
**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ**

УДК 621.396

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОРБИТАМ

© 2021 г. А. М. Ануфриев^{a,*}, Ю. А. Горицкий^a, Д. Г. Тигетов^{b,**}

^a МЭИ, Москва, Россия

^b АО «ВНИИРТ», Москва, Россия

*e-mail: goritskiy@yandex.ru

**e-mail: david.tigetov@gmail.com

Поступила в редакцию 21.11.2019 г.

После доработки 23.04.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассматриваются неблагоприятные для наблюдателя орбиты, плоскость которых проходит вблизи плоскости орбиты. Замена движения наблюдателя приближенно эквивалентным движением на плоскости орбиты приводит к простой двумерной модели измерения-движения. Определяются границы Рао–Крамера для оценок параметров орбит. Углы места наблюдения связаны с истинными аномалиями и параметрами орбиты нелинейными уравнениями. Дифференцирование уравнений по параметрам орбиты дает матрицу Якоби одиночных угловых измерений, а затем и информационную матрицу Фишера, которая является основой для анализа точности. Наиболее сложная часть определения матрицы Фишера состоит в вычислении производных истинных аномалий по параметрам орбиты; эта часть основана на численном решении дифференциального уравнения, выражающего второй закон Кеплера. Приведены примеры вычисления границ точности оценок в широком диапазоне практических скоростей и углов падения. Результаты показывают, что по угловым измерениям возможно получить практически интересные точности по некоторым параметрам.

DOI: 10.31857/S0002338820060025

Введение. Предполагается, что наземный наблюдатель в дискретные моменты времени может измерять только угловые координаты объекта. Объект находится в свободном движении со скоростью, меньшей первой космической, на высотах не более 1000 км. Решается вопрос о том, можно ли по угловым измерениям оценить параметры движения с практически интересной точностью. Для ответа учитываем лишь основное, пренебрегая многочисленными влияющими на точность факторами: считаем, что движение кеплеровское, а измерения производятся с дискретностью Δt и со случайной погрешностью, дисперсия которой — σ^2 . Цель работы — описать для инженера-разработчика приближенное, но достаточно простое средство анализа.

Задача оценивания параметров орбит космических тел (КТ) по угловым измерениям не является новой [1–9], однако с изменением технических средств измерения, требований к точности и вычислительных возможностей задача приобретает различные особенности. В частности, актуальна ситуация пассивной радиолокации, высокой частоты измерений, мощных вычислительных средств и высоких требований к точности определения расстояния от измерителя до точки падения.

Простые алгоритмы оценивания [1, 5, 6, 10] основаны на построении точечной оценки состояния КТ в фиксированный момент времени. Начальную оценку угловых величин получают регрессией угловых измерений, используя полиномы; оценки радиальных величин находят как корни трансцендентных уравнений орбитального движения, связывающих радиальные и угловые величины. Полученную оценку применяют в качестве начального приближения в различных методах уточнения, [1, 3–6], связанных с минимизацией квадратичной формы отклонения. В [7] излагается альтернативный подход, связанный с аппроксимацией апостериорной плотности вероятности состояния КТ, получаемой при аппроксимации априорной плотности вероятности состояния КТ и функции преобразования состояния [11–13].

Анализ эффективности методов оценивания обычно связывают с границами дисперсий многомерного неравенства Рао–Крамера, [1, 14–19]. В [1] теоретическая граница Рао–Крамера используется как эталонная мера ошибки оценивания, а в фундаментальной отечественной работе [5] авторы приводят универсальные соотношения для приближенного вычисления ошибок оценивания параметров орбит, которые в частном случае независимых гауссовых ошибок измерений совпадают с границей Рао–Крамера. Вычисление границ в ряде случаев представляет отдельную нетривиальную задачу, [14–16], например, в [15, 16] для вычисления границ Рао–Крамера в задаче фильтрации двумерного движения используется специализированная система координат угловых измерений. В данной работе при вычислении матрицы Фишера численно решается дифференциальное уравнение, представляющее второй закон Кеплера.

Разработчикам алгоритмов необходимо знать, с какой частотой и точностью нужно измерять и какую точность на каких орбитах можно получить. Эти вопросы могут прояснить информационные оценки точности, которая зависит от параметров орбиты. На практике особо выделяют класс траекторий, направленных в сторону наблюдателя, для которых весьма характерными являются малые изменения азимута. Малые изменения азимута имеют место в тех случаях, когда движение наблюдателя, связанное с вращением Земли, происходит вблизи плоскости орбиты. В этих случаях задачу можно приближенно считать двумерной, проецируя движение наблюдателя на плоскость орбиты, а единственным источником информации – измерения угла места. Ситуации с малыми изменениями азимута интересны также тем, что они наименее благоприятны для оценки параметров движения, и потому анализ их точности может служить ориентиром для использования угловых измерительных систем.

