ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 1, с. 52–59

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.1

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2021 г. Ф. А. Алиев[a,b,*], Н. Ш. Гусейнова[a,**], И. А. Магеррамов[a,***], М. М. Муталлимов[a,****]

[a] Институт прикладной математики, БГУ, Баку, Азербайджан

[b] Институт информационных технологий, НАНА, Баку, Азербайджан

*e-mail: f_aliev@yahoo.com

**e-mail: nargiz_huseynova@yahoo.com

***e-mail: ilkin_072@mail.ru

****e-mail: mmutallimov@bsu.edu.az

Поступила в редакцию 18.07.2019 г.
После доработки 11.07.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Предлагается метод прогонки для решения задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями, суть которого заключается в сведении граничных условий к начальному условию. Используя свойства J-симметричности соответствующей Гамильтоновой матрицы, уравнений Эйлера–Лагранжа, показано, что линейные алгебраические уравнения для определения недостающих начальных данных решаемой системы имеют симметричную матрицу коэффициентов. Предложенный алгоритм позволяет уменьшить размерность задачи нахождения фундаментальной матрицы Гамильтоновой системы. Результаты иллюстрируются на примере линейно квадратичной задачи оптимального управления (стационарный случай) с минимальными управляющими воздействиями.

DOI: 10.31857/S0002338821010029

Введение. Как известно [1–3], для решения линейно квадратичной задачи оптимизации с неразделенными краевыми условиями в непрерывном случае [3–6] существуют разные методы: метод, повышающий размерности исходной системы [7, 8], метод прогонки [9, 10], метод Мощинского [11, 12]. Однако каждый из этих методов сталкивается с трудностями [13, 14] при определенных случаях: например, обобщение метода [9] к многоточечному случаю с неразделенными краевыми условиями, переход через узловые точки сталкивается с серьезными трудностями из-за неединственности переходов и т.п. Поэтому в данном случае предлагается новый метод, не требующий решения матричных уравнений Риккати, линейных матричных уравнений и др. Далее для построения соответствующих фундаментальных матриц приводится алгоритм, требующий решения матричных дифференциальных уравнений гораздо меньшей размерности. Результаты иллюстрируются на примере стационарной линейно квадратичной задачи (ЛКЗ) оптимизации с минимальным управляющим воздействием.

1. Постановка задачи. Пусть движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t)x(t) + G(t)u(t), \quad t \in [t_0, \tau], \tag{1.1}$$

с неразделенными краевыми условиями

$$K_1x(t_0) - K_2x(\tau) = q, \tag{1.2}$$

где x – n-мерный фазовый вектор, $u(t)$ – m-мерный вектор управляющих воздействий, $F(t)$, $G(t)$ – известные кусочно-непрерывные функции-матрицы $n \times n$-, $n \times m$-размерности, K_1, K_2 – постоянные матрицы $k \times n$-размерности, q – постоянный k-мерный вектор, τ – заданное время.

Предполагается, что пара $(F(t), G(t))$ управляема в каждой точке отрезка времени (t_0, τ) [15], а СЛАУ (1.2) имеет хоть одно решение $[x^{\mathrm{T}}(t_0), x^{\mathrm{T}}(\tau)]^{\mathrm{T}}$.

Требуется найти управляющие воздействия $u(t)$ так, чтобы с соответствующим $x(t)$ из (1.1), (1.2) минимизировали квадратичный критерий качества

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\tau} (x^{\mathrm{T}}(t)R(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)C(t)u(t))dt. \tag{1.3}$$

Здесь $R(t) = R^{\mathrm{T}}(t) \geq 0$, $C(t) = C^{\mathrm{T}}(t) > 0$ – соответственно $n \times n$-, $m \times m$-размерные, кусочно-непрерывные функции-матрицы.

