
**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 517.977.5-629.783

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ РАСКРЫТИЯ
И СОЗДАНИЯ ФОРМЫ ТРАНСФОРМИРУЕМОГО
РЕФЛЕКТОРА КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ¹**

© 2021 г. С. А. Кабанов^{a,*}, Ф. В. Митин^{a,**}

^a БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: kaba-sa@mail.ru

**e-mail: fedor28@list.ru

Поступила в редакцию 13.09.2019 г.

После доработки 11.05.2020 г.

Принята к публикации 25.05.2020 г.

Представлены математические модели раскрытия и настройки крупногабаритного рефлектора космического базирования. Разработаны алгоритмы оптимального управления для автоматического развертывания элементов антенны и настройки радиоотражающего сетеполотна. Приведены результаты численного моделирования, показывающие преимущество использования алгоритма коррекции параметров структуры управления по сравнению с классическими методами.

DOI: 10.31857/S0002338820060050

Введение. Современный этап развития радиотехнических систем различного назначения связан с разработкой и применением крупногабаритных раскрывающихся антенн-рефлекторов, устанавливаемых на космических аппаратах (КА). При этом возникают новые задачи управления. Так как антенны доставляются на космические орбиты в сложенном состоянии, то необходимо правильно реализовать процесс раскрытия и обеспечить функционирование проектируемой механической системы. Несмотря на значительные успехи в области проектирования раскрывающихся крупногабаритных трансформируемых конструкций космического базирования [1, 2], важной остается задача их плавного и надежного раскрытия.

Крупногабаритный трансформируемый рефлектор (КТР) космического базирования (рис. 1) с использованием вантовой системы состоит из КА (1), относительно которого разворачиваются элементы солнечных батарей (2), обеспечивающих энергией установку, системы (3), облучающей отражающую поверхность. Также в состав рефлектора входит штанга (4), выдвигающая рефлектор (5) на необходимое расстояние, и сетеполотно (6), формирующие необходимую диаграмму направленности. В точках А, В и С находятся двигатели (7), которые переводят КТР из сложенного транспортноразмещенного положения в развернутое штатное.

В общем виде задача раскрытия КТР на каждом этапе решается за счет воздействия на конструкцию исполнительных механизмов (актюаторов). В настоящее время развертывание различных видов крупногабаритных рефлекторов (ферменных, зонтичных, кольцевых и др.) производится за счет энергии пружин или деформированных упругих элементов [3, 4]. Очевидные недостатки данного способа: невозможность осуществления синтеза управления при процессе раскрытия, необходимость создания макета и проведения дополнительных расчетов для определения степени сжатия пружин или закручивания элементов, наличие колебаний и прогибов конструкции.

Альтернативой классическим могут являться автоматические системы, в которых энергия для развертывания элементов рефлектора производится за счет приводов, в частности электрической машины. Для раскрытия рефлекторов расчет динамики и прочности конструкции является одним из определяющих факторов. В процессе приведения КТР в рабочее состояние и после его завершения возникают высокие напряжения в элементах конструкции в результате импульсных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00646).

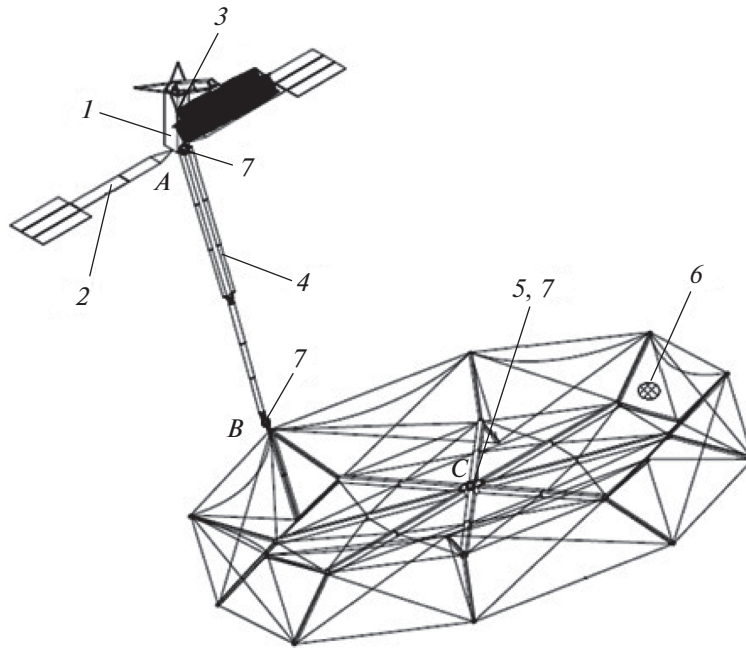


Рис. 1. КТР с использованием тросовой системы поддержания формы рефлектора

воздействий со стороны управляющего органа, а также механизмов упора и фиксации. Вследствие чего могут возникать колебания всего спутника, что приведет к длительному времени неактивности аппарата или даже к его выходу из строя. Решение задачи минимизации колебаний конструкции является не тривиальным и требует особого подхода к каждой рассматриваемой системе [5, 6].

Точность поддержания заданной формы обеспечивает высокое качество передаваемого сигнала. В условиях открытого космоса конструкция подвержена различным возмущающим воздействиям, таким, как перепад температур, радиация, и возникает задача настройки и поддержания формы радиоотражающего сетеполотна.

Ввиду больших затрат на проведение испытаний в космической отрасли важным является этап математического моделирования. Поэтому возникает задача построения адекватной математической модели [7, 8]. А.А. Красовский в работе [9] писал: “Разработка математических моделей требуемого уровня адекватности, их идентификация и сертификация (верификация) для многих новых процессов, объектов и технологий требует очень высоких интеллектуальных и материальных затрат. Для ряда объектов и процессов создание верифицированных математических моделей невозможно без натурных испытаний, а объекты и процессы не могут быть доведены до натурных испытаний без таких математических моделей (т.е. возникает “порочный круг”)”.

1. Описание системы и постановка задачи. При развертывании КТР имеют место поступательное и вращательное движения. Развертывание происходит поэтапно по соответствующим видам движения. Для описания динамики воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода с учетом диссипативных сил [7].

1.1. Раскрытие спицы рефлектора. Вращательное движение встречается при раскрытии штанг и спиц. Математические модели динамики, описанные системой дифференциальных уравнений, на всех этих этапах аналогичны друг другу, а конструкции отличаются только массогабаритными параметрами.

Рассмотрим разворот спицы. Примем, что один актюатор разворачивает только одну спицу в одной плоскости (рис. 2). Спица одним концом жестко закреплена за силовой каркас рефлектора.

Система дифференциальных уравнений первого порядка для определения прогиба спицы h при ее повороте на угол φ имеет вид [7] $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{f}(\mathbf{X}_p, u, t)$, где $\mathbf{X}_p = (\varphi \ \omega \ h \ V_{изг})^T$ – вектор состояния процесса раскрытия, u – вектор управления, t – время, ω – угловая скорость поворота спицы,

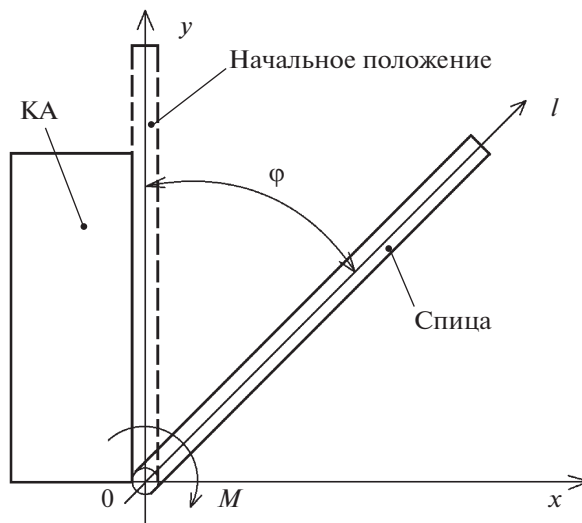


Рис. 2. Раскрытие спицы рефлектора

$V_{\text{изг}}$ – линейная скорость изгиба спицы. В поэлементном виде система представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} &= \frac{M_{\text{п}}(U_1) - M_{\text{тр}} - M_{\text{упор}}(\varphi, \omega) - M_{\text{ф}}(\varphi, \omega)}{I}, \\ \dot{h} = V_{\text{изг}}, \quad \dot{V}_{\text{изг}} &= -\frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} - \gamma \frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 V_{\text{изг}}}{\partial l^4} + \frac{2}{\rho S} \frac{\partial M(U_1, \varphi, \omega)}{\partial l}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $M_{\text{п}}$ – полезный момент, создаваемый бесколлекторной машиной; U_1 – напряжение питания бесколлекторной машины; $M_{\text{тр}}$ – момент трения; $M_{\text{упор}}$ – момент, создаваемый упором; $M_{\text{ф}}$ – момент, создаваемый фиксатором; I – момент инерции спицы; E – модуль упругости; $I_{\text{изг}}$ – изгибной момент инерции; ρ – плотность материала спицы; S – площадь спицы в поперечном сечении; γ – коэффициент затухания; M – общий момент, действующий на спицу: $M = M_{\text{п}} - M_{\text{тр}} - M_{\text{упор}} - M_{\text{ф}}$. С учетом функций Крылова [10] значения $\partial^4 h / \partial l^4$, исходя из граничных условий при $l = 0$ и $l = a$, определяются как

$$\begin{aligned} \partial^4 h / \partial l^4 &= \rho S \omega_{\text{сизг } k}^2 h(l) \sin(\omega_{\text{сизг } k} t) / (EI_{\text{изг}}); \\ \partial^4 V_{\text{изг}} / \partial l^4 &= \partial / \partial t (\partial^4 h / \partial l^4) = \rho S \omega_{\text{сизг } k}^3 h(l) \cos(\omega_{\text{сизг } k} t) / (EI_{\text{изг}}), \end{aligned}$$

где $\omega_{\text{сизг } k}$ – k -я собственная частота изгибных колебаний;

$$h(l) = CK_3(Z_k) + DK_4(Z_k); \quad (1.2)$$

$K_3 = 0.5(\text{ch}Z_k - \cos Z_k)$; $K_4 = 0.5(\text{sh}Z_k - \sin Z_k)$; $Z_k = l\rho S\omega_{\text{сизг } k}^2 / (EI_{\text{изг}})$; C, D – коэффициенты, определяемые из граничных условий задачи. Для определения $\partial M / \partial l$ примем, что полный момент силы M создается на радиусе вала двигателя $R_{\text{дв}}$, приводящего систему в движение; $\partial M / \partial l|_{l=R_{\text{дв}}} = M / R_{\text{дв}}$, $R_{\text{дв}} = 0.5$ м.

