m \mid z \in Z(x, d(l))\}.$$

Для  $z_m^0(l)$  и минимального значения  $z_*$  для неповрежденной сети вычисляется нормированная величина

$$\tilde{z}_m^0(\cdot, l) = \frac{z_m^0(l)}{z_*}.$$

Задача 3 решается для фиксированного  $w_l$ , всех  $p_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , и определяются наборы  $\{z_1^0(l), z_2^0(l), \dots, z_m^0(l), \dots, z_M^0(l)\}$  и  $\{\tilde{z}_1^0(\cdot, l), \tilde{z}_2^0(\cdot, l), \dots, \tilde{z}_m^0(\cdot, l), \dots, \tilde{z}_M^0(\cdot, l)\}$ . Следуя процедуре, описанной в разд. 2, для выбранного  $w_l$  формируется вектор NM-потоков

$$z^0(l) = (z^0(1, l), z^0(2, l), \dots, z^0(m, l), \dots, z^0(M, l)),$$

компоненты которого упорядочены по убыванию (невозрастанию) и равны нормированным максимальным потокам при данном повреждении  $w_l$ .

Цепочка задач 3 решается последовательно для всех  $p_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , и всех  $w_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ , вычисляются нормированные величины максимальных потоков и строятся все векторы NM-потоков  $z^0(l)$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

**4. Анализ повреждений.** Для покомпонентного анализа NM-векторов  $z^0(l)$  рассчитываются верхние и нижние оценки значений компонент, согласно следующей процедуре. Для всех компонент с некоторым фиксированным номером  $j$  вычисляются максимальное и минимальное значение потока для всех повреждений из множества  $W$ :

$$z^*(j, W) = \max_l z^0(j, l) = \max_l \{z^0(j, l) \mid w_l \in W\},$$

$$z_*(j, W) = \min_l z^0(j, l) = \min_l \{z^0(j, l) \mid w_l \in W\}.$$

Для выделения ненулевых значений  $z^0(j, l)$  вводится индикаторная функция:

$$\xi(j, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } z^0(j, l) > 0, \\ 0, & \text{если } z^0(j, l) = 0. \end{cases}$$

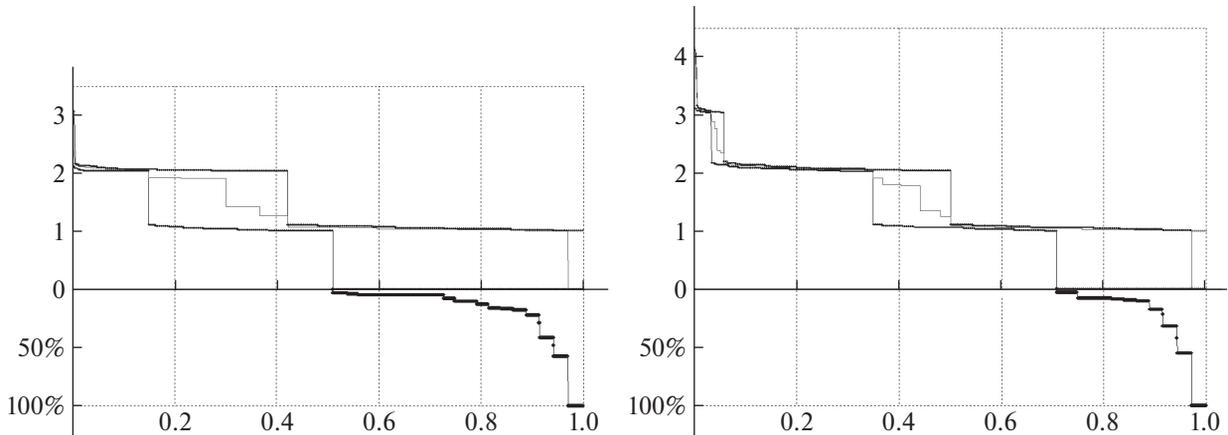


Рис. 5. NM-потоки

Среднее значение  $\bar{z}_+(j, W)$  ненулевых величин  $z^0(j, l)$  для  $j$ -й компоненты и всех повреждений  $w_l \in W$  определяется в соответствии с правилом:

$$\bar{z}_+(j, W) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{l=1}^L \xi(j, l) = 0, \\ \frac{\sum_{l=1}^L z^0(j, l)}{\sum_{l=1}^L \xi(j, l)}, & \text{если } \sum_{l=1}^L \xi(j, l) > 0. \end{cases}$$