2. Метод, повышающий размерности исходной системы. Как известно [16], решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к нахождению решения следующей системы уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) - G(t)C^{-1}(t)G^{\mathrm{T}}(t) \\ -R(t) - F^{T}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = H(t)\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

с дополнительными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &= -K_1^{\mathrm{T}}\nu, \\ \lambda(\tau) &= -K_2^{\mathrm{T}}\nu, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\lambda(t)$ – n-мерный и ν – k-мерный соответствующие сопряженные векторы Лагранжа оптимизационной задачи (1.1)–(1.3), а $u(t)$ определяется из соотношений $C(t)u(t) + G(t)\lambda(t) = 0$.

Пусть $\Phi(t, t_0)$ является фундаментальной матрицей системы (2.1), т.е.

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = H(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E, \tag{2.3}$$

где E – $2n \times 2n$-единичная матрица. Обозначая

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

решение системы (2.1) представим в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \Phi_{11}(t, t_0)x(t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)\lambda(t_0) \\ \lambda(t) &= \Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) + \Phi_{22}(t, t_0)\lambda(t_0) \end{aligned}\right\}. \tag{2.5}$$

Пусть из (2.5) существует $\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)$, тогда из второго уравнения находим $\lambda(t_0)$ и, подставив в первое уравнение, получим

$$x(t) = (\Phi_{11}(t, t_0) - \Phi_{12}(t, t_0)\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\Phi_{21}(t, t_0))x(t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\lambda(t), \tag{2.6}$$

$$\lambda(t_0) = -\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) + \Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\lambda(t).$$

При $t = \tau$, решив системы линейно алгебраических уравнений (1.2), (2.2), (2.6), находим $x(t_0)$, $\lambda(t_0)$, $x(\tau)$, $\lambda(\tau)$ и ν. Далее из (2.5) находим текущие значения $x(t)$, $\lambda(t)$, а управляющие воздействия определяются из соотношений

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)\lambda(t). \tag{2.7}$$

Такой подход является методом, повышающим размерность исходной системы (1.1), который изложен в [9]. Поэтому попытаемся уменьшить размерность в процессе решения задачи (1.1)–(1.3).

3. Новый метод прогонки. Для уменьшения вычислений используем соотношение (2.2) при $t = \tau$ в уравнениях (2.6), т.е. напишем (2.6) при $t = \tau$:

$$\begin{gathered} x(\tau) = (\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{12}(\tau, t_0))x(t_0) + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\lambda(\tau), \\ \lambda(t_0) = -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)x(t_0) + \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\lambda(\tau). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Далее, учитывая (2.2) в (3.1), имеем

$$\begin{gathered} x(\tau) = (\Phi_{11}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0))x(t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}}\nu, \\ -\Phi_1^{\mathrm{T}}\nu = -\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)x(t_0) - \Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}}\nu. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Подставляя из (3.2) $x(\tau)$ в (1.2) и объединяя со вторым уравнением (3.2), для определения $x(t_0)$ и ν имеем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} \Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)x(t_0) + (\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}} - K_1^{\mathrm{T}})\nu = 0, \\ [-K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0))]x(t_0) + K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}}\nu = q. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Теперь докажем симметричность матрицы коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0) & (-\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}} + K_1^{\mathrm{T}}) \\ K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)) & K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

системы линейных алгебраических уравнений (3.3), т.е. покажем, что

$$\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0) = \Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}, \tag{3.4}$$

$$\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}} - K_1^{\mathrm{T}} = [K_1 - K_2\Phi_{11}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)]^{\mathrm{T}}, \tag{3.5}$$

$$K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}} = K_2(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}}. \tag{3.6}$$

Используя J-симметричность системы (2.1), из [2]

$$JHJ^{\mathrm{T}} = -H, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad E - n\times n \tag{3.7}$$

легко доказывается, что при помощи соотношений из $J\Phi(\tau,t_0)J^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) = E$ (здесь $E - 2n\times 2n$-мерная) получаем

$$E = \begin{bmatrix} \Phi_{22}(\tau,t_0)\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) & \Phi_{22}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) \\ \Phi_{11}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) & \Phi_{11}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Из условий (3.8) верхнюю внедиагональную подматрицу напишем как

$$\Phi_{22}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) = 0. \tag{3.9}$$

Умножая с правой стороны (3.9) на $(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}$, а с левой стороны – на $(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))$, получим соотношение (3.4). Таким образом доказана следующая лемма.