Моменты, действующие на спицу при раскрытии, определяются как [7]

$$\begin{aligned} M_{\text{упор}} &= (k_{\text{у.упор}}\Delta\varphi + c_{\text{д.упор}}\dot{\varphi})H_{\text{упор}}(\Delta\varphi), \quad M_{\text{ф}} = (k_{\text{у.ф}}\Delta\varphi + c_{\text{д.ф}}\dot{\varphi})H_{\text{ф}}(\Delta\varphi), \\ M_{\text{п}} &= m_{\text{фаз}}\rho E_0 U_1 \sin \vartheta / (\omega_1 X_{\text{синхр}}), \end{aligned}$$

где $k_{\text{у.упор}(\varphi)}$ – коэффициент жесткости упругой компоненты модели упора (фиксатора); $c_{\text{д.упор}(\varphi)}$ – коэффициент демпфирования вязкой компоненты модели упора (фиксатора); $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_f$ – относительный угол, соответствующий моменту t_f установки на упор (фиксатор) спицы при дости-

жении конечного угла раскрытия φ_f ; $H_{\text{упор}}(\Delta\varphi)$ – функция, которая принимает значение 1 (при $\Delta\varphi > 0$) или 0 (при $\Delta\varphi < 0$); $H_{\varphi}(\Delta\varphi)$ – функция, которая принимает значение 1 (при $\Delta\varphi < 0$) или 0 (при $\Delta\varphi > 0$) при условии, что спица уже достигла φ_f , т.е. сработал упор и $H_{\text{упор}}(\Delta\varphi) = 1$; $m_{\text{фаз}}$ – число фаз ротора; p – число пар полюсов магнитного поля, E_0 – действующее значение электро-движущей силы (ЭДС) на обмотке статора; ϑ – угол рассогласования (между U_1 и E_0 , для двигателя находится в пределах $[0, \pi/2]$); ω_1 – угловая скорость вращения ротора двигателя; $X_{\text{синхр}}$ – синхронное сопротивление ($X_{\text{синхр}} = X_{\sigma} + X_a$, где X_{σ} и X_a – индуктивные сопротивления рассеяния и реакции якоря соответственно).

Исходя из результатов численного моделирования, полученных в [7], система (1.1) написана в предположении, что момент инерции постоянный. Угловые скорости ω при раскрытии спицы не превышают 10^{-2} рад/с, тогда при рассматриваемых параметрах ($m = 32$ кг – масса спицы, $a = 30$ м – длина спицы) центробежная сила $F_{\text{ц}} = m\omega^2 a = 4.7 \times 10^{-2}$ Н. Нормальное напряжение в поперечном сечении $\sigma = F_{\text{ц}}/S = 6$ Н/м². Из закона Гука сила упругости $F_y = k\Delta l$ [11], где $k = ES/a$, $\varepsilon = \Delta l/a$, т.е. $\sigma = E\varepsilon$ и относительное удлинение $\varepsilon = \sigma/E = 5 \times 10^{-11}$. Следовательно, абсолютное удлинение $\Delta l = 1.5 \times 10^{-9}$ м. Возникающая при этом сила Кориолиса $F_K = 2m\omega\Delta l$ не превышает $F_K = 10^{-11}$ Н, где $\Delta l = 10^{-11}$ м/с – скорость удлинения спицы в процессе ее поворота, определенная из результатов моделирования. Закон Гука при изгибе $\sigma = M_{\text{изг}}/W$ [11], где $M_{\text{изг}}$ – момент изгиба, W – момент сопротивления изгибу. Для наибольшего нормального напряжения на поверхности изгиба на половине длины спицы ($M_{\text{изг}} = 0.25F_K a = 15 \times 10^{-12}$ Нм, $W = \pi D^4/8 = 0.22$ Нм) получаем $\sigma = M_{\text{изг}}/W = 7 \times 10^{-11}$. При данных порядках величин момент инерции можно считать постоянным.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить интегрирование как по времени, так и по длине. Конструктивно спица имеет вид цилиндрической трубы с внешним радиусом R и изготовлена из материала с плотностью ρ и модулем упругости E . За исполнительный двигатель был взят A2212 Brushless Inrunner. Напряжение питания U_1 , $|U_1| \leq U_{1\text{max}}$ выберем в качестве управления и будем изменять его значения для достижения конечного угла раскрытия.

Момент трения рассчитывается динамически в процессе моделирования системы по формуле [12] $M_{\text{тр}} = \varphi_{\text{ish}}\varphi_{\text{rs}}M_{\text{rr}} + M_{\text{sl}} + M_{\text{seal}} + M_{\text{drag}}$, где φ_{ish} – коэффициент уменьшения за счет нагрева смазочного материала, φ_{rs} – коэффициент уменьшения в режиме кинематического голодания, где M_{rr} – момент трения качения, M_{sl} – момент трения скольжения, M_{seal} – момент трения уплотнений, M_{drag} – момент трения за счет сопротивления смазки, взбалтывания, разбрызгивания и пр.

Примем, что спица является тонкостенным кольцом в плоскости изгиба. При этом в сложном состоянии звенья жестко закреплены и никаких дополнительных перемещений звеньев относительно друг друга не происходит.

Требуется найти такое управление U_1^* , которое переведет систему (1.1) из начального состояния $X_p(0)$ в конечное $X_p(t_f)$ при минимизации прогиба спицы h при ограничении на управление U_1 за конечное время t_f

1.2. В ы д в и ж е н и е с п и ц ы р е ф л е к т о р а. Одним из этапов развертывания КТР является выдвигание спицы (рис. 3). Необходимо выдвинуть спицу рефлектора космического базирования длиной $x_{\text{выдв}}$ и массой $m_{\text{выдв}}$ из начального транспортировочного положения x_0 в конечное заданное x_f .

Система дифференциальных уравнений, описывающих динамику выдвигания спицы, имеет вид [7] $\dot{X}_b = f(X_b, u, t)$, где $X_b = (x \ V \ \Delta x_{\text{сж}} \ V_{\text{сж}})^T$ – вектор состояния процесса выдвигания, x – длина выдвигания спицы; V – линейная скорость выдвигания спицы, $\Delta x_{\text{сж}}$ – продольная

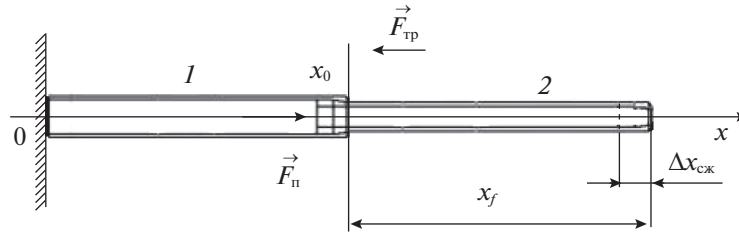


Рис. 3. Выдвижение спицы рефлектора

деформация, $V_{сж}$ – линейная скорость сжатия спицы. В поэлементном виде система представляется следующим образом:

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = \frac{F_{п}(U_1) - F_{тр} - F_{упор}(x, V) - F_{ф}(x, V)}{m_{выдв}}, \quad (1.3)$$

$$\Delta \dot{x}_{сж} = V_{сж}, \quad \dot{V}_{сж} = -\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \Delta x_{сж}}{\partial x^2} - \gamma \frac{E}{\rho} \frac{\partial V_{сж}}{\partial x} - \frac{F(U_1, x, V)}{\rho S},$$

где $F_{п}$ – полезная сила; $F_{тр}$ – сила трения, $F_{упор}$ – сила, создаваемая упором; $F_{ф}$ – сила, создаваемая фиксатором; $m_{выдв}$ – масса выдвигаемой части; F – общая сила, действующая на спицу: $F = F_{п} - F_{тр} - F_{упор} - F_{ф}$. С учетом функций Крылова [7, 10] значение $\partial^2 \Delta x_{сж} / \partial x^2$, исходя из граничных условий при $x = 0$ и $x = x_{выдв}$, равно $\partial^2 \Delta x_{сж} / \partial x^2 = \rho \omega_{с\text{прод } k}^2 \sin(\omega_{с\text{прод } k} t) / E$, где $\omega_{с\text{прод } k}$ – k -я собственная частота продольных колебаний. В работе [7] показано, что

$$\partial \Delta x_{сж} / \partial x = \sqrt{\rho / E} \omega_{с\text{прод } k} \cos(\sqrt{\rho / E} \omega_{с\text{прод } k} x) \sin(\omega_{с\text{прод } k} t),$$

тогда можно записать

$$\partial V_{сж} / \partial x = \partial / \partial t (\partial \Delta x_{сж} / \partial x) = \sqrt{\rho / E} \omega_{с\text{прод } k}^2 \cos(\sqrt{\rho / E} \omega_{с\text{прод } k} x) \cos(\omega_{с\text{прод } k} t).$$

Для описания $F_{п}$ можно использовать уравнение, аналогичное $M_{п}$ в системе (1.1). Для создания $F_{п}$ необходимо учитывать конструкцию передачи, например цепную, зубчатую и т.д., что само по себе является отдельной технической задачей. Для полного описания также необходимо учитывать люфты и “мертвые” зоны механизма. Ввиду всего вышесказанного уравнение для $F_{п}$ будет состоять из уравнения типа $M_{п}$ в системе (1.1), умноженного на коэффициент k_f , который отвечает за преобразование вращающего момента в толкающую силу $F_{п} = k_f M_{п}$. Аналогично этапу раскрытия спицы учтем воздействие механизмов упора и фиксации.

При выдвижении спицы необходимо минимизировать сжатие $\Delta x_{сж}$, так как оно является эффективным показателем нагрузок, оказываемых на спицу. Силу трения $F_{тр}$ примем равной константе. Соединение между звеньями 1 и 2 можно считать без наличия люфтов.

Управление выдвижением происходит за счет изменения напряжения питания электродвигателя $u = U_1$, $|U_1| \leq U_{1\text{max}}$. Требуется найти такое управление U_1^* , которое переведет систему (1.3) из начального состояния $X_b(0)$ в конечное $X_b(t_f)$ при минимизации сжатия спицы $\Delta x_{сж}$ и ограничении на управление U_1 за конечное время t_f .

1.3. Настройка формы радиоотражающей поверхности. Рассмотрим процесс настройки формы радиоотражающей поверхности. На рис. 4 представлена одна спица в сечении: 1 – спица, 2 и 3 – внешняя и задняя сетка, 4 – ванты, в которых установлены актюаторы. Необходимо, изменяя длину вант 4 с помощью актюаторов 5, задать желаемую форму радиоотражающего сетеполотна 2.

