ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 2, с. 35–46

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.71

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА С ДИНАМИЧЕСКИМ МАСШТАБИРОВАНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТОВ[1]

Е. С. Паламарчук

Центральный экономико-математический ин-т РАН, Москва, Россия

e-mail: e.palamarchuck@gmail.com

Поступила в редакцию 18.02.2020 г.
После доработки 27.04.2020 г.
Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассматривается задача синтеза стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени при динамическом масштабировании коэффициентов в уравнении состояния и целевом функционале. Динамическое масштабирование означает домножение коэффициентов на положительную функцию времени. Используемые критерии оптимальности представляют собой обобщения долговременного среднего и потраекторного долговременного среднего. При этом в качестве нормировки целевых функционалов применяется интеграл от масштабирующей функции. Показано, что вид оптимального управления инвариантен по времени и может быть получен на основе установившейся оптимальной стратегии, известной для автономной системы.

DOI: 10.31857/S0002338821020104

Введение. Линейные управляемые системы, изменение состояния которых подвержено влиянию аддитивных шумовых воздействий, широко применяются при моделировании динамики объектов в различных областях приложений, в частности для механики и управления движением, например [1–5]. Следует отметить весомый вклад отечественных исследователей в разработку данного направления, начиная с работ А.М. Летова [6–8], также см. обзорную статью В.А. Якубовича [9] для стохастического случая и изложенное в монографиях [4, 5, 10, 11]. При этом в задачах долгосрочной оптимизации часто используется предположение о постоянстве во времени параметров соответствующих моделей, см. [12–14]. Как следствие, оказывается возможным применение хорошо известных методов теории оптимального управления, разработанных для случая автономных уравнений и стационарных процессов [9]. Вместе с тем ряд аспектов функционирования систем и специфики принятия решений не учитывается при такой постановке. Например, к таким особенностям можно отнести несинхронность временных шкал течения процессов и осуществления наблюдений [15, 16], а также наличие субъективного времени [17]. Для рассматриваемой в данной работе линейной модели динамики состояния такое предположение приводит к возникновению масштабирования параметров. Масштабирование является динамическим, т.е. масштабирующие функции зависят от времени. Динамическое масштабирование коэффициентов оказывается необходимым при переходе от "внутренного" (субъективного) времени к реальной (физической) временной шкале функционирования системы управления. Стратегия управления выбирается с целью стабилизации системы в долгосрочном периоде, а используемый в оценке функционал имеет интегральный квадратичный вид. Долговременная оптимизация в таких задачах основана на построении установившегося закона управления [18, разд. 3.4] и определении подходящего критерия оптимальности на бесконечном интервале времени. Известно, что установившийся закон управления имеет вид линейной обратной связи по состоянию и соответствует предельной форме оптимальных стратегий, найденных при конечном горизонте планирования. В случае постоянных параметров структура установившейся стратегии содержит решение алгебраического уравнения Риккати, что является преиму-

[1] Работа выполнена в рамках НИР ЦЭМИ РАН.

ществом с точки зрения ее реализации. В данной работе будет показано, что инвариантность оптимальной стратегии может также возникнуть и при переменных коэффициентах. Основная цель проводимого исследования – анализ задачи синтеза стохастического линейного регулятора с динамическим масштабированием коэффициентов. Далее статья организована следующим образом. В разд. 1 проводится описание исследуемой системы управления и осуществляется постановка задачи. Раздел 2 содержит результаты об оптимальном управлении в системе с масштабированием, а также включает необходимые сведения по оптимальности в задаче синтеза стохастического линейного регулятора с постоянными коэффициентами. В разд. 3 рассматривается пример скалярной системы управления и проводится анализ ключевых предположений на параметры. Раздел 4 посвящен изучению примера задачи динамической стабилизации в макроэкономике, где возможно применение полученных результатов. Основные выводы работы, а также информация о возможных направлениях дальнейших исследований представлены в Заключении.

1. Описание системы управления и постановка задачи. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P}\}$ задан n-мерный случайный процесс X_t, $t \geq 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = \alpha_t A X_t dt + \alpha_t B U_t dt + \sqrt{\alpha_t} G dW_t, \quad X_0 = x, \tag{1.1}$$

где начальное состояние x неслучайно, W_t, $t \geq 0$, – d-мерный стандартный винеровский процесс, U_t, $t \geq 0$, – допустимое управление или k-мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathsf{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathsf{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ ($\sigma(\cdot)$ – обозначение σ-алгебры), такой, что уравнение (1.1) имеет решение; A, B, G – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $G \neq 0$. Множество допустимых управлений обозначим через U. Отметим, что управление в виде обратной связи (называемое также синтезом или управлением по замкнутому циклу), т.е. зависящее от значений $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ (точнее, U_t измеримо относительно $\sigma\{X_s, s \leq t\}$), входит в множество U. В уравнении (1.1) $\alpha_t > 0$ – масштабирующая функция, при этом использование $\sqrt{\alpha_t}$ при масштабировании аддитивных шумовых воздействий dW_t обусловлено тем, что $\sqrt{\alpha_t} dW_t$ имеет порядок $\alpha_t dt$ в среднем квадратичном, т.е. $E(\sqrt{\alpha_t} dW_t)^2 = \alpha_t dt$ ($E(\cdot)$ обозначает взятие математического ожидания).