Лемма 1. В системе линейных матричных алгебраических уравнений (3.3) блочная матрица $\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)$ – симметричная.

Теперь покажем, что в (3.3) матрица $\Phi_{12}(\tau,t_0)\times\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)$ – симметричная, т.е.

$$\Phi_{12}(\tau,t_0)\times\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0) = (\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0). \tag{3.10}$$

Тогда нижняя диагональная блочная матрица в (3.3) тоже будет симметричной. На самом деле

$$\begin{gathered} (K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = K_2(\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}} = \\ = K_2(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}} = K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}}. \end{gathered}$$

Теперь докажем равенство (3.10). Из (3.8) следует, что

$$\Phi_{22}(\tau,t_0)\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) = E, \tag{3.11}$$

$$\Phi_{22}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) = 0, \tag{3.12}$$

$$\Phi_{11}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) = 0, \tag{3.13}$$

$$\Phi_{11}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) = E, \tag{3.14}$$

где 0 в формулах (3.12), (3.13) – нулевая матрица. Умножая с левой стороны (3.12) на $\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)$, получим

$$\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)=\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0).$$

Далее, транспонируя обе части полученного последнего выражения, будем иметь

$$\Phi_{21}(\tau,t_0)=\Phi_{22}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}.$$

Умножим полученное равенство с левой стороны на $\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)$:

$$\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)=\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}. \quad (3.15)$$

Тогда, умножая (3.11) с левой стороны на $\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)$, запишем

$$\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)=\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)+\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0).$$

Подставляя полученные выражения $\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)$ в (3.13), имеем

$$\Phi_{11}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)=\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{11}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)=$$
$$=\Phi_{12}(\tau,t_0)[\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)+\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)]=$$
$$=\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)+\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0).$$

Отсюда

$$\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)=[\Phi_{11}(\tau,t_0)-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)]\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0).$$

Учитывая здесь (3.15), получим

$$\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)=[\Phi_{11}(\tau,t_0)-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}]\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0) \quad (3.16)$$

и определим из (3.14) $\Phi_{11}(\tau,t_0)$:

$$\Phi_{11}(\tau,t_0)=(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}+\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1},$$

значение которого подставим в (3.16), тогда имеем

$$\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)=[(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}+\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}-$$
$$-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}]\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)=(\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0))^{\mathrm{T}}\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0).$$

Таким образом доказана следующая лемма.

Л е м м а 2. В системе линейных матричных алгебраических уравнений (3.3) блочная матрица $K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2$ является симметричной.

Теперь докажем, что вне диагональные матрицы уравнения (3.3) также симметричны, т.е.

$$[K_1-K_2(\Phi_{11}(\tau,t_0)-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0))]=(-\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\mathrm{T}}+K_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}. \quad (3.17)$$

Для выполнения (3.17) достаточно показать, что

$$(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}=\Phi_{11}(\tau,t_0)-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0). \quad (3.18)$$

Действительно из (3.11)–(3.14) и (3.18) следует, что

$$\Phi_{11}(\tau,t_0)-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)=\Phi_{11}(\tau,t_0)-(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)=$$
$$=(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}+\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}-(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}\Phi_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)=$$
$$=(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}+\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)=$$
$$=(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}+\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}-\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1}=(\Phi_{22}^{\mathrm{T}}(\tau,t_0))^{-1},$$

т.е. удовлетворяется условие симметричности (3.18).

Таким образом доказана следующая лемма.

Л е м м а 3. В системе линейных матричных уравнений (3.3) удовлетворяется условие симметричности (3.17).