Цель данной работы состоит в том, чтобы предложить инженерам-разработчикам алгоритмов достаточно простые инструменты для приближенной оценки возможной точности при угловых измерениях. Задача оценки точности решается, опираясь на два момента, отличающих ее от других. 1. Выделено семейство неблагоприятных для наблюдателя орбит; это орбиты, плоскость которых касается орбиты движущегося наблюдателя, и точка касания является точкой пересечения соответствующих траекторий. 2. Обоснована простая приближенная плоская модель движения – измерения, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы.

Далее необходимо сделать следующие пояснения. Во-первых, нас интересуют орбиты, которые могут закончиться в окрестности наблюдателя. Во-вторых, семейство орбит, которые заканчиваются в точке наблюдателя (и в этой точке окружность наблюдателя касается плоскости орбиты), являются наиболее неблагоприятными в том смысле, что иначе информации будет больше, и тогда и качество оценок должно быть выше. Действительно, если в момент падения в эту точку вектор скорости наблюдателя не лежит в плоскости орбиты, то измерительной информации по орбите будет больше (чем в случае касания) за счет азимутальных измерений. Если же отодвинем точку падения от точки наблюдателя, то диапазон изменения угла места увеличится и мы опять имеем увеличение информации.

1. Двумерная модель измерения. 1.1. Предварительная схема: неподвижный наблюдатель. Рассматривается ситуация, в которой точка наблюдения H (рис. 1) находится в плоскости орбиты и она неподвижна. В дальнейшем учтено влияние движения вне этой плоскости. Объект движется по эллипсу, главная ось которого составляет угол φ относительно направления на точку H наблюдения. Орбита характеризуется трехмерным параметром a :

$$a = (j, p, e)^T,$$

φ – угол между наблюдателем H и главной осью эллипса, p – фокальный параметр, e – эксцентриситет орбиты. Уравнение орбиты в полярных координатах

$$r(\theta) = p / (1 - e \cos \theta), \tag{1.1}$$

где $r(\theta)$ – расстояние до центра Земли, θ – истинная аномалия – угол направления на объект, отсчитываемый от направления на апогей. Измерения угла места начинаются после момента t_0 входа в зону видимости, т.е. когда объект выходит из-за горизонта G . Угол места $\varepsilon = \varepsilon(t)$ в любой момент $t \geq t_0$ определяется очевидным соотношением: тангенс угла есть отношение катетов (рис. 1):

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{r(\theta) \cos(\varphi - \theta) - R_3}{r(\theta) \sin(\varphi - \theta)} = \operatorname{ctg}(\varphi - \theta) - \frac{R_3(1 - e \cos \theta)}{p \sin(\varphi - \theta)}, \tag{1.2}$$

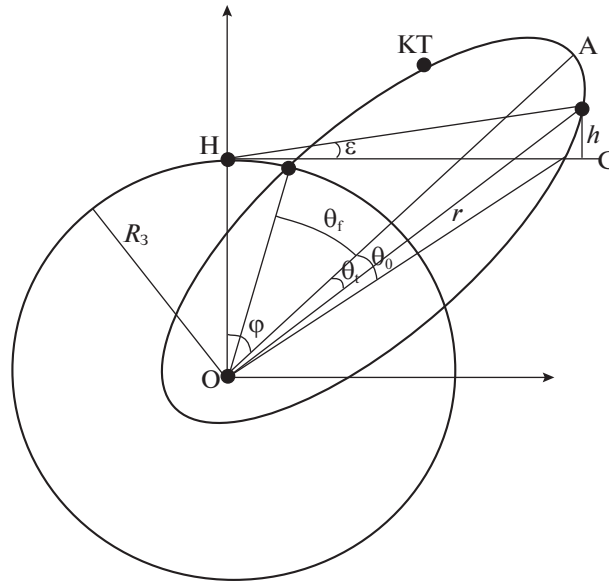


Рис. 1. Схема плоской задачи

$\theta = \theta(t)$ – аномалия в момент t измерения. После умножения (1.2) на $\sin(\varphi - \theta)$ имеем

$$\sin(\varphi - \theta)\operatorname{tg}(\varepsilon) = \cos(\varphi - \theta) - (R_3/p)(1 - e \cos \theta). \quad (1.3)$$

Это соотношение определяет $\varepsilon = \varepsilon(\theta; \varphi, p, e)$, как функцию θ и параметров орбиты, но $\theta = \theta(t)$ – функция времени, и потому для любого фиксированного момента t

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\theta(t), \varphi, p, e)$$

– функция трех переменных (заметим, что $\theta(t) = \theta(t; \varphi, p, e)$ – тоже функция (φ, p, e)). По значению ε и фиксированным параметрам (φ, p, e) орбиты можно определить аномалию θ , решая уравнение (1.3), сводимое к квадратному: $\theta = h(\varepsilon; \varphi, p, e)$ (см. Приложение). Для произвольного момента t значение $\theta(t)$ при известных параметрах орбиты p и e определяется по дифференциальному уравнению (второй закон Кеплера о постоянстве секториальной скорости)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\theta; p, e), \quad (1.4)$$

с начальным условием: при $t = t_0$ $\theta = \theta_0$; $\omega(\theta; p, e) = \sqrt{\mu}/r^2 = (\sqrt{\mu}/p^{3/2})(1 - e \cos \theta)^2$ – угловая скорость; $\mu = 3.9860044 \times 10^{14}$ м³/с² – геоцентрическая гравитационная постоянная.