Уравнение вида (1.1) ранее рассматривалось в различных приложениях при частичном масштабировании коэффициентов. Например, детерминированная версия (1.1), где изменялась только матрица $\alpha_t A$, возникала в процессе решения задачи стабилизации класса нелинейных систем, известных как неголономные [19], с функцией α_t в качестве характеристики устойчивости. Динамика (1.1) для $A = 0$ и $G \neq 0$ изучалась в рамках исследований когнитивных процессов [20], при этом α_t определяла силу воздействия внешнего импульса, влияющего также и на коэффициент диффузии. В работах [21–23] класс процессов вида (1.1) со степенной масштабирующей функцией α_t был введен с целью эконометрического моделирования передачи сигналов, а также изменения ряда экономических переменных.

Для каждого $T > 0$ в качестве целевого функционала определим случайную величину

$$J_T(U) = \int_0^T \alpha_t (X_t^{\mathrm{T}} Q X_t + U_t^{\mathrm{T}} R U_t) dt, \tag{1.2}$$

где $U \in \mathsf{U}$ – допустимое управление на интервале $[0, T]$ (см. также характеристику допустимых управлений и множества U при задании (1.1)); $Q \geq 0$, $R > 0$ – симметричные матрицы ($^{\mathrm{T}}$ – знак транспонирования, запись $A \geq B$ для матриц означает, что разность $A - B$ положительно полуопределена). При наличии монотонной функции $\alpha_t > 0$ в (1.2) α_t можно придать смысл дисконтирующей. Положительное дисконтирование возникает для убывающей α_t, а отрицательное имеет место в случае, когда α_t возрастает [24]. Возникновение соответствующей терминологии обусловлено знаком ставки дисконтирования ϕ_t, определяемой как $\phi_t = -\dot{\alpha}_t / \alpha_t$ ($\cdot$ – производная функции по времени).

Обращаясь к анализу (1.1)–(1.2) в ситуации масштабирования, отметим, что если функция α_t является монотонной и $\alpha_0 = 1$, то при $\alpha_t > 1$ имеем инфляцию (рост абсолютных значений) коэффициентов, случай $\alpha_t \to \infty$, $t \to \infty$, аналогичен “гиперинфляции”. Ситуация $\alpha_t \equiv 1$ означает отсутствие масштабирования, постоянство коэффициентов во времени и соответствует автономной системе управления. Если же $\alpha_t < 1$, то происходит дефлирование параметров, что в предельном случае $\alpha_t \to 0,\ t \to \infty$, приводит к вырождению матриц.

Далее формулируются предположения, в рамках которых будут получены основные результаты работы.

Предположение А. Масштабирующая функция $\alpha_t > 0$ при $t > 0$ является интегрируемой и

$$\int_0^t \alpha_s ds \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Условие в предположении А, в частности, означает, что масштабирование сохраняет асимптотически неограниченный (при $T \to \infty$) рост общей дисперсии интегральных шумовых воздействий на систему. Действительно, если определить

$$Z_T = \int_0^T \sqrt{\alpha_s} dW_t$$

и

$$E(Z_T^{\mathrm{T}} Z_T) = \|G\|^2 \int_0^T \alpha_t dt,$$

то $E(Z_T^{\mathrm{T}} Z_T) \to \infty$ при $T \to \infty$ ($\|\ \|$ – матричная норма).

Предположение В. Пара матриц (A, B) – стабилизируема, пара матриц $(A, \sqrt{Q})$ – выявляема (обнаруживаема).

Стабилизируемость пары (A, B) (выявляемость пары $(A, \sqrt{Q})$) означает существование матрицы K (матрицы L), такой что матрица $A + BK$ $(A + L\sqrt{Q})$ является экспоненциально устойчивой [25, с. 167–168]. Хорошо известно [18, теорема 3.7, с. 275], что при условии выполнения предположения В существует так называемый оптимальный установившийся закон управления U^*, имеющий вид $U_t^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}X_t^*$, где матрица $\bar{\Pi} \ge 0$ – решение алгебраического уравнения Риккати $\bar{\Pi}A + A\bar{\Pi} - \bar{\Pi}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi} + Q = 0$. В автономной системе управления, т.е. при $\alpha_t \equiv 1$, стратегия U^* оказывается решением задачи управления на бесконечном интервале времени с критерием долговременного среднего, например [25, теорема 5.4.3, с. 169]:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{T} \to \inf_{U \in \mathrm{U}}. \tag{1.3}$$

Кроме того, U^* выступает в качестве оптимальной стратегии при использовании более сильного вероятностного критерия потраекторного среднего (потраекторного эргодического) [26], когда рассматривается задача

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{T} \to \inf_{U \in \mathrm{U}} \quad \textit{с вероятностью } 1. \tag{1.4}$$