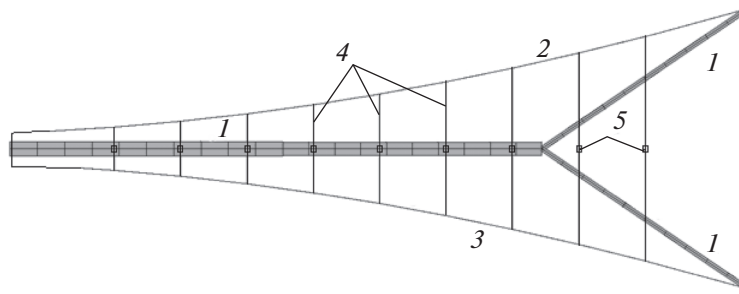


Рис. 4. Настройка формы радиоотражающего сетеполотна

Для определения формы радиоотражающего сетеполотна в пространстве удобно представить ее в виде мембраны. Тогда дифференциальное уравнение мембраны можно описать уравнением Лапласа [8]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S_M}, \quad (1.4)$$

где x, y, z – оси координат, q – распределенная нагрузка, S_M – площадь поверхности мембраны.

В качестве актюаторов рассматривались пьезопривод, двигатель постоянного тока (ДПТ). Система дифференциальных уравнений, описывающих пьезоэлемент с исполнительным органом, имеет вид [13] $\dot{X}_{пэ} = f(X_{пэ}, u, t)$, где $X_{пэ} = (\Delta l_{пэ} \ V_{пэ} \ U_{пэ})^T$ – вектор состояния пьезоэлемента; $\Delta l_{пэ}$ – изменение длины (ход) пьезоактюатора; $V_{пэ}$ – скорость выдвигания пьезоактюатора; $U_{пэ}$ – напряжение, приложенное к электродам пьезоактюатора, или

$$\begin{aligned} \Delta \dot{l}_{пэ} &= V_{пэ}, \\ \dot{V}_{пэ} &= \frac{K_0 U_{пэ} + F_{стат} - K_{у.пэ} \Delta l_{пэ} - K_{д.пэ} V_{пэ}}{m_{\Sigma}}, \\ \dot{U}_{пэ} &= \frac{e_n}{C_0 R_{внут} K_{д.пэ}} - \frac{U_{пэ}}{C_0 R_{внут} K_{д.пэ}} - \frac{K_n V_{пэ}}{C_0 K_{д.пэ}}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где K_0 – коэффициент обратного пьезоэффекта, $F_{стат}$ – статическое усилие, $K_{у.пэ}$ – коэффициент упругости пьезоактюатора, $K_{д.пэ}$ – коэффициент внутреннего демпфирования пьезоактюатора, e_n – напряжение от источника ЭДС, C_0 – емкость, $R_{внут}$ – внутреннее сопротивление, K_n – коэффициент прямого пьезоэффекта, m_{Σ} – суммарная масса, состоящая из массы самого пьезоактюатора и перемещаемой массы.

Задача управления пьезоактюатором состоит в приведении его из начального положения $X_{пэ}(0)$ в заданное конечное состояние $X_{пэ}(t_f)$ при ограничении на управление, за которое принято напряжение от источника ЭДС $e_n, |e_n| \leq e_{n \max}$.

Система уравнений, описывающая ДПТ с учетом угла поворота вала, имеет вид [14] $\dot{X}_{дпт} = f(X_{дпт}, u, t)$, где $X_{дпт} = (\varphi_{вал} \ \omega_{вал} \ I_{я})^T$ – вектор состояния ДПТ; $\varphi_{вал}$ – угол поворота вала двигателя; $\omega_{вал}$ – угловая скорость вращения вала двигателя; $I_{я}$ – ток якоря, или

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{вал} &= \omega_{вал}, \\ \dot{\omega}_{вал} &= \frac{k_m I_{я} - M_{внеш}}{J_{я}}, \\ \dot{I}_{я} &= \frac{U_{дпт} - R_{я} I_{я} - k_e \omega_{вал}}{L_{я}}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где k_m – коэффициент пропорциональности (постоянная момента двигателя), $M_{внеш}$ – момент внешних сил, $J_{я}$ – момент инерции ротора двигателя, $U_{дпт}$ – внешнее напряжение ДПТ, $R_{я}$ – ак-

тивное сопротивление обмотки якоря, k_e – коэффициент пропорциональности (постоянная ЭДС двигателя), $L_{я}$ – индуктивность якорной обмотки. В качестве редуктора рассматривается диск радиуса $R_{ред}$, который одевается непосредственно на вал двигателя и обеспечивает изменение длины ванта на длину $\Delta l_{ДПТ} = \varphi_{вал} R_{ред} \pi / 180^\circ$.

Задача управления ДПТ состоит в приведении его из начального положения $\mathbf{X}_{ДПТ}(0)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{X}_{ДПТ}(t_f)$ при ограничении на управление, за которое принято внешнее напряжение питания U_a , $|U_a| \leq U_{amax}$.

2. Разработка стратегий управления. Оптимизация процесса создания и поддержания формы КТР космического базирования является сложной задачей. Построение устойчивых алгоритмов поиска оптимальной траектории в реальном масштабе времени затруднено, а зачастую невозможно ввиду трудности обеспечения сходимости решений, возникающих из принципа максимума [15, 16] двухточечных краевых задач. Поэтому требуется разработать методику и алгоритмы, которые позволят получать надежное решение задачи оптимизации траектории в реальном времени движения.

Одним из возможных подходов к решению задачи синтеза оптимального управления является разработка алгоритма оптимизации движения с коррекцией параметров структуры управления [17–19]. При этом управление может вычисляться в реальном времени в процессе раскрытия как функция текущих значений фазовых координат. В этом случае из применения принципа максимума определяется структура управления, параметры которой оптимизируются во вспомогательной задаче.

Системы (1.1) и (1.3) содержат в правых частях уравнений частные производные. Примем, что параметры колебаний данных систем вычисляются на конце спицы, т.е. при $l = a$. Также будем считать первую форму колебаний на конце спицы, так как первая форма вносит самый большой вклад в амплитуду колебаний, а на конце спицы они максимальны. Тогда частные производные $\partial^4 h / \partial l^4$, $\partial^4 V_{изг} / \partial l^4$, $\partial^2 \Delta x_{сж} / \partial x^2$, $\partial V_{сж} / \partial x$ примут конкретные значения, что позволяет применять принцип максимума Понтрягина, который был разработан применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачи разворота, выдвижения спицы и настройки сетеполотна при наличии наблюдений по полным данным и при отсутствии возмущений.

2.1. Раскрытие спицы рефлектора. Используем принцип максимума для поиска оптимального управления с учетом постановки задачи минимизации прогиба h на всем времени развертывания. В качестве целевого рассмотрим интегротерминальный функционал:

$$J = \mathbf{V}_f(\mathbf{X}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{X}, u, t) dt, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{V}_f = 0.5[\mathbf{X}_p(t_f) - \mathbf{X}_{p_f}]^T \boldsymbol{\rho}[\mathbf{X}_p(t_f) - \mathbf{X}_{p_f}]$; $f_0 = 0.5h^2/k_p^2$; $\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, k_p – коэффициенты этапа раскрытия; $\mathbf{X}_{p_f} = (\varphi_f \ \omega_f \ h_f \ V_{изг_f})^T$ – заданные конечные значения соответствующих переменных процесса раскрытия. В системе уравнений (1.1) прогиб h зависит и от времени, и от длины, поэтому для упрощения вычислений в первом приближении прогиб можно принять равным $h(l) = Ml^2 / (2EI_{изг})$, где M – общий момент, действующий на спицу [20]. Так как $M = EI_{изг} \partial^2 h / \partial l^2$, то $h(l) = 0.5l^2 \partial^2 h / \partial l^2$. Исходя из (1.2) получим $\partial^2 h / \partial l^2 = \alpha^2 [AK_1(Z_k) + BK_2(Z_k)]$, где $\alpha = \rho S \omega_{изг}^2 / (EI_{изг})$; $K_1 = 0.5(\text{ch} Z + \cos Z)$, $K_2 = 0.5(\text{sh} Z + \sin Z)$, A, B – коэффициенты, определяемые из граничных условий задачи. Прделав данные преобразования получаем выражение для первого приближения прогиба в виде $h(l) = 0.5l^2 \alpha^2 [AK_1(Z_k) + BK_2(Z_k)]$, подставив в него значения коэффициентов A, B получим уравнение идентичное (1.2). Данное упрощение является допустимым, поскольку принимается, что максимальный прогиб достигается на конце спицы. Спица в каждый момент времени жестко закреплена одним концом, а второй конец является свободным. На спицу действует момент, приложенный к закрепленному концу спицы.

Поскольку в терминальную часть функционала (2.1) входят требования не только к конечным значениям угла φ и прогиба h , но и к их производным, то механизмы упора и фиксатора при оп-

тимальном управлении будут нести в себе только функции собственно фиксации спиц при достижении упора и не приводить к колебаниям в этих механизмах.

С учетом сделанных допущений гамильтониан системы (1.1) примет вид $H = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}_p) + f_0$, где $\mathbf{P} = [P_\varphi \ P_\omega \ P_h \ P_{V_{изг}}]^T$ – вектор сопряженных переменных, или

$$H = P_\varphi \omega + P_\omega \frac{M_\Pi - M_{тр}}{I} + P_h V_{изг} + P_{V_{изг}} \left(-\frac{EI_{изг}}{\rho S} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} - \gamma \frac{EI_{изг}}{\rho S} \frac{\partial^4 V_{изг}}{\partial l^4} + \frac{2}{\rho S} \frac{M_\Pi - M_{тр}}{R_{дв}} \right) + \frac{1}{8} \frac{l^4}{E^2 I_{изг}^2 k_p^2} (M_\Pi^2 - 2M_\Pi M_{тр} + M_{тр}^2).$$

Найдем сопряженные переменные:

$$\begin{aligned} \dot{P}_\varphi &= 0, & \dot{P}_\omega &= -P_\varphi, & \dot{P}_h &= 0, & \dot{P}_{V_{изг}} &= -P_h; & P_\varphi(t_f) &= \rho_1[\Phi(t_f) - \varphi_f], \\ P_\omega(t_f) &= \rho_2[\omega(t_f) - \omega_f], & P_h(t_f) &= \rho_3[h(t_f) - h_f], & P_{V_{изг}}(t_f) &= \rho_4[V_{изг}(t_f) - V_{изг f}]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как на управление наложено ограничение $|U_1| \leq U_{1 \max}$, то оно определяется из условия [16] $\partial H / \partial U_1 = 0$:

$$U_1(t) = \frac{M_{тр}(t)}{A} - P_\omega(t) \frac{4E^2 I_{изг}^2 k_p^2}{AI} - P_{V_{изг}}(t) \frac{8E^2 I_{изг}^2 k_p^2}{A\rho S R_{дв}} \quad (2.3)$$

при $|U_1| < U_{1 \max}$ или $U_1 = U_{1 \max} \text{sign} U_1$ при $|U_1| \geq U_{1 \max}$, где $A = m_{\text{фаз}} p E_0 \sin \vartheta / (\omega_1 X_{\text{синхр}})$.