В дискретные моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_n, t_i = t_{i-1} + \Delta t, i = 1, \dots, n$, имеем измерения

$$x_i = \varepsilon(t_i; a) + \delta_i, \quad \varepsilon_i(a) = \delta_i, \quad a = (\varphi, p, e), \quad (1.5)$$

δ_i – независимые случайные ошибки измерений со средним 0 и дисперсией $D\delta_i^2 = \sigma^2$; $x = (x_0, \dots, x_n)$ – исходная совокупность измерений.

В некоторый известный момент времени t_0 имеется начальное измерение

$$x_0 = \hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon(t_0; a) + d_0.$$

По значению $\hat{\varepsilon}_0$ по (1.3) определим приближенно $\tilde{\theta}_0(a)$ – аномалию θ_0 в момент t_0 как функцию параметра a (начальное условие при $t = t_0$):

$$\theta = \tilde{\theta}_0(a) = h(\hat{\varepsilon}_0; \varphi, p, e) = \theta_0(a) + \delta_\theta, \quad (1.6)$$

$\tilde{\theta}_0(a)$ – оценка начальной аномалии $\theta_0(a)$, δ_θ – погрешность оценки, с.к.о. (среднее квадратическое отклонение) которой $\sigma/|\varepsilon'_\theta|$, ε'_θ – производная функции ε по θ . При известной орбите (φ, p, e) погрешность в $\tilde{\theta}_0(a)$ определяется погрешностью измерения угла в момент t_0 . Заметим, что

Таблица 1. Значения Δl (слева) в метрах и $\Delta \epsilon$ (справа) в угловых минутах

t, c	$\epsilon, \text{град}$	$d, \text{км}$			
		100	300	600	1000
100	12	0.13, 0.001	0.15, 0.0004	0.15, 0.0002	0.15, 0.0002
	48	0.14, 0.0036	0.15, 0.001	0.15, 0.0006	0.15, 0.0004
	72	0.17, 0.006	0.16, 0.002	0.16, 0.001	0.15, 0.0006
300	12	2.9, 0.021	3.7, 0.009	3.8, 0.005	3.9, 0.005
	48	3.35, 0.086	3.84, 0.033	3.98, 0.017	4.04, 0.01
	72	4.65, 0.152	4.46, 0.049	4.31, 0.023	4.23, 0.014
600	12	19, 0.136	25, 0.06	28, 0.033	30, 0.021
	48	23, 0.59	29.5, 0.25	30.6, 0.13	31.5, 0.08
	72	35.9, 1.17	36.8, 0.40	35.5, 0.19	34.5, 0.11

уравнение (1.4) определяется двумя параметрами (p, e), а зависимость решений от параметра φ происходит только через начальное условие.

1.2. Учет движения наблюдателя вследствие вращения Земли. Наблюдатель вследствие вращения Земли движется по окружности вдоль своей параллели. Будем считать траекторию КТ *неблагоприятной* для измерителя, если плоскость орбиты КТ касается орбиты движущегося измерителя, и точка касания является общей точкой (точкой пересечения) для соответствующих траекторий. Эти траектории характеризуются, во-первых, настолько малым диапазоном измеряемых азимутальных углов, что измерениями азимута можно пренебречь, и, во-вторых, диапазон изменения угла места минимален при последних (наиболее информативных) наблюдениях (так как траектория входит в точку O наблюдения). Следовательно, траектории неблагоприятны, если в момент падения вектор скорости наблюдателя лежит в плоскости орбиты.

Если реверсировать время, то можно сформулировать так: неблагоприятны для измерителя те траектории, которые исходят из точки наблюдения, и орбитальная плоскость проходит через вектор скорости наблюдателя. В этом случае взаимное движение выглядит следующим образом: из точки касания O начинаются одновременно два движения: наблюдатель движется по окружности – параллели с широтой φ_H , а КТ движется в орбитальной плоскости.

Простые соображения показывают, что существует фиктивное движение измерителя (по окружности сферы S_3 Земли в орбитальной плоскости), эквивалентное (в смысле получения углов места) истинному движению (вне орбитальной плоскости). Для этого достаточно, чтобы в любой момент времени два расстояния (от КТ до фиктивного движения и до истинного движения) были одинаковы. С помощью такого эквивалентного фиктивного движения $\Delta\varphi(t)$ задача сводится к плоской. Однако фиктивное эквивалентное движение зависит от точки расположения КТ.