Как было показано в [27], приведенные критерии адекватно отражают воздействие фактора неопределенности на оценку качества управления только для случая системы (1.1)–(1.2) с ограниченными коэффициентами и невырожденной матрицей диффузии. В рассматриваемой ситуации динамического масштабирования параметров для сравнения стратегий управления при $T \to \infty$ будут использоваться понятия обобщенного долговременного среднего и обобщенного стохастического (потраекторного) долговременного среднего, введенные в [28] для переменной G_t, когда вместо T в (1.3) и (1.4) используется нормировка

$$\int_0^T \|G_t\|^2 dt.$$

В (1.1) матрица диффузии $G_t = \sqrt{\alpha_t}G$. Цель данной работы состоит в нахождении управления U^*, являющегося оптимальным в задачах

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U\in \mathrm{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\int_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U\in \mathrm{U}} \quad \textit{с вероятностью } 1.$$

В работе будет показано, что вид оптимального управления U^* оказывается инвариантен при переходе от автономной системы управления к системе с динамическим масштабированием.

2. Инвариантность оптимального управления в системе с динамическим масштабированием. Как было сказано ранее, при анализе проблемы оптимального управления на бесконечном интервале времени системой с динамическим масштабированием важную роль играет рассмотрение ситуации $\alpha_t \equiv 1$ в (1.1)–(1.2), т.е. постоянства коэффициентов. Для этого случая соответствующие результаты являются известными и будут приведены в данном разделе. При описании элементов такой автономной системы управления вводятся отдельные обозначения, что связано с последующей процедурой по замене времени. Состояние системы $\tilde{X}_\tau, \tau \ge 0,$ описывается уравнением

$$d\tilde{X}_\tau = A\tilde{X}_\tau d\tau + B\tilde{U}_\tau d\tau + Gd\tilde{W}_\tau, \quad \tilde{X}_0 = x. \tag{2.1}$$

Целевой функционал на $[0,\tilde{T}]$ имеет вид

$$\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}) = \int_0^{\tilde{T}} (\tilde{X}_\tau^{\mathrm{T}} Q\tilde{X}_\tau + \tilde{U}_\tau^{\mathrm{T}} R\tilde{U}_\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Оптимальный установившийся закон управления $\tilde{U}^*$ в системе (2.1)–(2.2) находится как

$$\tilde{U}_\tau^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}\tilde{X}_\tau^*, \tag{2.3}$$

где симметричная матрица $\bar{\Pi}$ – единственное неотрицательно определенное решение алгебраического уравнения Риккати:

$$\bar{\Pi}A + A\bar{\Pi} - \bar{\Pi}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi} + Q = 0, \tag{2.4}$$

процесс $\tilde{X}_\tau^*, \tau \ge 0$, является оптимальной траекторией и задается уравнением

$$d\tilde{X}_\tau^* = (A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi})\tilde{X}_\tau^* dt + Gd\tilde{W}_\tau, \quad \tilde{X}_0^* = x. \tag{2.5}$$

Основные результаты об оптимальности $\tilde{U}_\tau^*$ известны [25, теорема 5.4.3, с. 169; 26, теорема 2; 18, теорема 3.7, с. 275] и приводятся в следующей ниже теореме.

Т е о р е м а 1. Пусть выполнено предположение B. Тогда закон управления $\tilde{U}^*$, найденный в (2.3)–(2.5), будет решением следующих задач:

$$\limsup_{\tilde{T}\to\infty} \frac{E\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U})}{\tilde{T}} \to \inf_{\tilde{U}\in \mathrm{U}},$$

$$\limsup_{\tilde{T}\to\infty} \frac{\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U})}{\tilde{T}} \to \inf_{\tilde{U}\in \mathrm{U}} \quad \textit{с вероятностью } 1.$$

Оптимальные значения обоих критериев совпадают:

$$\limsup_{\tilde{T}\to\infty} \frac{E\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}^*)}{\tilde{T}} = \limsup_{\tilde{T}\to\infty} \frac{\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}^*)}{\tilde{T}} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}G)$$

($\mathrm{tr}(\cdot)$ – след матрицы, т.е. сумма ее диагональных элементов). При этом матрица $\tilde{A}^* = A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}$ экспоненциально устойчива.

Помимо изучения характеристик оптимальности $\tilde{U}^*_\tau$ также возникает вопрос оценки поведения траекторий процесса $\tilde{X}^*_\tau, \tau \geq 0$, из уравнения (2.5). Далее формулируется лемма, основанная на утверждениях [24, теорема 2; 29, лемма А.2].