2.2. В ы д в и ж е н и е с п и ц ы р е ф л е к т о р а. Аналогично этапу раскрытия спицы рассмотрим этап выдвигания. Исходя из постановки задачи, целевой критерий примем в виде

$$J = \mathbf{V}_f(\mathbf{X}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{X}, u, t) dt, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{V}_f = 0.5[\mathbf{X}_B(t_f) - \mathbf{X}_{B f}]^T \boldsymbol{\rho}[\mathbf{X}_B(t_f) - \mathbf{X}_{B f}]$; $f_0 = 0.5 \Delta x_{\text{сж}}^2 / k_B^2$; $\mathbf{X}_{B f} = (x_f \ V_f \ \Delta x_{\text{сж} f} \ V_{\text{сж} f})^T$ – заданные конечные значения соответствующих переменных; $\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, k_B – коэффициенты этапа выдвигания.

В первом приближении сжатие $\Delta x_{\text{сж}}$ можно принять равным [20] $\Delta x_{\text{сж}} = Fl / (ES)$, где F – общая сила, действующая на спицу. Для оптимального управления по критерию (2.4) при наличии в системе упора и фиксатора аналогично случаю раскрытия спицы гамильтониан системы (1.3) примет вид $H = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}_B) + f_0$, где $\mathbf{P} = [P_x \ P_V \ P_{\Delta x_{\text{сж}}} \ P_{V_{\text{сж}}}]^T$ – вектор сопряженных переменных, или

$$H = P_x V + P_V \frac{F_\Pi - F_{тр}}{m_{\text{выдв}}} + P_{\Delta x_{\text{сж}}} V_{\text{сж}} + P_{V_{\text{сж}}} \left(-\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \Delta x_{\text{сж}}}{\partial x^2} - \gamma \frac{E}{\rho} \frac{\partial V_{\text{сж}}}{\partial x} - \frac{F_\Pi - F_{тр}}{\rho S} \right) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{E^2 S^2 k_B^2} (F_\Pi^2 - 2F_\Pi F_{тр} + F_{тр}^2).$$

Найдем сопряженные переменные

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= 0, & \dot{P}_V &= -P_x, & \dot{P}_{\Delta x_{\text{сж}}} &= 0, & \dot{P}_{V_{\text{сж}}} &= -P_{\Delta x_{\text{сж}}}; & P_x(t_f) &= \rho_1[x(t_f) - x_f], \\ P_V(t_f) &= \rho_2[V(t_f) - V_f], & P_{\Delta x_{\text{сж}}}(t_f) &= \rho_3[\Delta x_{\text{сж}}(t_f) - \Delta x_{\text{сж} f}], & P_{V_{\text{сж}}}(t_f) &= \rho_4[\Delta V_{\text{сж}}(t_f) - \Delta V_{\text{сж} f}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

и управление с учетом ограничения $|U_1| \leq U_{1 \max}$ из условия $\partial H / \partial U_1 = 0$:

$$U_1(t) = \frac{F_{тр}(t)}{B} + P_{V_{\text{сж}}}(t) \frac{E^2 S^2 k_B^2}{\rho S l^2 B} - P_V(t) \frac{E^2 S^2 k_B^2}{m_{\text{выдв}} l^2 B}$$

при $|U_1| < U_{1 \max}$ или $U_1 = U_{1 \max} \text{sign} U_1$ при $|U_1| \geq U_{1 \max}$, где $B = k_f m_{\text{фаз}} p E_0 \sin \vartheta / (\omega_1 X_{\text{синхр}})$.

2.3. Н а с т р о й к а ф о р м ы р а д и о о т р а ж а ю щ е й п о в е р х н о с т и. Примем, что необходимо перенастроить форму радиоотражающей поверхности. Для этого по формуле (1.4) определяется текущее состояние фронтальной сети. Вычисляются необходимые размеры вант для за-

дания желаемой формы радиоотражающего сетеполотна. С помощью актюаторов в каждой точке происходит изменение длины ванты.

Рассмотрим в качестве исполнительного органа пьезоактюатор. При оптимизации перевода системы из одного положения в другое с фиксированным начальным и конечным состоянием выберем критерий $J = t_f$.

Гамильтониан системы (1.5) имеет вид $H = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}_{\text{пэ}})$, где $\mathbf{P} = [P_{\Delta l_{\text{пэ}}} \ P_{V_{\text{пэ}}} \ P_{U_{\text{пэ}}}]^T$ – вектор сопряженных переменных, или

$$H = P_{\Delta l_{\text{пэ}}} V + P_{V_{\text{пэ}}} \left(\frac{K_0 U_{\text{пэ}} + F_{\text{стат}} - K_{y. \text{пэ}} \Delta l_{\text{пэ}} - K_{d. \text{пэ}} V_{\text{пэ}}}{m_{\Sigma}} \right) + P_{U_{\text{пэ}}} \left(\frac{e_n}{C_0 R_{\text{внут}} K_{d. \text{пэ}}} - \frac{U_{\text{пэ}}}{C_0 R_{\text{внут}} K_{d. \text{пэ}}} - \frac{K_n V_{\text{пэ}}}{C_0 K_{d. \text{пэ}}} \right).$$

Найдем сопряженные переменные

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\Delta l_{\text{пэ}}} &= P_{V_{\text{пэ}}} K_{y. \text{пэ}} / m_{\Sigma}, & \dot{P}_{V_{\text{пэ}}} &= -P_{\Delta l_{\text{пэ}}} + P_{V_{\text{пэ}}} K_{d. \text{пэ}} / m_{\Sigma} + P_{U_{\text{пэ}}} K_n / C_0 K_{d. \text{пэ}}, \\ \dot{P}_{U_{\text{пэ}}} &= -P_{V_{\text{пэ}}} K_0 / m_{\Sigma} + P_{U_{\text{пэ}}} / (C_0 R_{\text{внут}} K_{d. \text{пэ}}), & P_{\Delta l_{\text{пэ}}}(t_f) &= \rho_1 [\Delta l(t_f) - \Delta l_f], \\ & & P_{V_{\text{пэ}}}(t_f) &= \rho_2 [V(t_f) - V_f], & P_{U_{\text{пэ}}}(t_f) &= \rho_3 [U(t_f) - U_f]. \end{aligned}$$

При решении задачи оптимальности по быстродействию системы дифференциальных уравнений (1.5) структура управления, согласно принципу максимума, при наличии ограничения на управление $|e_n| \leq e_{n \text{max}}$ примет вид

$$e_n(t) = e_{n \text{max}} \text{sign} P_{U_{\text{пэ}}}(t). \quad (2.6)$$

При выборе в качестве актюатора ДПТ для задачи, аналогичной пьезоактюатору, получим следующий гамильтониан системы (1.6): $H = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}_{\text{ДПТ}})$, где $\mathbf{P} = [P_{I_{\text{я}}} \ P_{\omega_{\text{вал}}} \ P_{\varphi_{\text{вал}}}]^T$ – вектор сопряженных переменных, или

$$H = P_{\varphi_{\text{вал}}} \omega_{\text{вал}} + P_{\omega_{\text{вал}}} \frac{k_m}{J_{\text{я}}} I_{\text{я}} - P_{\omega_{\text{вал}}} \frac{M_{\text{внеш}}}{J_{\text{я}}} + P_{I_{\text{я}}} \left(\frac{U_{\text{ДПТ}}}{L_{\text{я}}} - \frac{R_{\text{я}} I_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} - \frac{k_e \omega_{\text{вал}}}{L_{\text{я}}} \right).$$

Сопряженные переменные

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\varphi_{\text{вал}}} &= 0, & \dot{P}_{\omega_{\text{вал}}} &= -P_{\varphi_{\text{вал}}} + P_{I_{\text{я}}} k_e / L_{\text{я}}, & \dot{P}_{I_{\text{я}}} &= -P_{\omega_{\text{вал}}} k_m / J_{\text{я}} + P_{I_{\text{я}}} R_{\text{я}} / L_{\text{я}}; \\ P_{\varphi_{\text{вал}}}(t_f) &= \rho_1 [\varphi_{\text{вал}}(t_f) - \varphi_{\text{вал}f}], & P_{\omega_{\text{вал}}}(t_f) &= \rho_2 [\omega_{\text{вал}}(t_f) - \omega_{\text{вал}f}], & P_{I_{\text{я}}}(t_f) &= \rho_3 [I_{\text{я}}(t_f) - I_{\text{я}f}]. \end{aligned}$$

При оптимизации по быстродействию системы дифференциальных уравнений (1.6) структура управления при наличии ограничения на управление $|U_{\text{ДПТ}}| \leq U_{\text{ДПТ max}}$ примет вид $U_{\text{ДПТ}}(t) = -U_{\text{ДПТ max}} \text{sign} P_{I_{\text{я}}}(t)$.

Решение перечисленных задач раскрытия и выдвигания спиц рефлектора, настройки сетеполотна с использованием принципа максимума позволяет выявить структуру оптимального управления. Используя момент времени τ_i переключения структуры управления в качестве параметров, представим структуру управления в виде:

$$u(t) = u_i(t) + \Delta \mathbf{u}_i^T(t) \mathbf{l}(t, \tau_i),$$

где $i = \overline{1, r}$, i – номер участка структуры управления, r – количество переключений управления в структуре, $\Gamma^T(t, \tau_i) = [l(t, \tau_1) \ l(t, \tau_2) \ \dots \ l(t, \tau_r)]$, $\Delta u_i = -u_i + u_{i+1}$, $u_i(t) = u_1(t)$ при $t < \tau_1$. Здесь u_i и u_{i+1} – управления на предыдущем и последующем участках этой структуры относительно τ_i соответственно, а $l(t, \tau_i)$ – единичные функции.

К исходным системам (1.1), (1.3), (1.5), (1.6) добавляются уравнения $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{w}$, где $\mathbf{t} = (\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_r)^T$; $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_r)^T$ – векторы новых переменных, принимаемых за управления.

Вспомогательную задачу можно решать с минимизацией критерия

$$J_1 = J + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} dt$$

или критерия

$$J_2 = J_1 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{w}_0^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_0 dt, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{k} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

Тогда уравнения для обобщенного вектора состояния запишутся как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}, u, t), \\ \dot{\mathbf{t}} &= \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При свободном времени окончания t_f оно также является корректируемым параметром: $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r t_f)^T$. Введением нового вектора управления \mathbf{w} исходная задача оптимизации по определению u решается косвенно — через нахождение этого вектора \mathbf{w} .

Для обеспечения разворачивания крупногабаритного рефлектора космического базирования с мягким выходом к упорам можно также использовать алгоритм последовательной оптимизации по иерархии целевых функционалов [21].

3. Моделирование. Рассмотрим отдельно задачи для раскрытия, выдвижения спиц и настройки сетеполотна.