Построим *приближенно* эквивалентное движение, независимое от КТ. Заменяем равномерное движение наблюдателя вдоль своей параллели движением по окружности S_3 сферы в орбитальной плоскости, сохранив его линейную скорость $\omega_3 R_3 \cos \varphi_H$. Заметим, что для экватора $\varphi_H = 0$ и на северном полюсе $\varphi_H = \pi/2$, это фиктивное движение является эквивалентным.

Оценим это приближение. Оба движения, истинное и фиктивное, исходят (вернее, приходят) одновременно в общую точку O . Определим разность длин двух отрезков, исходящих из точки КТ на истинную траекторию и на фиктивную. Если длины в любой момент одинаковы, $\Delta d = 0$, то углы места равны. Если они не одинаковы, $\Delta d \neq 0$, то оценим величину погрешности $\Delta\epsilon(t; d, \epsilon) \approx (\Delta d/d) \operatorname{tg} \epsilon$ измеряемого угла места или величину сдвига $\Delta l(t; d, \epsilon) \approx \Delta d / \cos \epsilon$ фиктивного наблюдателя, при котором угол места равен истинному. Необходимые формулы даны в Приложении. В табл. 1 в каждой клетке приведены расчетные значения Δl и $\Delta \epsilon$, зависящие от расположения КТ (угла ϵ и дальности d) и времени t движения до точки O ; значение широты принято $\varphi_H = 60^\circ$.

Видно, что смещение $\Delta l(t, \epsilon, d)$ относительно эквивалентных точек меньше 5 м в диапазоне до 300 с и до 72° при дальностях от 100 до 1000 км. Если Δl переводить в погрешность $\Delta \epsilon$ по углу ме-

ста, то, например, за 300 с до точки O при дальности 300 км и $\varepsilon = 48^\circ$ имеем $\Delta l = 3.84$ м, что означает $\Delta\varepsilon \approx 0.033$ угл. мин., что меньше с.к.о. измерения в сотни раз.

Фиктивное движение при вычислениях учитывается добавлением к неизвестному параметру φ в (1.2) линейно изменяющееся во времени (со скоростью $\omega_3 \cos \varphi_H$) слагаемое $\Delta\varphi(t) = \pm \omega_3 \cos \varphi_H (T - t)$, T – момент падения, причем $\Delta\varphi(T) = 0$. Заметим, что формулы производных по параметрам, необходимые для матрицы Фишера, остаются без изменения; изменяются лишь их значения при вычислениях.

2. Вычисление матрицы Фишера. Информационная матрица Фишера, как известно, есть

$$F(a) = M(d \ln p(x; a)/da)^T (d \ln p(x; a)/da),$$

где M , T – символы математического ожидания и транспонирования. Если измерения в (1.5) принять независимыми и нормальными, то для матрицы Фишера справедливо выражение:

$$F(a) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n (\partial \varepsilon_i / \partial a)^T (\partial \varepsilon_i / \partial a), \quad (2.1)$$

где слагаемое под знаком суммы есть матрица Фишера для момента t_i , $(\partial \varepsilon_i / \partial a)$ – вектор-строка. В соответствии с неравенством Рао–Крамера диагональные элементы матрицы

$$R(a) = F^{-1}(a)$$

являются нижними границами для дисперсий несмещенных оценок.

Производные $(\partial \varepsilon_i / \partial a)$ функций определяются из уравнения (1.2), и при фиксированном $t = t_i$ их можно выписать в явном виде (см. Приложение). Эти функции зависят от аномалии $\theta = \theta(t)$ и от ее производных по параметрам:

$$\partial \varepsilon / \partial \varphi = \Phi_1(\theta, \theta_\varphi), \quad \partial \varepsilon / \partial p = \Phi_2(\theta, \theta_p), \quad \partial \varepsilon / \partial e = \Phi_3(\theta, \theta_e), \quad (2.2)$$

где обозначено $\theta_\varphi = \partial \theta / \partial \varphi$, $\theta_p = \partial \theta / \partial p$, $\theta_e = \partial \theta / \partial e$. Заметим, что значения производных аномалии являются функциями времени. Для вычисления $\theta = \theta(t)$ и ее производных используем дифференциальное уравнение (1.4) с начальным условием (1.6). Формула для $\theta_0(a)$ выписана в Приложении. Продифференцировав (1.4) и (1.6) по параметрам, получим три дифференциальных уравнения:

$$d\theta_p/dt = \omega_p \theta, \quad d\theta_e/dt = \omega_e, \quad d\theta_\varphi/dt = \omega_\varphi, \quad (2.3)$$

где угловая скорость $\omega = \omega(p, e, \theta)$ зависит от трех переменных; а справа стоят ее производные по параметрам; начальные условия:

$$\theta_p(t_0) = \theta_{0,p}, \quad \theta_e(t_0) = \theta_{0,e}, \quad \theta_\varphi(t_0) = \theta_{0,\varphi}.$$

Решения (1.4) и (2.3) для всех четырех функций $\theta = \theta(t)$, $\theta_p(t)$, $\theta_e(t)$, $\theta_\varphi(t)$ в моменты $t_i = i\Delta t$, $i = 1, \dots, n$, получаем простым численным методом. Вычислительные формулы производных скорости по параметрам даны в Приложении. Производные $\partial \varepsilon_i / \partial a$ по параметрам для матрицы Фишера с изменением i вычисляются последовательно.