Результаты лемм 1–3 позволяют сделать вывод, что матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений (3.3) является симметричной. Для этого сначала уравнение запишем в матричном виде, т.е., обозначая

$$D = \begin{bmatrix} -\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0) & (-\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\,K_2^{\text{т}} + K_1^{\text{т}}) \\ K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau,t_0) - \Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)\Phi_{21}(\tau,t_0)) & K_2\Phi_{12}(\tau,t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau,t_0)K_2^{\text{т}} \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix},$$

напишем (3.3) в следующем более компактном виде:

$$D\begin{bmatrix} x(t_0) \\ \nu \end{bmatrix} = \tilde{W}. \tag{3.20}$$

Имеем следующую теорему.

Т е о р е м а. Матрица (3.19) является симметричной.

Поскольку в выражениях (2.6) и (2.7) для определения $x(t)$ и $u(t)$ содержится $\lambda(t)$, попытаемся получить выражения для $x(t)$ и $u(t)$ без использования $\lambda(t)$. Для этого выражение $\lambda(t)$ из (2.5) подставим в первое выражение (2.6), а для определения $x(t)$ и $u(t)$ учитываем $\lambda(t_0) = -K_1^{\text{т}}\nu$. Тогда для $x(t)$ получим

$$x(t) = \Phi_{11}(t,t_0)x(t_0) - \Phi_{12}(t,t_0)K_1^{\text{т}}\nu, \tag{3.21}$$

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)\Phi_{21}(t,t_0)x(t_0) + C^{-1}(t)G(t)\Phi_{22}(t,t_0)K_1^{\text{т}}\nu. \tag{3.22}$$

Таким образом имеется следующий алгоритм.

Ш а г 1. Формируются матрицы $F(t)$, $G(t)$, K_1, K_2, $R(t)$, $C(t)$ из (1.1)–(1.3).

Ш а г 2. Формируется матрица $H(t)$ из (2.1).

Ш а г 3. Решается дифференциальное матричное уравнение (2.3) и находится $\Phi(t,t_0)$ из (2.4).

Ш а г 4. Восстанавливается матрица $D = D^{\text{т}}$ и вектор $\tilde{W}$, согласно (3.19), и решается матричное алгебраическое уравнение (3.20), находятся $x(t_0)$, ν.

Ш а г 5. Из формул (3.21), (3.22) вычисляются $x(t)$ и $u(t)$ через $x(t_0)$ и ν.

Теперь приведем формулы для $u(t)$ через фазовые координаты $x(t)$. Для этого напишем в (2.5) первое соотношение из (2.2):

$$\begin{gathered} x(t) = \Phi_{11}(t,t_0)x(t_0) - \Phi_{12}(t,t_0)K_1^{\text{т}}\nu, \\ \lambda(t) = \Phi_{21}(t,t_0)x(t_0) - \Phi_{22}(t,t_0)K_1^{\text{т}}\nu. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Тогда при предположении существования $\Phi_{11}^{-1}(t,t_0)$ находим $x(t_0)$ из первого соотношения (3.23) в виде

$$x(t_0) = \Phi_{11}^{-1}(t,t_0)(x(t) + \Phi_{12}(t,t_0)K_1^{\text{т}}\nu). \tag{3.24}$$

Подставив (3.24) в последнее соотношение (3.23), получим

$$\lambda(t) = \Phi_{21}(t,t_0)\Phi_{11}^{-1}(t,t_0)x(t) + (\Phi_{21}(t,t_0)\Phi_{11}^{-1}(t,t_0)\Phi_{12}(t,t_0) - \Phi_{22}(t,t_0))K_1^{\text{т}}\nu, \tag{3.25}$$

который является выражением $\lambda(t)$ через фазовые состояния$x(t)$. Подставив выражение $\lambda(t)$ из (3.25) в (2.7), получим для управляющих воздействий следующее выражение:

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)[\Phi_{21}(t,t_0)\Phi_{11}^{-1}(t,t_0)x(t) + (\Phi_{21}(t,t_0)\Phi_{11}^{-1}(t,t_0)\Phi_{12}(t,t_0) - \Phi_{22}(t,t_0))K_1^{\text{т}}\nu], \tag{3.26}$$

которое является обратной связью для решения задачи (1.1)–(1.3).