3.1. Раскрытие спиц рефлектора. Рассмотрим первый этап разворачивания КТР — раскрытие спиц. При раскрытии системы не оказываются никаких возмущающих воздействий и управление осуществляется по полным данным. Процесс получения информации с датчиков (без ошибок) происходит непрерывно.

Спица разворачивается из начального транспортничного положения при значении угла поворота $\varphi_0 = 0$ и фиксируется при достижении заданного угла $\varphi_f = \pi/2$. Спица в начальном положении находится в состоянии покоя, соответственно угловая скорость $\omega_0 = 0$, прогиб $h_0 = 0$ и скорость изгиба $V_{\text{изг}_0} = 0$. Конечные значения угловой скорости $\omega_f = 0$, прогиба $h_f = 0$ и скорости изгиба $V_{\text{изг}_f} = 0$. Примем время раскрытия $t_f = 130$ с, максимальная допустимая амплитуда прогиба $h_{\text{max}} = 10$ мм. Значение коэффициента затухания примем $\gamma = 0.04$ с [7]. Первая собственная частота изгибных колебаний для случая заделанного левого и свободного правого концов [10] $\omega_{\text{с изг}_1} = 14.465$ Гц. Число фаз ротора $m_{\text{фаз}} = 2$, число пар полюсов магнитного поля $p = 2$, действующее значение ЭДС на обмотке статора $E_0 = 2.5$ В, синхронное сопротивление $X_{\text{синхр}} = 22 \times 10^{-3}$ Ом, угол рассогласования между полем ротора и статора $\vartheta = \pi/10$ при любой нагрузке. Коэффициенты $k_{\text{у,упор}} = k_{\text{у,ф}} = 100$, $c_{\text{д,упор}} = 30$, $c_{\text{д,ф}} = 25$.

Были выбраны следующие параметры спицы при моделировании: материал пластик QHF — 0140: плотность материала $\rho = 1600$ кг/м³, модуль упругости (Юнга) $E = 1.2 \times 10^{11}$ Па, длина спицы $a = 9.75$ м, масса спицы (всех вложенных звеньев) $m = 32$ кг. Рассматривается спица с сечением в виде кольца с внешним радиусом $R = 0.26$ м и внутренним радиусом $r = 0.25$ м. Момент инерции I будет равняться $I = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{3} ma^2 = 1015.4$ кг · м². Изгибной момент инерции $I_{\text{изг}} = \pi R^3 \delta = 5.52 \times 10^{-4}$ м⁴, где $\delta = 0.01$ м — толщина стенки спицы.

В качестве регулятора было рассмотрено применение различной структуры (пропорционально-интегрально-дифференцирующего) ПИД-регулятора, в том числе с ограничениями на управление. Измерению и вычислению доступны $\Delta \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_p - \mathbf{X}_p(t)$, интеграл $\int_0^t \Delta \mathbf{X}_p dt$ и производная $\Delta \dot{\mathbf{X}}_p$.

Проанализировав работу различной структуры ПИД-регулятора, выберем в качестве наилучшего (пропорционально-интегральный) ПИ-регулятор, так как его использование обеспечило удовлетворительное качество переходного процесса. Для перевода системы из начального состояния $\mathbf{X}_p(0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ в конечное $\mathbf{X}_p(t_f) = (\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ с отсутствием перерегулирования по углу разворота φ потребовалось $t_f = 462.2$ с, что больше заданного времени разворачивания, равного 130 с. Максимальное значение величины прогиба h составило $h_{\text{max}} = 1.35 \times 10^{-5}$ м.

Можно настроить ПИ-регулятор таким образом, чтобы система достигала конечного значения $\mathbf{X}_p(t_f) = (\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ за $t_f = 130$ с, но из-за наличия в системе упора и фиксатора колебания спицы продолжают больше заданного времени (340 с) при максимальной величине прогиба $h_{\max} = 0.0018$ м.

При оптимальном управлении краевая задача (1.1), (2.2), (2.3) решалась методом Ньютона [15] с использованием вектора невязок:

$$\mathbf{Z}_H(t, t_f) = [\varphi(t_f) - \varphi_f \quad \omega(t_f) - \omega_f \quad h(t_f) - h_f \quad V_{\text{изг}}(t_f) - V_{\text{изг}f}]^T.$$

Здесь для более быстрой сходимости метода Ньютона при получении решения поставленной задачи можно считать фиксированным правый конец траектории. Это позволяет не включать в вектор невязок значения сопряженных переменных на правом конце траектории при сохранении условий оптимальности. Данное упрощение допустимо, поскольку метод Ньютона используется для выявления структуры оптимального управления.

Интегрирование проводилось методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0.01$ с при $k_p = 1 \times 10^{-7}$. Были приняты начальные условия для компонент вектора сопряженных переменных $P(t_0)$: $P_\varphi(t_0) = 0$, $P_\omega(t_0) = -20$, $P_h(t_0) = -0.1$, $P_{V_{\text{изг}}}(t_0) = -1$ при приращениях для сопряженных переменных $\Delta P|_\varphi = 0.1$, $\Delta P|_\omega = 1$, $\Delta P|_h = 0.01$, $\Delta P|_{V_{\text{изг}}} = 0.1$ в процедуре численного определения частных производных от вектора невязок. Итерационная процедура выполнялась с точностью $\|\mathbf{Z}_H(t, t_f)\| \leq 0.001$. При заданных начальных условиях за 13 итераций были получены оптимальные начальные значения сопряженных переменных $P_\varphi(t_0)_{\text{опт}} = 0.1$, $P_\omega(t_0)_{\text{опт}} = -10$, $P_h(t_0)_{\text{опт}} = -0.01$, $P_{V_{\text{изг}}}(t_0)_{\text{опт}} = -1.909$.

Как видно из рис. 5, а и б, удалось добиться перевода системы из заданного начального положения в заданное конечное за $t_f = 133$ с, причем данное время является минимально возможным для поставленных условий задачи. Максимальное значение величины прогиба h составило $h_{\max} = 1.583 \times 10^{-4}$ м, что на порядок меньше по сравнению с ПИ-регулятором при одинаковых условиях.

Значение величины невязки $\|\mathbf{Z}_H(t, t_f)\|$ необходимо выбирать не более 0.001, так как в системе присутствуют упор и фиксатор, и даже небольшое расхождение по углу раскрытия спицы φ и угловой скоростью ω приводит к колебательному процессу или же спица не доходит до своего конечного значения. При выбранных оптимальных начальных значениях сопряженных переменных значение невязки составило не более 10^{-5} .

Представим сигнал управления U_1 в виде, когда возможно два переключения (из решения задачи методом Ньютона следует одно переключение):

$$U_1 = -U_{\text{imax}} \text{sign}(P_{\omega 0}) + \Delta U_{1_1} l(t, \tau_1) + \Delta U_{1_2} l(t, \tau_2),$$

где $P_{\omega 0} = P_\omega(0)$, $\Delta U_{1_1} = 2U_{1 \text{ max}} \text{sign}(P_{\omega 0})$, $\Delta U_{1_2} = -U_{1 \text{ max}} \text{sign}(P_{\omega 0})$, а $l(t, \tau_1)$, $l(t, \tau_2)$ – функции вида [21]

$$l(t, \tau_i) = 0.5(1 + \text{th}(c(t - \tau_i))) = \frac{1}{1 + e^{-2c(t - \tau_i)}}. \quad (3.1)$$

Здесь c – коэффициент, при неограниченном возрастании которого функция $l(t, \tau_i)$ приближается к единичной функции Хэвисайда.

Запишем гамильтониан вспомогательной задачи оптимизации с учетом (2.7) и (2.8):

$$H = P_\varphi \omega + P_\omega \frac{M_{\text{п}} - M_{\text{тр}}}{I} + P_h V_{\text{изг}} + P_{V_{\text{изг}}} \left(-\frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} - \gamma \frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 V_{\text{изг}}}{\partial l^4} + \frac{2}{\rho S} \frac{M_{\text{п}} - M_{\text{тр}}}{R_{\text{дв}}} \right) + P_{\tau_1} w_1 + P_{\tau_2} w_2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_0^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_0.$$

Система канонических уравнений имеет вид

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = (M_{\text{п}} - M_{\text{тр}} - M_{\text{упор}} - M_\varphi)/I, \quad \dot{h} = V_{\text{изг}},$$

$$\dot{V}_{\text{изг}} = -\frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} - \gamma \frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 V_{\text{изг}}}{\partial l^4} + \frac{2}{\rho S} \frac{\partial M}{\partial l},$$

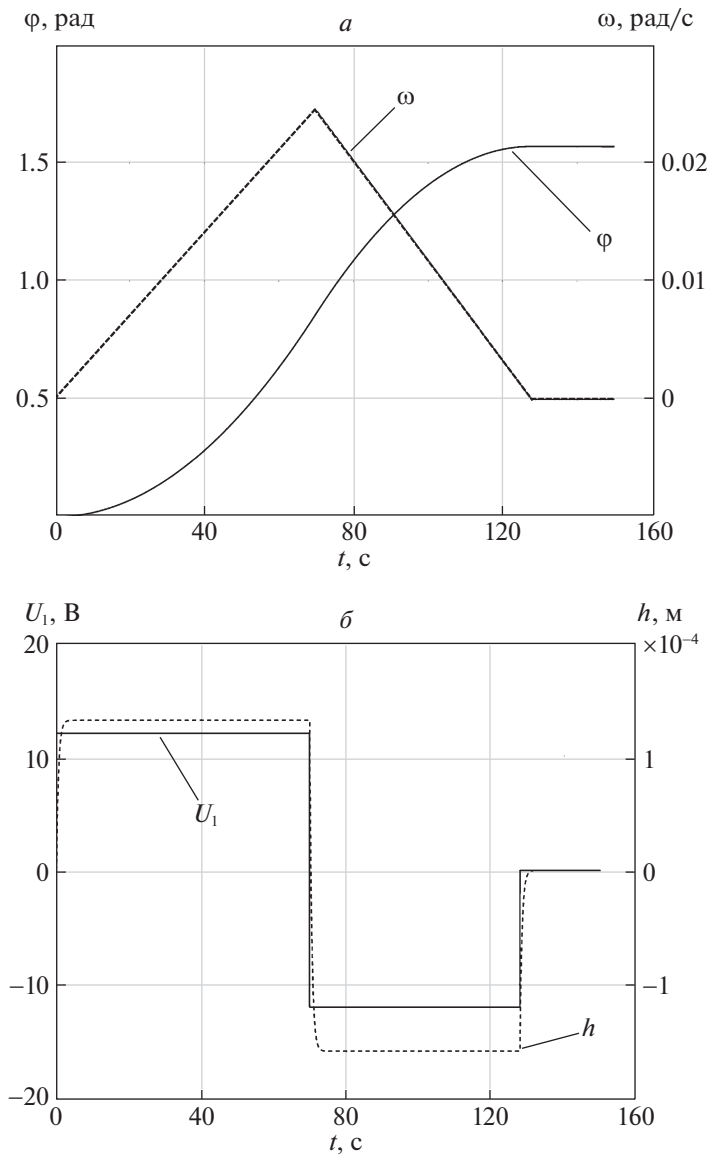


Рис. 5. Динамика раскрытия спицы: a – графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$; b – графики $U_1(t)$ и $h(t)$

$$\dot{\tau}_1 = 0, \quad \dot{\tau}_2 = 0, \quad \dot{P}_\varphi = 0, \quad \dot{P}_\omega = -P_\omega, \quad \dot{P}_h = 0, \quad \dot{P}_{V_{изг}} = -P_{V_{изг}},$$

$$\dot{P}_{\tau_1} = -P_\omega A \Delta U_1 \delta(t, \tau_1) - P_{V_{изг}} \frac{2A}{\rho S R_{дв}} \Delta U_1 \delta(t, \tau_1),$$

$$\dot{P}_{\tau_2} = -P_\omega A \Delta U_2 \delta(t, \tau_2) - P_{V_{изг}} \frac{2A}{\rho S R_{дв}} \Delta U_2 \delta(t, \tau_2),$$