3. Некоторые расчетные результаты. 3.1. **Неподвижный наблюдатель.** Исходные параметры орбит: α и V – угол падения и скорость КТ (формулы связи (V, α) с (p, e) даны в Приложении); $L_a = \varphi R_3$ – расстояние до точки апогея; H_a – высота в апогее; φ – угол главной оси выбирался так, чтобы орбита была “неблагоприятной”, $\Delta t = 5$ с – дискретность измерений, $\sigma = 6'$ – стандартная ошибка измерений; N – количество наблюдений (доля времени наблюдения составляет 0.9).

Результаты нижних границ для с.к.о. приведены в табл. 2 для следующих параметров: σ_{V_a} – скорости V_a в апогее, σ_{V_y} – вертикальной V_y скорости, σ_Δ – расстояния Δ до точки падения. По результатам делаем следующие выводы:

- горизонтальную составляющую V_a можно оценить с точностью до единиц и десятков м/с,
- точность по месту падения для высоких и с малой скоростью орбит можно получить порядка сотен метров (выделено 571, 645, 719, ...),
- вертикальную составляющую вектора скорости оценить невозможно (погрешности порядка единиц километров в секунду).

Таблица 2. Расчетные значения границ с.к.о. для V_a , V_y и Δ

Характеристики по орбитам		Угол α , град					
		12	24	36	48	60	72
$V = 1$ км/с	H_a , км	2.2	8.6	17.8	28.4	38.6	46.5
	L_a , км	21	39	49	51	44	30
	N	7	14	21	27	31	34
	σ_{Δ} , м	1108	571	287	180	161	118
	σ_{V_a} , м/с	43	12	4.6	2.3	1.5	0.9
	σ_{V_y} , км/с	2.98	2.87	1.8	1.34	1.62	1.41
$V = 2$ км/с	H_a , км	9.4	35.8	74.3	118	159	191
	L_a , км	88	160	202	208	179	120
	N	15	29	43	55	64	69
	σ_{Δ} , м	1440	1170	645	543	406	306
	σ_{V_a} , м/с	36.3	13.6	5.6	3.4	2.0	1.2
	σ_{V_y} , км/с	5.7	10	7.3	8.5	7.7	7
$V = 3$ км/с	H_a , км	23	87	179	282	377	450
	L_a , км	216	387	480	486	411	273
	N	22	44	65	85	101	104
	σ_{Δ} , м	3562	1936	1359	1027	719	547
	σ_{V_a} , м/с	53.2	15.6	7.5	4.3	2.4	1.4
	σ_{V_y} , км/с	2.49	2.45	2.48	2.45	2.0	1.83

Таблица 3. Границы с.к.о. для V_a , V_y и Δ

Характеристики по орбитам		Угол α , град					
		12	24	36	48	60	72
$V = 1$ км/с	σ_{Δ} , м	1680	872	440	277	252	187
	σ_{V_a} , м/с	65.4	18.4	7.2	3.7	2.6	1.6
	σ_{V_y} , км/с	4.5	4.4	2.7	2.0	2.4	2.1
$V = 2$ км/с	σ_{Δ} , м	1790	1450	806	680	508	385
	σ_{V_a} , м/с	45.3	17.1	7.1	4.4	2.6	1.6
	σ_{V_y} , км/с	7.1	13	9.1	10	9.4	8.4
$V = 3$ км/с	σ_{Δ} , м	4130	2250	1600	1200	835	636
	σ_{V_a} , м/с	61.2	18.2	8.8	5	2.9	1.8
	σ_{V_y} , км/с	29	28	29	28	23	21

3.2. Подвижный наблюдатель. Широта наблюдателя принята равной $\varphi_n = 60^\circ$. При встречном движении наблюдателя и КТ результаты показаны в табл. 3. Видим увеличение всех значений (понятна причина: увеличение скорости взаимного приближения). При движении в одну сторону наблюдателя и КТ результаты показаны в табл. 4. Наблюдаем уменьшение всех значений (из-за уменьшения скорости взаимного приближения).

Таблица 4. Границы с.к.о. для V_a , V_y и Δ

Характеристики по орбитам		Угол α , град					
		12	24	36	48	60	72
$V = 1$ км/с	σ_{Δ} , м	649	334	170	109	98	71
	σ_{V_a} , м/с	25.2	6.9	2.6	1.3	0.8	0.4
	σ_{V_y} , км/с	1.7	1.7	1.1	0.85	1.1	0.95

Заключение. Выделено семейство неблагоприятных для наблюдателя орбит, плоскость которых касается орбиты движущегося наблюдателя, и точка касания является точкой пересечения соответствующих траекторий. Обоснована простая приближенная плоская модель движения—измерения, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы. Обоснование проведено вычислением погрешностей.