Доля нулевых величин  $z^0(j, l)$  для некоторого  $j$  составляет

$$\bar{z}_-(j, W) = \frac{\sum_{l=1}^L (1 - \xi(j, l))}{L}.$$

В разд. 2 был определен вектор  $z^*$  и описан способ построения диаграмм, представленных на рис. 2. Указанные диаграммы были дополнены значениями  $z^*(j, W)$ ,  $z_*(j, W)$ ,  $\bar{z}_+(j, W)$ ,  $\bar{z}_-(j, W)$  для поврежденных сетей и изображены на рис. 5 (слева – для базовой сети, справа – для кольцевой).

Внешняя огибающая линия на диаграмме рис. 5 проходит через точки  $z^*(j)$  – NM-потоки в исходной, неповрежденной сети и является частью исходных диаграмм, изображенных на рис. 2. Линию, проходящую через  $z^*(j, W)$ , можно рассматривать как выпуклую оболочку максимальных значений  $j$ -х компонент вектора NM-потоков для всех повреждений  $w_l \in W$ . Последовательность минимальных значений  $z_*(j, W)$  определяет нижнюю огибающую и набор гарантированных значений  $j$ -х компонент векторов NM-потоков для всех повреждений  $w_l \in W$ .

Из анализа диаграммы следует, что максимальные потоки в неповрежденной сети  $z^*(j)$  и верхние оценки  $z^*(j, W)$  в поврежденной практически совпадают для 97% пар-корреспондентов. При этом доля пар-корреспондентов, для которых допустимый максимальный поток больше нуля при любом повреждении  $w_l \in W$ , составляет для базовой сети не менее 50%, а для кольцевой – не менее 70%. Доля пар, для которых при любом повреждении  $w_l \in W$  сохраняются значения максимальных потоков, достижимых в исходной неповрежденной сети, составляет для базовой сети не менее 25%, а для кольцевой – не менее 50%. Доля пар, для которых верхние оценки мак-

симально-допустимых потоков строго больше нуля, при любом повреждении  $w_l \in W$  – 97% для обеих сетей.

Нижние значения  $z_{*}(j, W)$  можно рассматривать как гарантированные оценки *неуязвимости* системы, понимая под этим показатели сети, которые сохраняются при любом повреждении. Из диаграммы следует, что нижние оценки компонент NM-векторов становятся равными нулю:

для базовой сети  $z_{*}(j, W) = 0$  для всех  $\pi(j) \geq 0.5$ ;

для кольцевой сети  $z_{*}(j, W) = 0$  для всех  $\pi(j) \geq 0.7$ .

Однако для компонент с теми же номерами  $j$  значения  $z^{*}(j)$  в неповрежденной сети практически совпадают с верхними оценками  $z_{*}(j, W)$  и средними величинами  $\bar{z}_{+}(j, W)$  в поврежденной сети. Соответствующие кривые изображены на рис. 5 одной жирной линией. В целом диаграммы свидетельствуют о том, что ненулевые компоненты векторов NM-потоков при повреждениях близки к исходным значениям функциональных характеристик в неповрежденной сети. Таким образом, для всех неразъединенных пар-корреспондентов при повреждениях сохраняются исходные показатели допустимых потоков. Таким образом, если рассматривать лексикографически упорядоченные оценки уязвимости, основываясь на NM-векторах потоков, то при фиксированных показателях числа разъединенных пар анализ сохранившихся значений допустимых потоков показывает, что сеть является *неуязвимой* по отношению к повреждениям из множества  $W$ .