где $\delta(t, \tau_1)$, $\delta(t, \tau_2)$ – функции вида $\delta(t, \tau_i) = \partial l(t, \tau_i) / \partial \tau_i = -2ce^{-2c(t-\tau_i)} / (1 + e^{-2c(t-\tau_i)})^2$. Составляющие вектора управления $w_1(t) = -k_1^2 P_{\tau_1}(\tau_1)$, $w_2(t) = -k_2^2 P_{\tau_2}(\tau_2)$.

Расчеты показали, что характер зависимостей $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $h(t)$ соответствуют графикам на рис. 5. Алгоритм оптимизации с коррекцией параметров структуры управления позволяет обеспечить успешное выполнение поставленной задачи без затруднений в сходимости. При этом τ_1 стремится к оптимальному времени смены предельных значений управления U_1 , полученного из метода

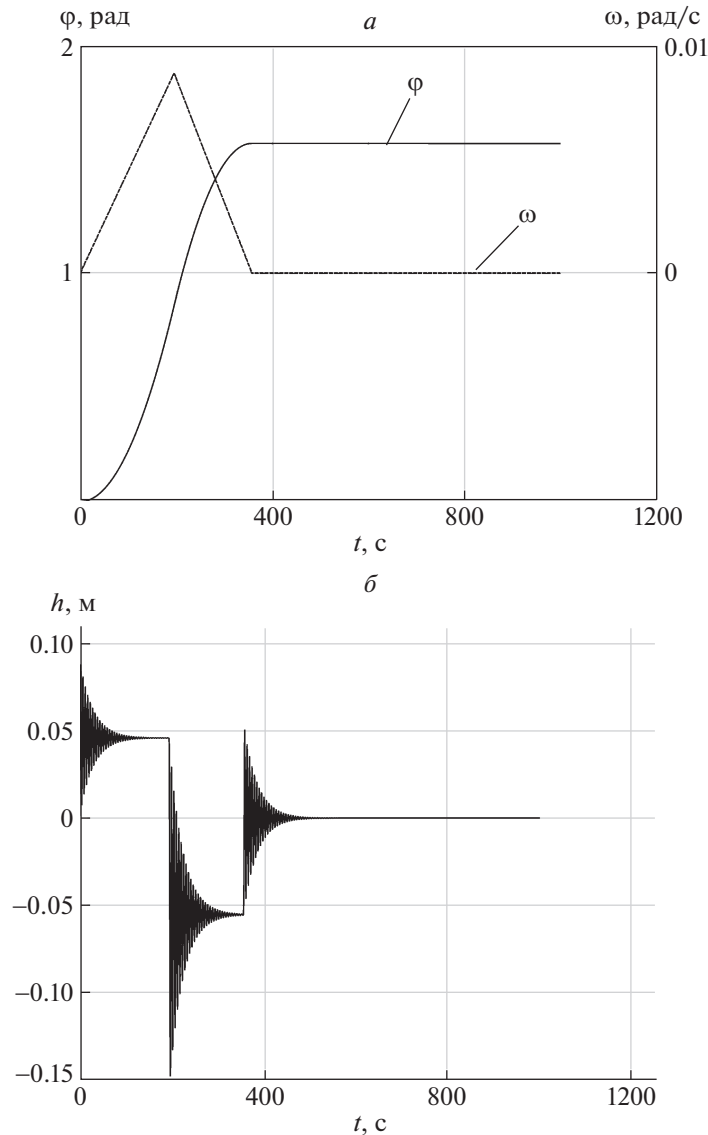


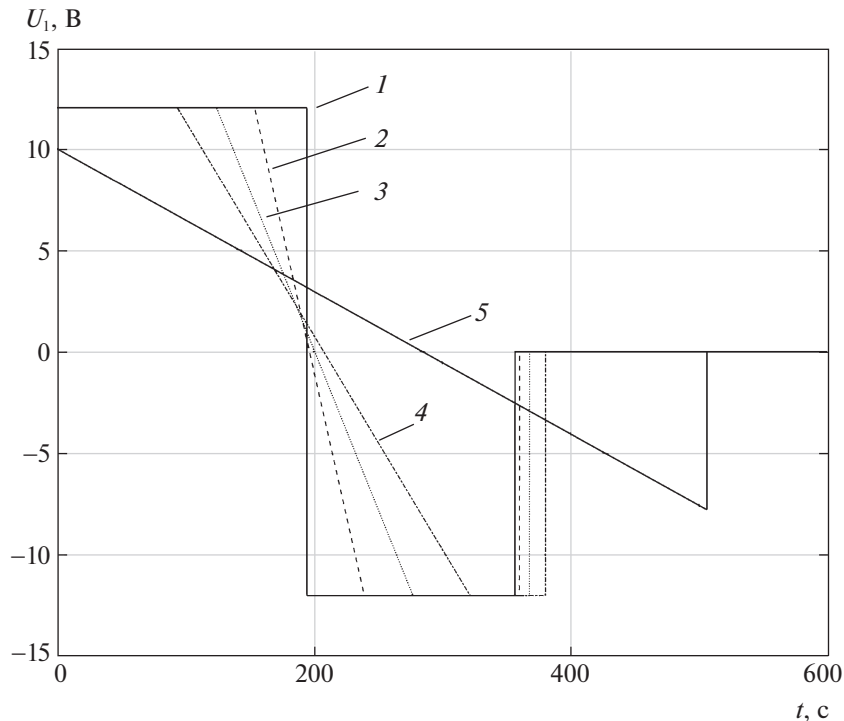
Рис. 6. Характер динамики раскрытия спицы: а – графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$; б – график $h(t)$

Ньютона (рис. 5, б), а τ_2 стремится к конечному времени, при котором система достигает заданных значений [17].

Прогибы конструкции незначительны и не превышают величины $h_{\max} = 0.002$ м. При использовании оптимального регулятора время затухания колебаний составляет 5 с. Это объясняется достаточной жесткостью конструкции.

Исходя из [7] наибольший интерес представляет минимизация прогиба и колебаний при полностью раскрытой спице, так как в данном случае спица более склонна к переходному процессу с длительными затухающими колебаниями. При данных условиях изменится длина, момент инерции, первая собственная частота спицы: $a = 29.01$ м, $I \approx 8978$ кг · м², $\omega_{\text{сизг1}} = 1.432$ Гц. На двигатель также подается напряжение питания U_1 не более $U_{1\max} = 12$ В.

Увеличение момента инерции почти в 9 раз делает систему “более” инерционной, вследствие чего увеличивается время раскрытия. Поэтому необходимо корректно выбрать конечное время. Проанализируем время раскрытия спицы от минимально до максимально возможного. Для этого была решена задача максимального быстродействия, время перевода системы (1.1) из начального состояния $\mathbf{X}_p(0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ в конечное $\mathbf{X}_p(t_f) = (\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ составило $t_f = 900$ с, конечное

Рис. 7. Набор кривых $U_1(t)$

значение по углу разворота φ и угловой скорости разворота ω было достигнуто за 356 с (рис. 6, а). Затухающие колебания свободного конца спицы длились 544 с (рис. 6, б). Максимальное значение величины прогиба $h_{\max} = 0.148$ м.

Для оценки времени раскрытия был рассмотрен вариант раскрытия спицы при использовании ПИД-регулятора при переходном процессе без перерегулирования. Время перевода системы (1.1) из начального состояния в конечное $t_f = 1590$ с, при этом конечное значение по углу разворота φ и угловой скорости разворота ω было достигнуто за 1369 с. Затухающие колебания свободного конца спицы длились 221 с. Максимальное значение величины прогиба $h_{\max} = 0.008$ м.

Поскольку прогиб спицы прямо пропорционален приложенному моменту, то для получения минимальной величины прогиба необходимо так управлять спицей, чтобы момент был минимален. Напряжение питания, необходимое для преодоления момента трения, $U_1 = 1.12$ В. При данном напряжении разворот спицы из начального состояния $\mathbf{X}_p(0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ в конечное $\mathbf{X}_p(t_f) = (\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ произойдет за $t_f = 28042$ с, при этом конечное значение по углу разворота φ и угловой скорости разворота ω будет достигнуто за 27830 с. Затухающие колебания свободного конца спицы будут длиться 212 с. Максимальное значение величины прогиба $h_{\max} = 0.006$ м.

Для удобства обозначим: $t_f = T_f + t_{\text{затух}}$, T_f — время раскрытия по углу разворота φ и угловой скорости разворота ω , $t_{\text{затух}}$ — время затухания колебаний спицы после постановки ее на упор и фиксатор. Исходя из полученных данных, необходимо выбирать время разворота спицы по углу разворота φ и угловой скорости разворота ω в пределах от 356 до 1369 с.

При этом с увеличением T_f вид оптимального управления будет изменяться, например, от релейного переключения до управления с линейным участком убывания (рис. 7). Кривая 1 — $T_f = 356$ с, $t_f = 936$ с; кривая 2 — $T_f = 360$ с, $t_f = 940$ с; кривая 3 — $T_f = 368$ с, $t_f = 948$ с; кривая 4 — $T_f = 380$ с, $t_f = 960$ с; кривая 5 — $T_f = 506$ с, $t_f = 1200$ с.

При этом в случаях, где управление достигает максимального значения ± 12 В, величина прогиба h_{\max} одинакова, чем меньше напряжение питания (кривая 5), тем меньше прогиб и быстрее затухающий процесс. Так для случая $T_f = 506$ с значение $h_{\max} = 0.07$ м. При достаточно большом выборе t_f можно получить переходную характеристику, аналогичную минимально возможному прогибу ($t_f = 28042$ с).