На этой модели проанализирована потенциальная точность с помощью информационной матрицы Фишера. Вычисление матрицы Фишера основано на численном решении дифференциального уравнения, выражающего второй закон Кеплера.

Рассчитаны границы для точностей параметров для семейства неблагоприятных орбит. Примеры показывают, что по угловым измерениям возможно получение практически интересных точностей для некоторых параметров (например, горизонтальной составляющей скорости).

В Приложении приведены все формулы, необходимые для проведения аналогичных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формула для начального значения аномалии. Начальное условие $\theta_0(\hat{\varepsilon}_0, \varphi, p, e)$ находим из уравнения (1.3), полагая известным измеренное значение $\hat{\varepsilon}_0$ начального угла места. Это значение может быть выбрано произвольным, поскольку для оценки возможных точностей не существенно, какое именно значение было начальным; важно, что оно известно и близко к 0. Полагаем $\hat{\varepsilon}_0 = 0$, записываем $\cos(\varphi - \theta_0)$ через косинус суммы, вводим неизвестное $x = \operatorname{tg}(\theta_0/2)$, через x выражаем $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$, и из полученного квадратного уравнения

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad \text{где} \quad A = a + c, \quad B = -2b, \quad C = c - a,$$

причем $a = \cos\varphi + e(R_3/p)$, $b = \sin\varphi$, $c = R_3/p$, получаем решение:

$$\theta_0 = 2\operatorname{arctg} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \theta_f = 2\operatorname{arctg} \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

θ_f — второй корень уравнения (финальная аномалия).

Оценка погрешности угла места при фиктивном движении наблюдателя. На рис. 2 СП — северный полюс, точка O — начало системы отсчета (x, y, z) ; ортогональные оси x и y находятся в плоскости орбиты, ось y направлена вдоль вектора V скорости наблюдателя в точке O , ось z — ортогональна орбитальной плоскости.

Истинное движение наблюдателя. Координаты (u_H, y_H) наблюдателя в плоскости P_H его движения в момент t записываются в виде:

$$u_H(t) = (R_3 \cos(\varphi_H))(1 - \cos(\omega_3 t)), \quad y_H(t) = R_3 \cos(\varphi_H) \sin(\omega_3 t),$$

R_3, ω_3 — радиус Земли и угловая скорость; t — время движения наблюдателя из точки O . Запишем вектор $r_H(t)$ координат наблюдателя в системе (x, y, z) :

$$r_H(t) = \begin{bmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \\ z_H(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_H \cos(\varphi_H) = -R_3 \cos^2(\varphi_H) [1 - \cos(\omega_3 t)] \\ (R_3 \cos(\varphi_H)) \sin(\omega_3 t) \\ u_H \sin(\varphi_H) = R_3 \sin(2\varphi_H) \cos(\omega_3 t) / 2 \end{bmatrix}.$$

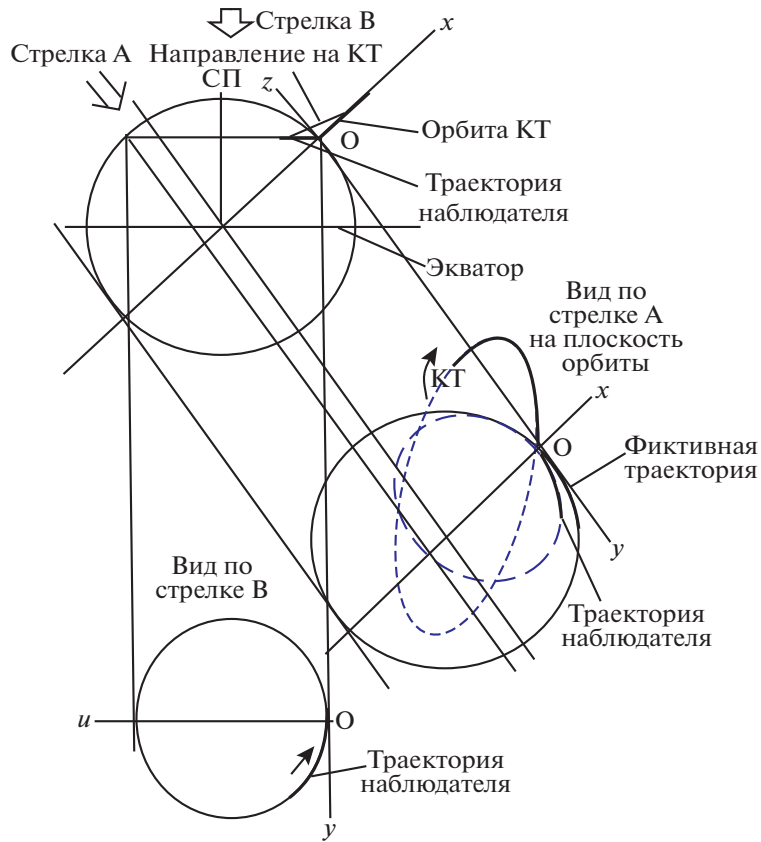


Рис. 2. Орбиты движений наблюдателя и КТ в трех проекциях

Вектор координат КТ в момент t обозначим через $r = (x, y, z = 0)^T$. Расстояние между КТ и наблюдателем равно $d_H(t) = |r - r_H(t)|$.