Л е м м а 1. Пусть верны условия теоремы 1. Тогда для траекторий процесса $\tilde{X}^*_\tau, \tau \geq 0$, задаваемого (2.5), справедливы следующие соотношения:

1) $c_1 \leq E\|\tilde{X}^*_\tau\|^2 \leq c_2$ для $\tau \geq 0$ при некоторых константах $c_1, c_2 > 0$ [24];

2) существует неслучайная константа $\bar{c} > 0$, такая, что с вероятностью 1 выполняется неравенство [29]

$$\limsup_{\tau\to\infty} \frac{\|\tilde{X}^*_\tau\|^2}{\ln \tau} < \bar{c} < \infty.$$

Известно, что для линейных нестационарных систем распространенным подходом, помогающим устранить их неоднородность по времени, является преобразование переменных [30, 31]. В рассматриваемом же случае наличие управления в уравнении динамики, а также связанного с ним квадратичного функционала (1.2) не позволяет применить указанную выше технику. Однако при помощи замены времени

$$\tau = \int_0^t \alpha_s ds$$

система управления (1.1)–(1.2) с динамическим масштабированием может быть приведена к автономной системе (2.1)–(2.2).

Л е м м а 2. Пусть

$$\tau = \int_0^t \alpha_s ds. \tag{2.6}$$

Тогда системы управления (1.1)–(1.2) и (2.1)–(2.2) связаны следующим соотношением:

$$X_t = \tilde{X}_\tau, \quad U_t = \tilde{U}_\tau, \quad J_T(U) = \tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}),$$

где $\tilde{T} = \int_0^T \alpha_t dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Пусть τ определено в (2.6). Используется соответствующее (2.1) интегральное представление:

$$\tilde{X}_\tau = x + \int_0^\tau A\tilde{X}_s ds + \int_0^\tau B\tilde{U}_s ds + \int_0^\tau G d\tilde{W}_s.$$

При изменении переменной времени t определяются дифференциалы

$$d\left(\int_0^\tau A\tilde{X}_s ds\right) = A\tilde{X}_\tau d\tau = \alpha_t A\tilde{X}_\tau dt, \quad d\left(\int_0^\tau B\tilde{U}_s ds\right) = B\tilde{U}_\tau d\tau = \alpha_t B\tilde{U}_\tau dt.$$

Для стохастического интеграла применяется известный результат о замене времени, см. [32, следствие 8.5.4, с. 188], когда

$$\int_0^\tau d\tilde{W}_s = \tilde{W}_\tau = \int_0^t \sqrt{\alpha_s} dW_s$$

и, следовательно,

$$d\left(\int_0^\tau d\tilde{W}_s\right) = \sqrt{\alpha_t} dW_t.$$

Поэтому

$$d\tilde{X}_\tau = \alpha_t A\tilde{X}_\tau dt + \alpha_t B\tilde{U}_\tau dt + \sqrt{\alpha_t}GdW_t, \quad \tilde{X}_0 = x.$$

Сравнивая приведенное выше уравнение с уравнением динамики (1.1) для X_t, видим, что $X_t = \tilde{X}_\tau$, $U_t = \tilde{U}_\tau$. Используя полученные соотношения, целевой функционал (1.2) можно преобразовать при τ из (2.6) путем замены переменных в подынтегральном выражении:

$$J_T(U) = \int_0^T \alpha_t (X_t^{\mathrm{T}} QX_t + U_t^{\mathrm{T}} RU_t)dt = \int_0^{\tilde{T}} (\tilde{X}_\tau^{\mathrm{T}} Q\tilde{X}_\tau + \tilde{U}_\tau^{\mathrm{T}} R\tilde{U}_\tau)d\tau, \quad \text{где} \quad \tilde{T} = \int_0^T \alpha_t dt.$$

Таким образом, $J_T(U) = \tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U})$. Утверждение доказано.

Соотношение, полученное в лемме 2, также может дать представление о возникновении системы управления с динамическим масштабированием. Если исходная система управления (2.1)–(2.2) автономна, но непосредственно доступен только процесс $X_t = \tilde{X}_\tau$, где τ задано в (2.6), например, в силу несинхронности временных шкал протекающего процесса и наблюдателя (реализующего управляющее воздействие) [16], то управление (2.1)–(2.2) осуществляется на основе изменения (1.1) с функционалом (1.2).

По предположению A функция

$$\int_0^T \alpha_t dt \to \infty$$

при $T \to \infty$, а значит, и $\tilde{T} \to \infty$ в автономной системе (2.1)–(2.2) с измененным временем τ по (2.6). Тогда результаты теоремы 1 об оптимальном управлении очевидным образом могут быть использованы и для системы с динамическим масштабированием.

В условиях предположения B определим оптимальный установившийся закон управления:

$$U_t^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}X_t^*, \tag{2.7}$$

где процесс $X_t^*, t \ge 0$, является оптимальной траекторией и задается уравнением

$$dX_t^* = \alpha_t (A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi})X_t^* dt + \sqrt{\alpha_t}GdW_t, \quad X_0^* = x, \tag{2.8}$$

а матрица $\bar{\Pi} \ge 0$ определяется как решение алгебраического уравнения Риккати (2.4).