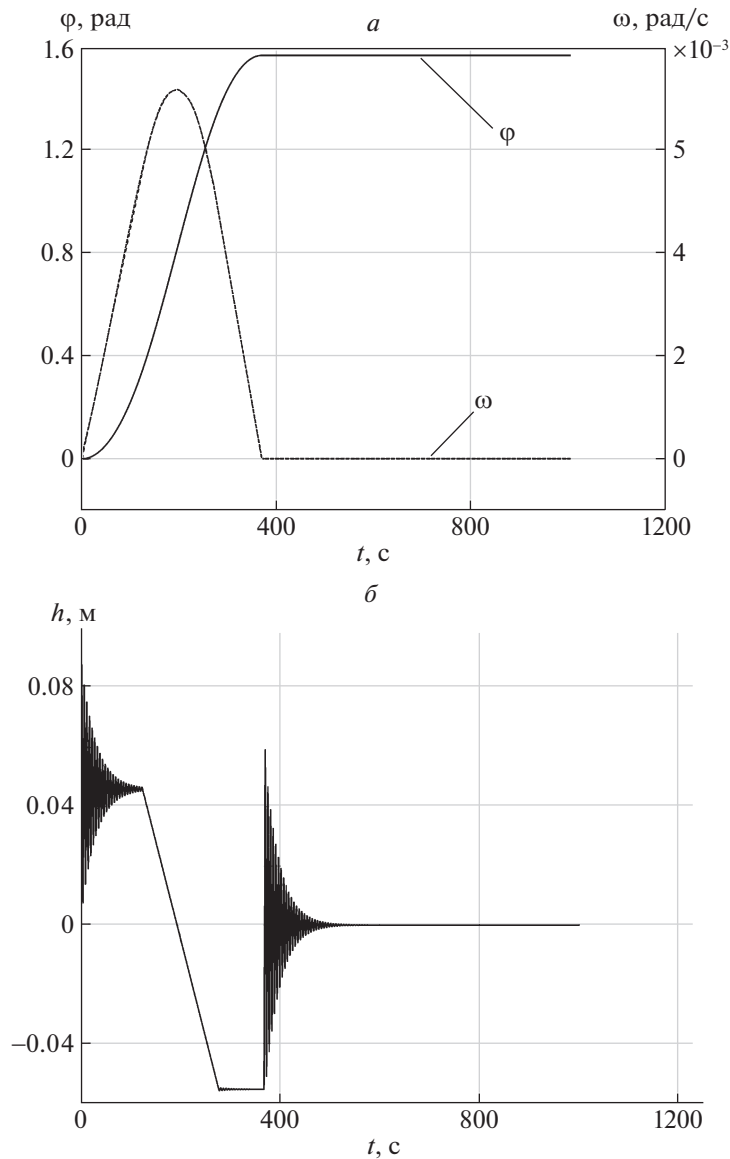


Рис. 8. Динамика раскрытия спицы: a – графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$; b – график $h(t)$

Расчеты показали, что управление раскрытием с максимальным быстродействием приводит к заметному увеличению времени затухания $t_{\text{затух}}$ колебаний. Поэтому целесообразно применить алгоритм коррекции структуры управления, в которой переход между предельными значениями управлений разных знаков осуществляется по плавно изменяющейся кривой.

Для использования алгоритма с коррекцией параметров структуры управления примем, что $T_f = 368$ с. За управление выберем функцию вида (3.1) путем домножения ее на 24 и прибавления к ней 12, с коэффициентом $c = 0.017$.

На рис. 8 представлены характеристики динамики разворачивания полностью раскрытой спицы при применении алгоритма коррекции параметров структуры управления для рассмотренного случая $T_f = 368$ с (кривая 3 на рис. 7) с выходом в конечное положение $X_p(t_f)$ за $t_f = 948$ с.

3.2. Выдвижение спиц рефлектора. Рассмотрим этап выдвижения спицы (рис. 3). Первая собственная частота продольных колебаний для случая заделанного левого и свободного правого концов [10] $\omega_{c_{\text{прод}1}} = \pi/(2x)\sqrt{E/\rho} = 4157$ Гц. Значение коэффициента затухания примем $\gamma = 0.04$ с [7]. Коэффициент k_f примем для рассматриваемого случая равным 1. Начальное значе-

ние длины выдвижения $x_0 = 0$. Спица фиксируется при достижении расстояния, равного ее длине, за исключением участка стыковки первого и второго звеньев, поэтому конечное значение длины $x_f = 9.5$ м. Поскольку спица в начальном положении находится в состоянии покоя, то соответственно линейная скорость $V_0 = 0$, сжатие $\Delta x_{сж\ 0} = 0$, скорость сжатия $V_{сж\ 0} = 0$. Для задания сил упора $F_{упор}$ и фиксатора $F_{ф}$ необходимо определить коэффициенты $k_{у. упор(ф)}$ и $c_{д. упор(ф)}$. Исходя из экспериментальных данных примем $k_{у. упор} = k_{у. ф} = 100$, $c_{д. упор} = 50$, $c_{д. ф} = 15$. Примем время раскрытия $t_f = 100$ с, максимальная допустимая амплитуда сжатия $\Delta x_{сж\ max} = 1$ мм.

Измерениям доступен вектор переменных состояния X_b . Для перевода системы из начального состояния $X_b(0) = (0\ 0\ 0\ 0)^T$ в конечное $X_b(t_f) = (9.5\ 0\ 0\ 0)^T$ с отсутствием перерегулирования по длине выдвижения x при работе ПИ-регулятора потребовалось $t_f = 113$ с, что больше заданного времени разворачивания. Максимальное значение величины сжатия спицы $\Delta x_{сж}$ составило $\Delta x_{сж\ max} = 0.5 \times 10^{-6}$ м. Можно настроить ПИ-регулятор таким образом, чтобы система достигала конечного значения $X_b(t_f) = (9.5\ 0\ 0\ 0)^T$ за $t_f = 100$ с, но из-за наличия в системе упора и фиксатора колебания спицы продолжают больше заданного времени (105 с) при максимальной величине сжатия спицы $\Delta x_{сж} = 1.42 \times 10^{-5}$ м. Особенностью продольных колебаний в отличие от поперечных, возникающих при развороте спицы, является их высокая частота и быстрое время затухания.

При оптимальном управлении краевая задача (1.3), (2.4), (2.5) решалась методом Ньютона с использованием вектора невязок

$$Z_H(t, t_f) = [x(t_f) - x_f \quad V(t_f) - V_f \quad \Delta x_{сж}(t_f) - \Delta x_{сж\ f} \quad V_{сж}(t_f) - V_{сж\ f}]^T.$$

Расчет проводился при $k_b = 1 \times 10^{-10}$, шаг $\Delta t = 0.0001$ с, начальные условия для компонент вектора сопряженных переменных $P(t_0)$ и приращениях для сопряженных переменных составляют: $P_x(t_0) = -0.01$, $P_V(t_0) = 100$, $P_{\Delta x_{сж}}(t_0) = -0.0001$, $P_{V_{сж}}(t_0) = 300$, $\Delta P|_x = 0.1$, $\Delta P|_V = 10$, $\Delta P|_{\Delta x_{сж}} = 0.0001$, $\Delta P|_{V_{сж}} = 1$ в процедуре численного определения частных производных от вектора невязок в методе Ньютона.

На рис. 9, а и б для данного варианта представлены оптимальные характеристики. Как видно из графиков, удалось добиться перевода системы из заданного начального положения в заданное конечное за $t_f = 100$ с за 7 итераций. Максимальное значение величины сжатия спицы $\Delta x_{сж} = 8 \times 10^{-7}$ м, что на 2 порядка меньше по сравнению с ПИ-регулятором при одинаковых условиях. Время затухания колебаний спицы составило 3 с.

В соответствии с рис. 9, б можно структуру сигнала управления U_1 представить линейной функцией $U_1 = at + b$, где a и b – коэффициенты. Тогда в качестве оптимизируемых параметров можно выбрать коэффициенты a и b . При этом удастся добиться перевода выдвигающегося элемента из начального состояния в конечное при ограничении на управление.

Отметим, что в данной задаче сжатие конструкции незначительно и не превышает величины $\Delta x_{сж\ max} = 8 \times 10^{-7}$ м. При этом с использованием оптимального регулятора время затухания колебаний составляет 3 с.

Можно сделать вывод, что с помощью оптимального регулятора удастся снизить значение сжатия на порядок. Тем не менее, ни при каких рассматриваемых условиях задачи $\Delta x_{сж}$ не превышает установленное граничное значение в 1 мм как при использовании ПИ-регулятора, так и оптимального регулятора.

Применение алгоритма коррекции параметров структуры управления обеспечивает высокую сходимость решения задачи, но в отличие от коррекции моментов времени переключения структуры параметры a и b необходимо выбирать в небольшом диапазоне от оптимальных значений.

3.3. Настройка формы радиоотражающей поверхности. Использование алгоритмов оптимального управления как для пьезоактюатора, так и для ДПТ при настройке формы радиоотражающего сетеполотна подробно рассмотрено в [23, 24]. При выборе, например, пьезоактюатора применение алгоритма с коррекцией параметров структуры управления в виде (2.6) позволяет осуществить линейное перемещение без возникновения колебательного

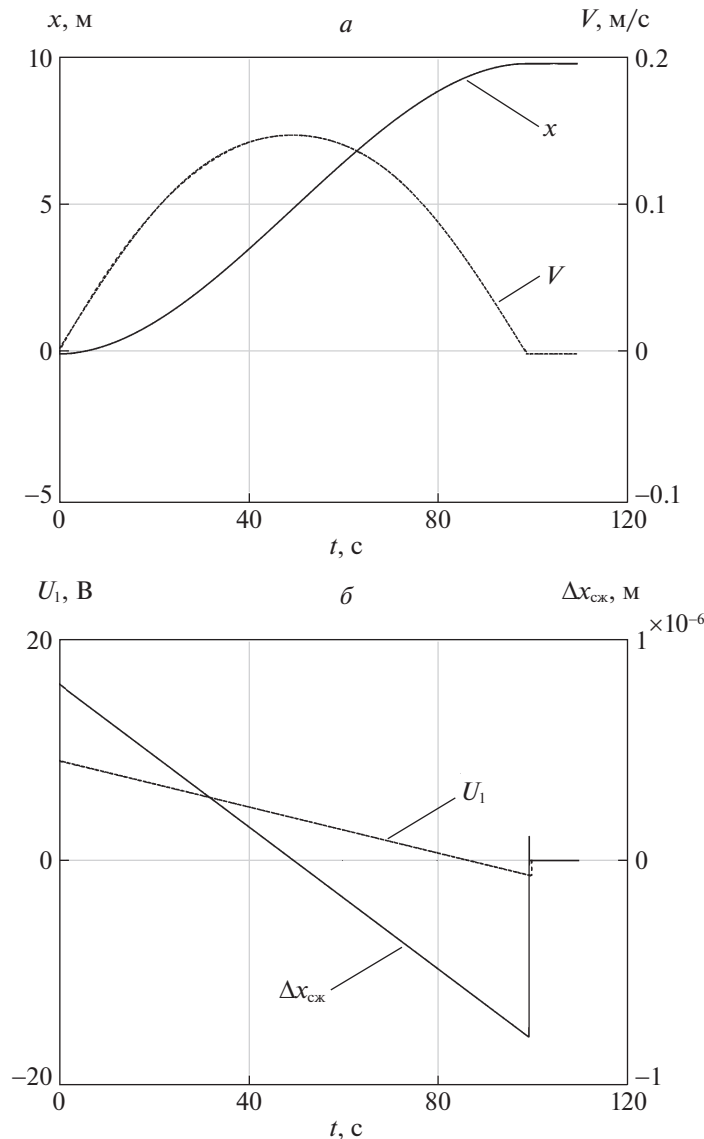


Рис. 9. Динамика раскрытия спицы: а – графики $x(t)$ и $V(t)$; б – графики $\Delta x_{сж}(t)$ и $U_1(t)$

процесса, а время достижения конечного состояния существенно меньше, чем с помощью ПИД-регулятора, и составляет $t \approx 0.6$ с (рис. 10) вместо 2 с.