Фиктивное движение наблюдателя. Пусть $\omega_f = \omega_3 \cos \varphi_H$ – угловая скорость фиктивного движения; вектор координат

$$r_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_3 (1 - \cos(\omega_f t)) \\ R_3 \sin(\omega_f t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Расстояние между КТ и фиктивным наблюдателем:

$$d_f(t) = |r - r_f(t)|.$$

Разность расстояний $d_f(t)$ и $d_H(t)$:

$$\Delta d(t) = d_f(t) - d_H(t) = \Delta d(t; d, \varepsilon),$$

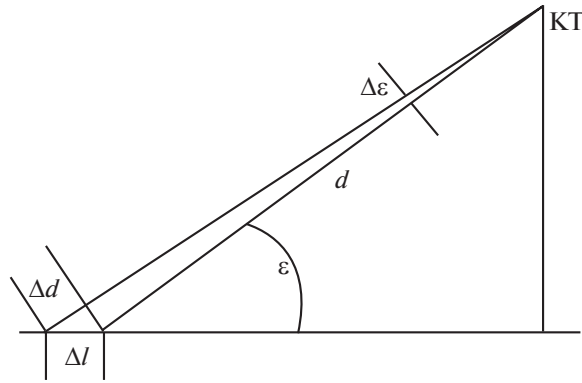
(d, ε) – координаты КТ (дальность и угол места из точки O).

Если $\Delta d(t) = 0$, то погрешность $\Delta \varepsilon(t) = 0$. Если $\Delta d(t) \neq 0$, то погрешность оценивается величиной

$$\Delta \varepsilon(t; d, \varepsilon) \approx (\Delta d/d) \operatorname{tge}$$

(рис. 3), а также расстоянием сдвига $\Delta l(t; d, \varepsilon) \approx \Delta d / \cos \varepsilon$, при котором $\Delta \varepsilon = 0$.

Формулы для производных угла по параметрам. Соотношение (1.2) связывает измеряемые углы ε с параметрами $a = (\varphi, p, e)$ орбиты и аномалией θ в любой момент t :

Рис. 3. Связь между Δd и $\Delta \varepsilon$

$\varepsilon = \varepsilon(\theta; \varphi, p, e)$. Найдем производные $\partial \varepsilon / \partial \varphi$, $\partial \varepsilon / \partial p$, $\partial \varepsilon / \partial e$ функции $\varepsilon(\varphi, p, e)$ по параметрам (φ, p, e) , опуская t . Дифференцируя (1.3) по φ , имеем

$$\cos(\varphi - \theta) \left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos^2 \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = -\sin(\varphi - \theta) \left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) - \frac{R_3}{p} e \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi},$$

откуда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = -\cos^2 \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)} \right) - \frac{R_3 e}{p} \frac{\sin \theta}{\sin(\varphi - \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right].$$

Аналогично имеем производные по p и по e :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial e} = \cos^2 \varepsilon \left[\frac{R_3}{p \sin(\varphi - \theta)} \cos \theta + \left(1 - e \cdot \frac{R_3 \sin \theta}{p \sin(\varphi - \theta)} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)} \right) \frac{\partial \theta}{\partial e} \right].$$

Получили три функции из (2.2) (для каждого момента t):

$$\Phi_1(\theta, \theta_\varphi), \Phi_2(\theta, \theta_p), \Phi_3(\theta, \theta_e),$$

где обозначено $\partial \theta / \partial \varphi = \theta_\varphi = \theta_\varphi(t)$, $\partial \theta / \partial p = \theta_p = \theta_p(t)$, $\partial \theta / \partial e = \theta_e = \theta_e(t)$. Заметим, что аномалия θ и ее производные по параметрам $\theta = \theta(t)$, $\theta_\varphi(t)$, $\theta_p(t)$, $\theta_e(t)$ являются функциями времени.

Производные угловых скоростей по параметрам. Из формулы (1.4) имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{3}{2} p^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\mu} (1 - e \cos \theta)^2, \quad \frac{\partial \omega}{\partial e} = -2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 - e \cos \theta) \cos \theta.$$

Формулы связи параметров (V, α) и (p, e) . Здесь приведены формулы пересчета параметров (V, α) – скорости V и угла α падения в параметры (p, e) – фокальный параметр p и эксцентриситет e .