Из соотношений, установленных в лемме 2, и утверждения теоремы 1 следует справедливость приводимого ниже результата.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены предположения A и B. Тогда закон управления U^*, задаваемый (2.7)–(2.8), является оптимальным по критериям обобщенного долговременного среднего и потраекторного обобщенного долговременного среднего в системе с динамическим масштабированием, т.е. решением задач

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U\in \mathrm{U}}, \tag{2.9}$$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\int_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U\in \mathrm{U}} \quad \textit{с вероятностью } 1. \tag{2.10}$$

Значения критериев на оптимальном управлении U^* равны

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U^*)}{T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{J_T(U^*)}{T}=\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\overline{\Pi}G).$$

Установленный в теореме 2 результат показывает инвариантность вида оптимального управления при рассмотрении задач оптимизации в системе с динамическим масштабированием коэффициентов. Действительно, U^* в форме $U_t^*=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{\Pi}X_t^*$ известен как оптимальный установившийся закон для автономного стохастического линейного регулятора на бесконечном интервале времени (см. (2.3) и теорему 1). Вместе с тем следует отметить различие в используемых критериях оптимальности. Динамическое масштабирование параметров функцией α_t приводит к необходимости модификации долговременных средних из (1.3), (1.4) в направлении их обобщения путем применения нормировки $\int_0^T\alpha_t dt$ (см. (2.9) и (2.10)).

Следующее далее замечание характеризует стабилизирующие свойства управления U^* и его оптимальность в детерминированной системе (1.1)–(1.2), т.е. для $G=0$. При этом предполагаются выполненными условия теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. Матрица $A^*=\alpha_t(A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{\Pi})$ в (2.7) является асимптотически устойчивой с темпом $\delta_t=\lambda\alpha_t$ ($\lambda>0$ – некоторая константа), т.е. соответствующая A_t^* фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ допускает оценку

$$\|\Phi(t,s\|\le\kappa\exp\left(-\lambda\int_s^t\alpha_v dv\right),\quad s\le t,$$

при некоторой константе $\kappa>0$. Данный факт следует из указанного в теореме 1 свойства экспоненциальной устойчивости матрицы $\tilde{A}^*=A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{\Pi}$, а также соотношений

$$A_t^*=\alpha_t\tilde{A}^*\quad\text{и}\quad\Phi(t,s)=\exp\left\{\tilde{A}^*\int_s^t\alpha_v dv\right\},$$

см. [30]. Для детерминированной системы управления (1.1)–(1.2) стратегия U^* является решением задачи $\limsup_{T\to\infty}J_T(U)\to\inf_{U\in\mathrm{U}}$, а значение $\limsup_{T\to\infty}J_T(U^*)=x^{\mathrm{T}}\overline{\Pi}x$.

Приводимые ниже результаты относительно оценки асимптотического поведения оптимальной траектории X_t^* в среднем квадратичном, а также в смысле почти наверное формулируются на основе леммы 1 с соответствующей корректировкой по замене времени.

З а м е ч а н и е 2. Существуют константы $c_1,c_2>0$, такие, что $c_1\le E\|X_t^*\|^2\le c_2$ для $t\ge0$. Такая равномерная ограниченность процесса в среднем квадратичном аналогична результату, известному для оптимальной траектории в задаче синтеза автономного стохастического линейного регулятора [24].

З а м е ч а н и е 3. Существует неслучайная константа $\overline{c}>0$, такая, что с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\|X_t^*\|^2}{\ln\left(\int_0^t\alpha_s ds\right)}<\overline{c}<\infty.$$

Подобная верхняя оценка является обобщением логарифмической верхней функции, известной для случая $\alpha_t\equiv1$ при анализе асимптотического поведения квадрата нормы оптимальной траектории процесса в автономной системе [29].

К важным характеристикам оптимального закона управления U^* (2.6)–(2.7) относится его взаимосвязь с решениями задач оптимизации при конечном T. Известно (например [18, теорема 3.9, с. 301]), что стратегия $U_t^{*T} = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi_t^T X_t^*$ оптимальна в задаче $EJ_T(U) \to \inf_{U\in \mathrm{U}}$ (здесь индекс ^{T} означает решение для конечного T), функция $\Pi_t^T \geq 0$ удовлетворяет уравнению Риккати $\dot{\Pi}_t^T + \alpha_t\Pi_t^T A + \alpha_t A^{\mathrm{T}}\Pi_t^T - \alpha_t\Pi_t^T BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi_t^T + \alpha_t Q = 0$ с граничным условием $\Pi_T^T = 0$, X_t^{*T} – соответствующий процесс, определяемый по (1.1) при $t \leq T$. При сформулированных предположениях существует $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^T = \bar{\Pi}$, где матрица $\bar{\Pi} \geq 0$ – решение алгебраического уравнения Риккати (2.4). Ключевым условием здесь является

$$\int_0^t \alpha_s ds \to \infty$$

при $t \to \infty$ (см. предположение A), что можно проследить, рассмотрев ниже пример управления скалярным процессом.