Задача управления состоит в приведении пьезоактюатора из начального положения ($\Delta l_{пэ 0} = 0$ м; $V_{пэ 0} = 0$ м/с; $U_{пэ 0} = 0$ В) в заданное конечное состояние ($\Delta l_{пэ f} = 1 \times 10^{-7}$ м; $V_{пэ f} = 0$ м/с; $U_{пэ f} = 0$ В) при ограничении на управление, за которое принято напряжение от источника ЭДС $e_n = \pm 10$ В. Коэффициент обратного пьезоэффекта $K_0 = 38 \times 10^{-9}$, статическое усилие $F_{стат} = 10^{-8}$ Н, коэффициент упругости $K_{у.пэ} = 4.4$, коэффициент внутреннего демпфирования $K_{д.пэ} = 1$, емкость $C_0 = 1.17 \times 10^{-6}$ Ф, внутреннее сопротивление $R_{внут} = 102.5$ Ом, коэффициент прямого пьезоэффекта $K_n = K_0$, суммарная масса $m_{\Sigma} = 0.25$ кг.

Предложенный алгоритм для управления ДПТ помимо повышения быстродействия позволяет снизить энергетические затраты, что является важным в условиях ограниченного запаса энергии при работе в космическом пространстве.

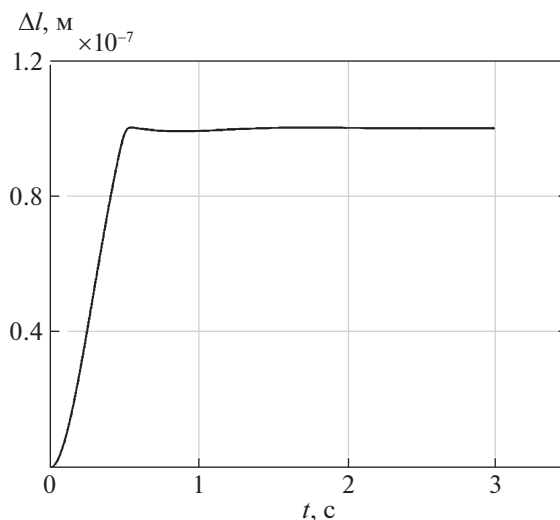


Рис. 10. Длина выдвижения активной части пьезоактюатора



Рис. 11. Макет фасы КТР

Для настройки формы радиоотражающего сетеполотна научно-исследовательской лабораторией и студенческим конструкторским бюро БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова были изготовлены макетные образцы фасы (части радиоотражающего сетеполотна) КТР (рис. 11). При проведении эксперимента в качестве актюаторов применялся ДПТ, аналогичный рассмотренному выше. Для определения усилий и длин оттяжки вант использовалась методика на основе уравнения Лапласа для мембраны [8].

Предлагаемый алгоритм коррекции параметров структуры управления применяется для выбранного в качестве актюатора ДПТ. Отсутствие постоянной силы тяжести в космическом пространстве не усложняет решение данной задачи. Меняются условия для использования методики на основе уравнения Лапласа для мембраны. При наземных испытаниях в правую часть уравнения (1.4) добавляется составляющая силы тяжести. Алгоритм управления ДПТ не нуждается в корректировке, так как его сравнение с ПИД-структурой происходит в одинаковых условиях.

Применение алгоритма коррекции параметров структуры управления позволило более чем в 2 раза сократить время настройки по сравнению с ПИД-регулятором, а также прийти в заданное значение без перерегулирования, что соответствует результатам моделирования. Ввиду плавного подхода к конечному значению удалось повысить энергоэффективность использования ДПТ.

Выигрыш в затратах мощности при управлении одним актюатором составил $\approx 15\%$ (0.495 Вт против 0.583 Вт).

Данные эксперимента позволяют сделать вывод о возможности уменьшения емкости источников питания за счет уменьшения потребления мощности актюаторов. Это дает возможность уменьшить массогабаритные размеры энергонакопительных элементов и освободить место для полезной нагрузки.

Оптимальное управление с разработанными алгоритмами для данных актюаторов значительно ускоряет переходный процесс и, как следствие, поддерживает заданную форму сетеполотна с необходимой точностью.

Заключение. В статье был выполнен поиск и разработка стратегий управления процессами раскрытия и настройки КТР. Реализованы в соответствующих программах для ЭВМ математические модели этапов развертывания КТР. Для развертывания, выдвижения спиц, а также управления актюаторами для настройки сетеполотна показано преимущество использования алгоритма с коррекцией параметров структуры управления. Для всех этапов применение разработанных алгоритмов позволяет добиться необходимой точности и качества регулирования системы. Решена задача улучшения характеристик развертывания КТР путем включения в контур управления бортового компьютера с программным обеспечением, допускающим реализацию алгоритмов оптимального управления. При этом для получения оптимальной динамики используется математическая модель.

В дальнейшем в математической модели можно учесть люфты в соединениях. Учет действующих на исследуемую систему возмущений и шумов предполагаемых датчиков приводит к сложным задачам обработки результатов измерений и их планирования [16, 25, 26]. В перспективе целесообразно произвести стабилизацию имитационной модели раскрытия КТР (или реального процесса) посредством самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией (СОРЭ) А.А. Красовского [27, 28]. СОРЭ целесообразно применять при отсутствии математических моделей или для обеспечения оптимальных режимов, полученных с помощью математических моделей. В этом случае СОРЭ уменьшает отклонения динамики имитационной модели (или реального КТР) от оптимальной опорной траектории при использовании информационной модели соответствующих отклонений. Это позволит адаптировать решения, полученные для математических моделей, к реальным объектам и приближает результаты теории оптимального управления к решению практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарев С.В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2011. № 4. С. 110–119.
2. Чуйкина Л.В., Порпылев В.Г., Чуйкин Д.О. Тенденции развития приводов раскрытия // Решетневские чтения: Матер. XIV Междунар. научн. конф., посвященной памяти генерального конструктора ракет.-космич. систем акад. М.Ф. Решетнева: В 2 ч. / Под общ. ред. Ю.Ю. Логинова: Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2010. Ч. 1. С. 93–94.
3. Гриневич Д.В. Исследование динамики раскрывающихся протяженных конструкций // Вопросы электромеханики. Тр. ВНИИЭМ. 2013. Т. 134. С. 37–42.
4. Кабдулин Г.В., Комков В.А., Мельников В.М., Харлов Б.Н. Динамика управляемого раскрытия центробежными силами космических конструкций с компенсацией кинетического момента // Космонавтика и ракетостроение. 2009. № 1 (54). С. 189–198.
5. Голубев Ю.Ф., Дитковский А.Е. Управляемое движение упругого манипулятора // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 6. С. 166–176.
6. Акуленко Л.Д., Гавриков А.А. Управление одномерными движениями гибридных колебательных систем стержневого типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 5–14.
7. Кабанов С.А., Зимин Б.А., Митин Ф.В. Разработка и анализ математических моделей раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций. Ч. I // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 20. № 1. С. 51–64.
8. Кабанов С.А., Зимин Б.А., Митин Ф.В. Разработка и анализ математических моделей раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций. Ч. II // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21. № 2. С. 117–128.
9. Красовский А.А. Теория самоорганизующегося оптимального регулятора биномиального типа в детерминированно-стохастическом приближении // АиТ. 1999. № 5. С. 97–112.
10. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М.: Академия наук СССР, 1931. 80 с.

11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В Х т. Т. VII. Теория упругости: учеб. пособие. 3-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
12. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 337 с.
13. *Никольский А.А.* Точные двухканальные следящие электроприводы с пьезокомпенсаторами. М.: Энергоатомиздат, 1988. 160 с.
14. *Вольдек А.И.* Электрические машины. Учебник для студентов высш. техн. заведений. 3-е изд., перераб. Л.: Энергия, 1978. 832 с.
15. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
16. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
17. *Мальшев В.В., Кабанов Д.С.* Алгоритм коррекции структуры управления автоматическим подводным аппаратом для построения области достижимости // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55. № 7. С. 21–27.
18. *Кабанов С.А.* Оптимизация динамики систем с коррекцией параметров структуры управления // Вест. СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. Вып. 2. С. 254–260.
19. *Кабанов Д.С.* Синтез алгоритма оптимального программно-позиционного управления многорежимным автоматическим подводным аппаратом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 60–66.
20. *Работонов Ю.Н.* Сопrotивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
21. *Кабанов С.А.* Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.
22. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их применение. СПб.: Лань, 2010. 149 с.
23. *Кабанов С.А., Митин Ф.В., Кривушов А.И., Улыбушев Е.А.* Управление пьезоактюатором для настройки отражающей поверхности рефлектора космического базирования // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 111–116.
24. *Fedor Mitin, Alexey Krivushov.* Application of Optimal Control Algorithm for DC Motor // Proc. 29th DAAAM Intern. Sympos. Vienna, Austria, 2018. P. 0762–0766.
25. *Кабанов С.А.* Совмещенный синтез оптимального управления как иерархическая дифференциальная игра // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 3. С. 317–318.
26. *Мальшев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989. 312 с.
27. *Красовский А.А.* Адаптивный оптимальный регулятор с переменным порядком наблюдателя и временем экстраполяции // АиТ. 1994. № 1. С. 97–111.
28. *Кабанов С.А.* Управление с самоорганизацией как инструмент для решения оптимизационных задач в социально-экономической сфере // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 3. С. 172–176.