1. Исходными соотношениями являются формулы для радиальной v_r и трансверсальной v_u составляющих:

$$v_r = \sqrt{\mu/p} e \sin \theta, \quad v_u = \sqrt{\mu/p} (1 - e \cos \theta),$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_r}{v_u} = \frac{e \sin \theta}{1 - e \cos \theta} = \frac{x}{y},$$

где $x = e \sin \theta$, $y = 1 - e \cos \theta$, $x = y \operatorname{tg} \alpha$ причем

$$x^2 + (1 - y)^2 = e^2.$$

2. Условие пересечения орбиты со сферой запишем уравнением

$$\frac{p}{1 - e \cos \theta} = \frac{p}{y} = R_3,$$

тогда $y = \frac{p}{R_3}$, $x = y \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{R_3} \operatorname{tg} \alpha$.

3. Модуль скорости

$$V^2 = v_r^2 + v_u^2 = (\mu/p)(x^2 + y^2),$$

$$x^2 + y^2 = \frac{p}{\mu} V^2, \quad \left(\frac{p}{R_3} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 + \left(\frac{p}{R_3} \right)^2 = \frac{p}{\mu} V^2.$$

После сокращения на p имеем

$$\frac{p}{R_3^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = \frac{V^2}{\mu}.$$

Тогда, используя обозначение $p/R_3 = p_R$, получаем выражение для p и e через V и α :

$$p = p_R R_3, \quad p_R = \frac{R_3}{\mu} \frac{V^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1},$$

$$y = p_R, \quad x = y \operatorname{tg} \alpha = p_R \operatorname{tg} \alpha,$$

$$e^2 = x^2 + (1 - y)^2 = (p_R \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - p_R)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chang C.B.* Optimal State Estimation of Ballistic Trajectories with Angle-only Measurements // M.I.T., Lincoln Laboratory, Technical Note 1979–1. 1979.
2. *Chang C.B., Tabaczynski J.* Application of State Estimation to Target Tracking // IEEE Trans. Automatic Control. 1984. V. 29. № 2. P. 98–109.
3. *Саврасов Ю.С.* Методы определения орбит космических объектов. М.: Машиностроение, 1981.
4. *Саврасов Ю.С.* Алгоритмы и программы в радиолокации. М.: Радио и связь, 1985.
5. *Аким Э.Л., Энеев Т.М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Т. 1. № 1. С. 5–50.
6. *Молотов Е.П., Тучин А.Г.* Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса. М.: Радиотехника, 2016.
7. *Колесса А.Е., Пругло А.В., Равдин С.С.* Восстановление орбит по угловым измерениям // Радиотехника. 2005. № 10. С. 5–9.
8. *Булычев В.Ю., Булычев Ю.Г., Ивакина С.С.* Пассивная локация на основе угловых и мощностных измерений системы пеленгаторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 1. С. 65–73.
9. *Булычев В. Ю., Булычев Ю.Г., Ивакина С.С.* Угломерно-энергетический метод нестационарной пассивной локации на базе однопозиционной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 122–136.
10. *Chang C.B., Athans M., Whiting R.* On the State and Parameter Estimation for Maneuvering Reentry Vehicles // IEEE Trans. Automatic Control. 1977. V. 22. № 1. P. 99–105.
11. *Колесса А.Е.* Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочно-линейного типа // АиТ. 1986. № 4. С. 48–55.
12. *Колесса А.Е.* Некоторые прикладные вопросы кусочно-линейной фильтрации // АиТ. 1986. № 5. С. 61–69.
13. *Колесса А.Е.* Точные формулы оптимальной фильтрации для нестационарной кусочно-линейной задачи оценивания параметра // АиТ. 1989. № 12. С. 69–80.
14. *Miller R.W.* A Lower Bound on Angle – only Tracking Accuracy // M.I.T. Lincoln Laboratory. Project Report No. RMP–149. 1978.

15. *Brehard T., le Cadre J.P.* Closed-Form Posterior Cramer – Rao Bounds for Bearings – Only Tracking // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 2006. V. 42. № 4.
16. *Brehard T., le Cadre J.P.* Closed – form Posterior Cramer – Rao Bound for a Maneuvering Target in the Bearings – Only Tracking Context Using Best – Fitting Gaussian Distribution // 9th Intern. Conf. on Information Fusion. Florence, Italy. 2006.
17. *Farina A., Benvenuti D., Ristic B.* Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 2002. V. 38. № 3. P. 854–867.
18. *Farina A., Ristic B., Timmoneri L.* Cramer – Rao Bound for Nonlinear Filtering with $P_d < 1$ and its Application to Target Tracking // IEEE Trans. Signal Processing. 2002. V. 50. № 8. P. 1916–1924.
19. *Ristic B., Farina A., Benvenuti D., Arulampalam M.S.* Performance Bounds and Comparison of Nonlinear Filters for Tracking a Ballistic Object on Re-entry // IEEE Proceedings – Radar, Sonar and Navigation. 2003. V. 150. № 2. P. 65–70.