На рис. 5 часть диаграмм, лежащая ниже осевой линии, построена на основе расчетных данных о нулевых компонентах векторов NM-потоков для всех повреждений из  $W$ . Величины  $\bar{z}_{-}(j, W)$  позволяют количественно оценить влияние каждого повреждения на число разъединенных пар, для которых максимальный поток становится равным нулю. На рис. 5 для каждого  $\pi(j)$  соответствующее значение  $\bar{z}_{-}(j, W)$  откладывается по вертикальной оси, направленной сверху вниз. Величина  $\bar{z}_{-}(j, W)$  равна доле от общего числа повреждений, при которых  $j$ -е компоненты векторов NM-потоков окажутся равным нулю. Таким образом  $\bar{z}_{-}(j, W)$  можно рассматривать как гарантированные оценки числа разъединенных пар при повреждениях из  $W$ . Например, нижнее значение  $\bar{z}_{-}(M, W)$  для последней ступеньки (для  $j = M$ ) равно 100%, поскольку при любом повреждении  $w_l \in W$  найдутся разъединенные пары. Следовательно, последняя,  $M$ -я компонента любого из NM-потоков всегда равна нулю. Для обеих сетей при любом повреждении  $w_l \in W$  не менее 3% пар узлов корреспондентов окажутся разъединенными. Формально на диаграмме ширина последней нижней ступеньки по горизонтали равна 0.03 – доле разъединенных пар от их общего числа  $M$ .

В разд. 3 при решении задачи 3 для выбранной пары узлов  $p_m$  и некоторого повреждения  $w_l$  был определен максимальный поток  $z_m^0(l)$ . Введем индикаторную функцию

$$\eta_m(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } z_m^0(l) = 0, \\ 0, & \text{если } z_m^0(l) > 0, \end{cases}$$

и вычислим долю общего числа пар, разъединенных при повреждении  $w_l$ :

$$\eta(l, M) = \frac{\sum_{m=1}^M \eta_m(l)}{M}.$$

Следуя процедуре сортировки из разд. 2, полученный набор чисел  $\eta(l, M)$ ,  $l = \overline{1, L}$ , упорядочивается по убыванию (невозрастанию), элементы полученной последовательности нумеруются подряд и обозначаются  $\bar{z}_0(i) = [\eta(l, M)]_i$ , где  $i = \overline{1, M}$  – порядковые номера. По построению

$$\bar{z}_0(i+1) \geq \bar{z}_0(i) \geq \bar{z}_0(i-1), \quad i = \overline{2, L-1}.$$