3. Пример задачи управления скалярным процессом и анализ условий оптимальности. Рассмотрим систему управления (1.1)–(1.2) в скалярном случае:

$$dX_t = \alpha_t a X_t dt + \alpha_t b U_t dt + \sqrt{\alpha_t} g dW_t, \quad X_0 = x, \quad g \neq 0. \tag{3.1}$$

$$J_T(U) = \int_0^T \alpha_t (qX_t^2 + rU_t^2) dt, \quad q \geq 0, \quad r > 0. \tag{3.2}$$

Нетрудно заметить, что выполнение предположения B возможно в следующих ситуациях ограничений на параметры: 1) a – любое, $b \neq 0$, $q > 0$, 2) $a < 0$, $b = 0$, $q > 0$, 3) $a < 0$, $b = 0$, $q = 0$. Случай 3) тривиален, так как влечет $\bar{\Pi} = 0$ в (2.4) и в дальнейшем не рассматривается. Алгебраическое уравнение Риккати (2.4) $2a\bar{\Pi} - (b^2/r)\bar{\Pi}^2 + q = 0$ имеет решения $\bar{\Pi}^{(1)} = (a + \sqrt{a^2 + qb^2/r})(r/b^2)$, $\bar{\Pi}^{(2)} = -q/(2a)$ для 1) и 2) соответственно. Решения дифференциального уравнение Риккати

$$\dot{\Pi}_t^T + 2\alpha_t a\Pi_t^T - \alpha_t (b^2/r)(\Pi_t^T)^2 + q\alpha_t = 0$$

с граничным условием $\Pi_T^T = 0$ могут быть получены на основе замены времени (лемма 2) и результатов для регулятора с постоянными коэффициентами [33, с. 147]:

$$\Pi_t^{(1)T} = \bar{\Pi}^{(1)} - \frac{2\beta(r/b^2)}{[(\beta - a)/(\beta + a)]\exp\left\{2\beta\int_t^T \alpha_s ds\right\} + 1}, \tag{3.3}$$

$$\beta = \bar{\Pi}^{(1)}(b^2/r) - a > 0,$$

$$\Pi_t^{(2)T} = \bar{\Pi}^{(2)} - \bar{\Pi}^{(2)}\exp\left\{2a\int_t^T \alpha_s ds\right\}. \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) очевидно, что $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^{(1)T} = \bar{\Pi}^{(1)}$ и $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^{(2)T} = \bar{\Pi}^{(2)}$ только при условии

$$\int_0^t \alpha_s ds \to \infty, \quad t \to \infty.$$

В противном случае, когда

$$\int_0^\infty \alpha_t dt < \infty,$$

предел $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^T$ не является решением алгебраического уравнения Риккати, и инвариантность управления U^* по времени уже не будет иметь место, что обусловлено отсутствием перехода к автономному стохастическому линейному регулятору на бесконечном временном интервале при управлении системой с динамическим масштабированием.

4. Анализ задачи динамической стабилизации для макроэкономики. Далее приводится пример задачи макроэкономической стабилизации, в которой используются результаты теоремы 2, замечаний 2, 3 и примера из разд. 3. При этом за основу берется модель из [34], а класс функций α_t степенного вида определяется по [23]. Отметим, что под динамической задачей макроэкономической стабилизации понимается поддержание траектории системы (набора экономических переменных) вблизи заданного уровня [35, Pt III] в течение планового периода с учетом возникающих издержек по управлению. Управление осуществляется при помощи выбора инструментов (также экономических переменных) и часто формулируется в виде задачи синтеза линейного регулятора на бесконечном интервале времени [36, 37]. В данном примере рассматривается корректировка уровня безработицы. Акцент делается на фрикционную и структурную составляющие безработицы (структурная безработица связана с изменением структуры экономики со стороны производства и потребления, фрикционная – с добровольной сменой места работы ввиду переезда и т.д.). В качестве инструмента управления используются государственные расходы на так называемую активную политику на рынке труда (затраты на переобучение, инфраструктуру центров занятости, информационную поддержку, повышение мобильности населения и т.д., в отличие от “пассивной политики” изменения минимального размера оплаты труда и пособий по безработице). Таким образом, будет рассматриваться скалярный процесс вида (1.1) (см. также (3.1)). При этом предполагается, что состояние X_t и управление U_t описывают отклонение соответствующих экономических переменных от своих плановых уровней:

$$dX_t = (1+t)^p(-\gamma)X_t dt - (1+t)^p\beta U_t dt + (1+t)^{p/2} g dW_t, \quad X_0 = x, \quad g \neq 0, \tag{4.1}$$

где константа $\gamma > 0$ задает скорость стремления безработицы к своему плановому естественному уровню в долгосрочном периоде при отсутствии управляющих воздействий и внешних шоков; константа $\beta > 0$ характеризует мультипликатор влияния государственных расходов на динамику безработицы; $g > 0$ – степень воздействия неопределенности; функция $\alpha_t = (t+1)^p$, $p \geq -1$. Модель вида (4.1) при $U_t \equiv 0$ ранее рассматривалась в [34], возникновение масштабирующей функции α_t было обусловлено наличием “операционного” (т.е. внутреннего) времени развития системы. Функция α_t степенного вида использовалась в работе [23] при эконометрическом моделировании безработицы (в частности, по данным для США была получена оценка $p = 10$). В задаче стабилизации целевой функционал имеет интегральный квадратичный вид (3.2) и учитывает потери из-за отклонения переменных состония и управления от своих плановых значений с учетом фактора времени и приоритета издержек. Точнее,

$$J_T(U) = \int_0^T (1+t)^p(\lambda X_t^2 + (1-\lambda)U_t^2)dt, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{4.2}$$