Подставляя (3.26) в (1.1), для нахождения $x(t)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = (F(t) - G(t)C^{-1}(t)G(t)\Phi_{21}(t,t_0)\Phi_{11}^{-1}(t,t_0))x(t) + \\ + G(t)C^{-1}(t)G(t)(\Phi_{21}(t,t_0)\Phi_{11}^{-1}(t,t_0)\Phi_{12}(t,t_0) - \Phi_{22}(t,t_0))K_1^{\mathrm{T}}\nu\end{aligned} \tag{3.27}$$

с начальными условиями $x(t_0)$, найденными из системы линейных алгебраических уравнений (3.20). В этом случае в вышеизложенном алгоритме шаг 5 заменяется.

Ш а г 6. По формуле (3.26) определяется $u(t)$, а $x(t)$ находится из решения дифференциальных уравнений (3.27) с начальным условием $x(t_0)$.

4. Построение фундаментальных матриц (2.3). Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к нахождению фундаментальной матрицы системы (2.1), т.е. к решению задачи (2.3). Однако решение задачи (2.3) в общем случае представляется возможным с трудностями (из-за размерности плохой обусловленности матриц H и т.д.). Поэтому для нахождения $\Phi(t,t_0)$ воспользуемся методом Захар-Иткина [20]. Действительно из [17, 18]

$$\begin{cases} x(t) = \psi x(t_0) - W\lambda(t), \\ \lambda(t_0) = Vx(t_0) + \psi^{\mathrm{T}}\lambda(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

где ψ, W, V – матрицы, которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям и начальным условиям:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = (F + WR)\psi, \quad \psi(t_0) = E, \\ \dot{W} = FW + WF^{\mathrm{T}} + WRW - GQ^{-1}G^{\mathrm{T}}, \quad W(t_0) = 0, \\ \dot{V} = \psi^{\mathrm{T}}R\psi, \quad V(t_0) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Приводя некоторые преобразования из (4.1), получим

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & W \\ 0 & -\psi^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ V & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & W(\psi^{\mathrm{T}})^{-1} \\ 0 & -(\psi^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ V & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \psi + W(\psi^{\mathrm{T}})^{-1}V & -W(\psi^{\mathrm{T}})^{-1} \\ -(\psi^{\mathrm{T}})^{-1}V & (\psi^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Отсюда следует, что фундаментальная матрица (2.4), образованная через $\Phi_{11}(t,t_0)$, $\Phi_{12}(t,t_0)$, $\Phi_{21}(t,t_0)$, $\Phi_{22}(t,t_0)$, определяется как

$$\begin{gathered}\Phi_{11}(t,t_0) = \psi(t,t_0) + W(t,t_0) \times (\psi^{\mathrm{T}}(t,t_0))^{-1}V(t,t_0), \\ \Phi_{12}(t,t_0) = -W(t,t_0) \times (\psi^{\mathrm{T}}(t,t_0))^{-1}, \\ \Phi_{21}(t,t_0) = -(\psi^{\mathrm{T}}(t,t_0))^{-1}V(t,t_0), \\ \Phi_{22}(t,t_0) = (\psi^{\mathrm{T}}(t,t_0))^{-1}.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Приведем следующий алгоритм на основе вышесказанных результатов. Иллюстрируем вышеизложенный алгоритм на следующем примере.