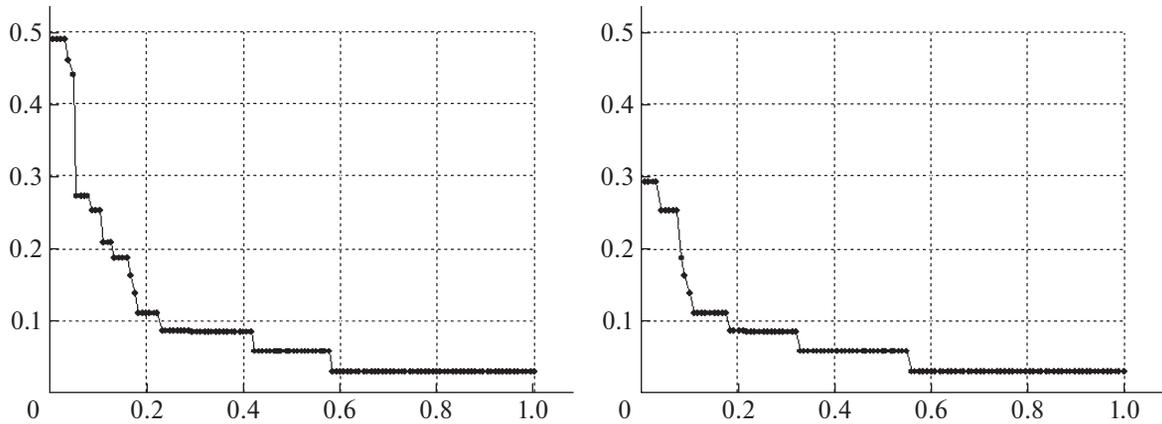


Рис. 6. Число разделенных пар

Каждому номеру  $i$  ставится в соответствие нормированная величина

$$\omega(i) = \frac{i}{L}.$$

На рис. 6 изображены диаграммы: слева для базовой сети, справа — для кольцевой. По горизонтальной оси откладываются значения  $\omega(i)$ , а по вертикальной —  $\bar{z}_0(i)$ . Анализ диаграммы на рис. 6 показывает, что для обеих сетей не более 10% пар-корреспондентов окажутся разъединенными при четырех повреждениях из пяти. Только каждое пятое повреждение разделяет более 10% пар. Однако в базовой сети 30-е повреждение приводит к разрыву связи для почти половины пар-корреспондентов. В кольцевой сети менее 3% повреждений из  $W$  могут привести к разрыву всех путей соединения для не более 30% пар. Каждое десятое повреждение разъединяет не менее 20% пар в базовой сети, а каждое второе — не более чем 6%. Любое повреждение из  $W$  разъединяет не менее 3% пар-корреспондентов как в базовой, так и в кольцевой сетях. Каждое второе повреждение приводит к отсутствию связи между не менее чем 6% пар. И только каждое десятое повреждение разъединяет более 10% пар в базовой сети.

Приведенный выше анализ диаграммы рис. 6 показывает, что они могут быть использованы для изучения *уязвимости* специальных сетей связи и управления, например, при чрезвычайных ситуациях и/или природных бедствиях, охватывающих большие территории.

**Заключение.** В данной работе при получении гарантированных оценок и формирования множества повреждений используются методы потокового программирования. Как уже было отмечено в [1], суммарные вычислительные затраты при решении цепочек задач о максимальном потоке и минимальном разрезе (задачи 1–3) полиномиально зависят от числа узлов в сети и не превышают  $O(N^7)$ .

Для построения диаграмм и формирования векторов NM-потоков многократно используется программа сортировки, при реализации которой стандартная оценка числа требуемых операций для набора из  $M$  элементов составляет  $M \ln M$  [6]. В рассматриваемом случае  $M = N^2$  — числу компонент одного вектора NM-потоков. Поскольку на этапе формирования  $W$  каждому значению максимального потока для пары  $p_m$  ставится в соответствие один минимальный разрез в качестве кандидата на включение в множество повторений, то максимально возможное число повреждений  $L = N^2$ . При этом суммарные затраты на сортировку компонент векторов потоков для всех пар узлов при всех повреждениях составят  $N^4 2 \ln N$ , а верхняя оценка будет порядка  $O(N^4)$ . Для построения диаграмм на рис. 6 требуется  $L \ln L$  операций, где  $L = N^2$  — возможное число повреждений в множестве  $W$ , а вычислительные затраты составят  $N^2 2 \ln N$ . Таким образом выполнение процедур сортировки данных не влияет на общую оценку суммарных затрат, величина которых не превысит  $O(N^7)$ .

При использовании данного подхода при исследовании уязвимости больших сетей можно задействовать простые процедуры распараллеливания в гетерогенной вычислительной среде. Предложенные методы позволяют проводить модельные эксперименты на кластерах из персональных компьютеров с различными операционными системами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ критически опасных повреждений сети связи. I. Модель и вычислительный эксперимент // ТиСУ. 2020. № 5. С. 106–115.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
3. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М. Один подход к анализу возможных структурных повреждений в многопродуктовых сетевых системах // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1626–1638.
4. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М. Управление топливно-энергетической системой при крупномасштабных повреждениях. IV. Априорные оценки структурно-функциональной уязвимости // ТиСУ. 2018. № 6. С. 84–100.
5. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.
6. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. и др. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.