Если $p < 0$ в (4.2), то значимость фактора времени наступления потерь уменьшается при $t \to \infty$ и возникает так называемое “гиперболическое” дисконтирование (термин используется в экономике и когнитивных науках [38]). При $p > 0$, наоборот, будущим затратам придается больший вес, что, как известно из теории управления, способствует усилению стабилизирующих свойств оптимальной стратегии [39, Section 3.5], а также [24], и такие функционалы носят название взвешенных по времени интегральных квадратичных критериев качества, применяемых в инженерных приложениях [40, 41]. Для $p = 0$ имеет место нейтральность ко времени возникновения потерь и стандартная автономная система управления. Константа $0 < \lambda < 1$ задает приоритет одного из двух видов затрат (потерь из-за отклонения состояния или издержек по управлению). Согласно результатам теоремы 2 и примера из разд. 3, будем иметь оптимальный закон управления $U_t^* = \beta(1-\lambda)^{-1}\bar{\Pi}X_t^*$, где

$$\bar{\Pi} = -\gamma\beta^{-2}(1-\lambda) + \beta^{-2}\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 + \beta^2\lambda(1-\lambda)}.$$

Динамика оптимальной траектории будет иметь вид

$$dX_t^* = (1+t)^p\,(-\sqrt{\gamma^2 + \beta^2\lambda(1-\lambda)^{-1}})X_t^* dt + (1+t)^{p/2}\,g dW_t, \quad X_0 = x. \tag{4.3}$$

Обозначим $\mu(\lambda) = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2\lambda(1-\lambda)^{-1}}$. При этом "коэффициент усиления" $k(\lambda)$ в законе управления $U_t^* = k(\lambda)X_t^*$, где $k(\lambda) = -\gamma\beta^{-1} + \beta^{-1}\sqrt{\gamma^2 + \beta^2\lambda(1-\lambda)^{-1}}$, возрастает по λ. Таким образом, чем выше значимость стабилизации самой траектории экономической переменной в формировании целевого функционала, тем больший показатель устойчивости (в терминах множителя $\mu(\lambda)$ для (4.3)) будет обеспечивать соответствующая оптимальная стратегия управления. Тогда, согласно замечанию 2, отклонение уровня безработицы от своего планового значения будет поддерживаться в фиксированных пределах (в среднеквадратичной метрике). Для самих же траекторий процесса безработицы (см. замечание 3) динамическая оценка их долгосрочных колебаний может быть выражена в виде логарифмической функции времени при $p > -1$ и дважды логарифмической, если $p = -1$.

Заключение. Полученный в работе результат (см. теорему 2) характеризует инвариантность решения задачи управления системой с масштабированием на бесконечном интервале времени. Вид управления U^* совпадает с оптимальной стратегией, найденной для случая автономной системы. Значения соответствующих критериев оптимальности при использовании U^* также сохраняются. При этом меняется вид самих критериев – вместо длины интервала планирования T в качестве нормировки целевых функционалов применяется функция $\int_0^T \alpha_t dt$ интегрального масштабирования. Следует отметить, что подобная инвариантность в задачах синтеза стохастических линейных регуляторов с переменными параметрами может возникнуть и при других предположениях, например, в работе [42], где рассматривалась система с асимптотически постоянными матрицами $A_t \to A$, $B_t \to B$, $G_t \to G$, $Q_t \to Q$, $R_t \to R$, в предположении о достаточно быстрой сходимости, точнее

$$\int_0^\infty \|A_t - A\| dt < \infty$$

и т.д. Это условие позволило использовать решение алгебраического, а не дифференциального уравнения Риккати для построения оптимальной стратегии в рамках обычного критерия долговременного среднего. В данной статье также было показано применение полученных результатов в динамической задаче макроэкономической стабилизации со степенной масштабирующей функцией. В качестве направления дальнейших исследований следует выделить рассмотрение ситуации, когда для масштабирующей функции

$$\int_0^\infty \alpha_t dt < \infty.$$

Изучение простого скалярного примера показывает, что при таком предположении инвариантность оптимального управления уже не имеет места и требуется привлечение других методов анализа, основанных на асимптотиках решений дифференциальных уравнений Риккати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhong W.X.* Duality System in Applied Mechanics and Optimal control. N.Y.: Springer, 2006.
2. *Arora J.S. (Ed.)* Optimization of Structural and Mechanical Systems. Singapore: World Scientific, 2007.
3. *Tewari A.* Aeroservoelasticity: Modeling and Control. N.Y.: Springer, 2015.
4. *Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Статистическая динамика управляемого полета. М.: Машиностроение, 1978.
5. *Малышев В.В.* Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления: Учеб. пособие. М.: МАИ, 2010.
6. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I // АиТ. 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441.
7. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов II // АиТ. 1960. Т. 21. № 5. С. 561–568.

8. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов III // АиТ. 1960. Т. 21. № 6. С. 661–665.