П р и м е р. Пусть в (1.1)–(1.3) $F(t) = F$, $G(t) = G$, $R(t) = 0$, $C(t) = C$ – постоянные матрицы с соответствующими размерностями. Для начала восстанавливаем фундаментальную матрицу $\Phi(t,t_0)$ через матричные дифференциальные уравнения (4.2) и формулы (4.3), (4.4). На самом деле, в данном случае (4.2) упрощается и переходит к более простому виду:

$$\begin{gathered}\dot{\psi} = F\psi, \quad \psi(t_0) = E, \\ \dot{W} = FW + WF^{\mathrm{T}} - GQ^{-1}G^{\mathrm{T}}, \quad W(t_0) = 0, \\ \dot{V} = 0, \quad V(t_0) = 0,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где решение (4.5) в аналитическом виде представляется как

$$\begin{gathered}\psi(t,t_0) = e^{F(t-t_0)},\\ W(t,t_0) = W_1 - e^{F(t-t_0)}W_1 e^{F'(t-t_0)},\\ V(t,t_0) = 0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь W_1 является решением матричного уравнения Ляпунова:

$$-FW_1 - W_1F^{\mathrm{T}} + GQ^{-1}G^{\mathrm{T}} = 0. \tag{4.7}$$

Отметим, что уравнение Ляпунова имеет решение в следующем виде [13]:

$$W_1 = -\int_0^\infty e^{Ft}G_1Q^{-1}C_1^{\mathrm{T}}e^{F^{\mathrm{T}}t}dt. \tag{4.8}$$

Теперь формируем фундаментальную матрицу $\Phi(t,t_0)$ через решения уравнений (4.5):

$$\begin{gathered}\Phi_{11}(t,t_0) = e^{F(t-t_0)},\\ \Phi_{12}(t,t_0) = -[W_1 - e^{F(t-t_0)}W_1e^{F'(t-t_0)}]e^{-F(t-t_0)},\\ \Phi_{21}(t,t_0) = 0, \quad \Phi_{22}(t,t_0) = e^{-F(t-t_0)}.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Подставляя (4.9) в (3.26), имеем для управления следующее выражение:

$$u(t) = C^{-1}(t)G(t)e^{-F(t-t_0)}K_1^{\mathrm{T}}\nu,$$

а фазовая координата $x(t)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) - G(t)C^{-1}(t)G(t)e^{-F(t-t_0)}\Phi_1^{\mathrm{T}}\nu,$$

где $x(t_0)$ и ν являются решением системы линейных алгебраических уравнений (3.20). Здесь матрица D формируется через (4.9) в следующем виде:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -e^{F(\tau-t_0)}K_2^{\mathrm{T}} + K_1^{\mathrm{T}} \\ K_1 - K_2e^{F(\tau-t_0)} & -K_2[W_1 - e^{F(\tau-t_0)}W_1e^{F'(\tau-t_0)}]K_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

Заключение. В данной работе в отличие от известных алгоритмов предлагается вычислительный алгоритм для решения задачи (1.1)–(1.3), который гораздо больше уменьшает размерность исходной задачи. Достоинство такого нового алгоритма заключается в том, что он позволит решать задачи построения программных траекторий и управлений гораздо большей размерности [19–25] при эксплуатации нефтяных скважин газлифтным способом и штангонасосными установками и др. Кроме того, приведенный здесь алгоритм можно использовать при редукции фундаментальных матриц задачи типа (2.3). Относительно вычислительной сложности предложенного алгоритма следует отметить, что этот алгоритм в 2 раза (в некоторых случаях в 4 раза [11, 12]) уменьшает размерность задачи нахождения фундаментальной матрицы Гамильтоновой системы. Кроме того, рассматриваемый метод позволяет распараллеливать вычислительный алгоритм для решения систем дифференциальных матричных уравнений (4.2), что дает возможность уменьшить вычислительную сложность данного алгоритма, а также применять его к задачам, в которых движение объекта описывается системой. В уравнения этой системы помимо обычных производных входят и дробные производные [26–28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиев Ф.А.* Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 6. С. 138–146.
2. *Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимешенко А.Г.* Задачи управления шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1985.
3. *Шаманский В.Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. I. Киев: Наук. думка, 1963. 1966.
4. *Алиев Ф.А.* Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1986. № 2. С. 345–347.