9. *Якубович В.А.* Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // АиТ. 1984. № 8. С. 5–45.

10. *Казаков И.Е., Гладков Д.И.* Методы оптимизации стохастических систем. М.: Наука, 1987.

11. *Кибзун А.И.* Стохастическое управление динамическими системами: Учеб. пособие. М.: МАИ, 1991.

12. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems. N.Y.: Springer, 2012.

13. *Wu J.C., Yang J.N.* Control of Lateral-Torsional Motion of Nanjing TV Transmission Tower // Computational Mechanics in Structural Engineering: Recent Developments. N.Y.: Elsevier, 1999. P. 43–56.

14. *Tan Z., Bainum P.M.* Optimal Linear Quadratic Gaussian Digital Control of an Orbiting Tethered Antenna/Reflector system // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 234–241.

15. *Lamperski A., Cowan N.J.* Time-changed Linear Quadratic Regulators // Control Conf. (ECC), 2013 European. N.Y.: IEEE, 2013. P. 198–203.

16. *Singh R., Gupta V.* On LQR Control with Asynchronous Clocks // Decision and Control and Europ. Control Conf. (CDC-ECC), 50th IEEE Conf. N.Y.: IEEE, 2011. P. 3148–3153.

17. *Aadland D., Shaffer S.* Time Compression and Saving Rates // J. Neuroscience, Psychology, and Economics. 2015. V. 8. № 4. P. 217–240.

18. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.

19. *Karafyllis I., Tsinias J.* Non-uniform in Time Stabilization for Linear Systems and Tracking Control for Nonholonomic Systems in Chained Form // Intern. J. Control. 2003. V. 76. № 15. P. 1536–1546.

20. *Smith P.L., Ratcliff R., Sewell D.K.* Modeling Perceptual Discrimination in Dynamic Noise: Time-Changed Diffusion and Release from Inhibition // J. Mathematical Psychology. 2014. V. 59. P. 95–113.

21. *Jiang H., Gray H.L., Woodward W.A.* Time-frequency Analysis – G (λ)-stationary Processes // Computational Statistics & Data Analysis. 2006. V. 51. № 3. P. 1997–2028.

22. *Vijverberg C.P.C.* Time Deformation, Continuous Euler Processes and Forecasting // J. Time Series Analysis. 2006. V. 27. № 6. P. 811–829.

23. *Vijverberg C.P.C.* A Time Deformation Model and its Time-varying Autocorrelation: an Application to US Unemployment Data // Intern. J. Forecasting. 2009. V. 25. № 1. P. 128–145.

24. *Паламарчук Е.С.* Стабилизация линейных стохастических систем с дисконтированием: моделирование долгосрочных эффектов применения оптимальных стратегий управления // Мат. моделирование. 2015. Т. 27. № 1. С. 3–15.

25. *Дэвис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.

26. *Palamarchuk E.* On Infinite Time Linear-Quadratic Gaussian Control of Inhomogeneous Systems // Control Conf. (ECC), 2016 European. N.Y.: IEEE, 2016. P. 2477–2482.

27. *Паламарчук Е.С.* Анализ критериев долговременного среднего в задаче стохастического линейного регулятора // АиТ. 2016. № 10. С. 78–92.

28. *Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // АиТ. 2013. № 4. С. 110–128.

29. *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М., Пресман Э.Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 4. С. 661–675.

30. *Wu M.-Y., Sherif A.* On the Commutative Class of Linear Time-Varying Systems // Intern. J. Control. 1976. V. 23. № 3. P. 433–444.

31. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 6–15.

32. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ, 2003.

33. *Lewis F.L., Vrabie D., Syrmos V.L.* Optimal control. N.Y.: John Wiley & Sons, 2012.

34. *Stock J.H.* Hysteresis and the Evolution of Postwar US and UK Unemployment // Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity: Proceedings of the Fourth International Sympos. in Economic Theory and Econometrics / Eds W.A. Barnett, J. Geweke, K. Shell. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1989. P. 361–382.

35. *Turnovsky S.J.* Macroeconomic Analysis and Stabilization Policy. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1977.

36. *Sengupta J.K.* Optimal Stabilization Policy with a Quadratic Criterion Function // The Review of Economic Studies. 1970. V. 37. № 1. P. 127–145.
37. *Sack B.* Does the Fed Act Gradually? A VAR analysis // J. Monetary Economics. 2000. V. 46. № 1. P. 229–256.
38. *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation // The Quarterly J. Economics. 1992. V. 107. № 2. P. 573–597.
39. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Courier Corporation, 2007.
40. *Bonkas E.K., Liu Z.K.* Suboptimal Design of Regulators for Jump Linear System with Time-multiplied Quadratic Cost // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. V. 46. № 1. P. 131–136.
41. *Xie X., Lam J., Fan C.* Robust Time-weighted Guaranteed Cost Control of Uncertain Periodic Piecewise Linear Systems // Information Sciences. 2018. V. 460. P. 238–253.
42. *Czornik A.* On Time-varying LQG // IFAC Proceedings Volumes. 1998. V. 31. № 18. P. 411–415.