5. *Алиев Ф.А.* Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями // Изв. АН Аз ССР. Сер. физ. техн. и мат. наук. 1986. № 2. С. 345–347.

6. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.* Методы решения задач оптимизации с двухточечными краевыми условиями. Препринт / № 151. Баку: Институт физики, АН АзССР, 1985.

7. *Муталлимов М.М., Алиев Ф.А.* Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, 2012.

8. *Муталлимов М.М., Зульфугарова Р.Т., Гулиев А.П.* Алгоритм прогонки для решения задач оптимального управления с неразделенными краевыми условиями // Вестн. БГУ. Сер. физ. мат. наук. 2009. № 2. С. 153–160.

9. *Алиев Ф.А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989.

10. *Муталлимов М.М.* Алгоритм “прогонки” для решения задачи оптимизации с неразделенными трехточечными краевыми условиями // Докл. НАН Азербайджана. 2007. Т. LXIII. № 2. С. 24–29.

11. *Moszynski K.* A Method of Solving the Boundary Value Problem for a System of Linear Ordinary Differensial Equations // Algorytmy. 1964. V.11. № 3. P. 25–43.

12. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.

13. *Aliev F.A.* Comments on ‘Sweep Algorithm for Solving Optimal Control Problem with Multi-Point Boundary Conditions’ by M. Mutallimov, R. Zulfuqarova and L. Amirova // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 131.

14. *Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A.* Remarks to the Paper: Sweep Algorithm for Solving Optimal Control Problem with Multi-Point Boundary Conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. 2018. V. 9. № 2. P. 243–246.

15. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.

16. *Брайсон А., Хо Ю Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.

17. *Захар-Иткин М.Х.* Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований // УМН. 1973. Т. 28. № 3. С. 83–120.

18. *Ларин В.Б.* Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980.

19. *Mutallimov M.M., Зульфугарова Р.Т., Amirova L.I.* Sweep Algorithm for Solving Optimal Control Problem with Multi-Point Boundary Conditions // Adv. Differ. Equ. 2015. V. 233.

20. *Hamidov R.H., Mutallimov M.M.* Dimension Reduction of one Multivariable Decision Making Problem // Appl. Comput. Math. 2019. V. 18. № 1. P. 62–68.

21. *Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Mirsaabov S.M.* Calculation Algorithm Defining the Coefficient of Hydraulic Resistance on Different Areas of Pump-Compressor Pipes in Gas Lift Process by Lines Method // SOCAR Proceedings. 2019. № 4. P. 13–17.

22. *Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М., Джамалбеков М.А.* Метод решения одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, описывающих движение в газлифтном процессе // ПММ. 2018. Т. 82. В. 4. С. 512–519.

23. *Ashyralyev A., Erdogan A.S., Tekalan S.N.* An Investigation on Finite Difference Method for the First Order Partial Differential Equation with the Nonlocal Boundary Condition // Appl. Comput. Math. 2019. V. 18. № 3. P. 247–260.

24. *Aliev F., Larin V., Velieva N., Gasimova K., Faradjova Sh*. Algorithm for Solving the Systems of the Generalized Sylvester-Transpose Matrix Equations Using LMI // TWMS J. Pure Appl. Math. 2019. V. 10. № 2. P. 239–245.

25. *Zhang Jingjing, Shen Yue, He Jihuan*. Some Analytical Methods for Singular Boundary Value Problem in a Fractal Space: a Review // Appl. Comput. Math. 2019. V. 18. № 3. P. 225–235.

26. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

27. *Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I.* Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients // Appl. Comput. Math. 2018. V. 17. № 1. P. 317–322.

28. *Ahmad Golbabai, Omid Nikan, Mahboubeh Molavi-Arabshahi.* Numerical Approximation of Time Fractional Advection-Dispersion Model Arising from Solute Transport in Rivers // TWMS J. Pure Appl. Math. 2019. V. 10. № 1. P. 117–131.