

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ РАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ**

©2021 г. Э. Я. Рапопорт

*Самарский государственный технический ун-т, Самара, Россия*

*e-mail: edgar.rapoport@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.

После доработки 12.09.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Предлагается конструктивный метод синтеза оптимального управления детерминированными и не полностью определенными системами с распределенными параметрами параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения оптимальных алгоритмов программного управления, который распространяет на широкий круг параметризуемых задач оптимального управления результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использует фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что искомые уравнения оптимальных регуляторов сводятся к линейным с нестационарными коэффициентами законам обратной связи по управляемому выходу объекта, которые реализуются непосредственно по результатам неполного измерения состояния системы с погрешностью, уменьшающейся с ростом числа учитываемых модальных составляющих управляемой величины.

DOI: 10.31857/S0002338821030148

**Введение.** Начиная с основополагающих работ А.М. Летова [1, 2] классическая задача синтеза оптимальных регуляторов в линейных системах с квадратичными критериями оптимальности до настоящего времени остается одной из центральных в теории и технике автоматического управления [3–8]. Большинство работ в этом направлении относится к системам с сосредоточенными параметрами (ССП), для которых известные результаты получены методами вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина, динамического программирования для детерминированных моделей объекта [1–5] и с привлечением аппарата функций Ляпунова и линейных матричных неравенств в условиях ограниченной неопределенности модельных представлений [6–8].

Проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в линейно-квадратичных задачах оптимизации обладает принципиальной спецификой в системах управления динамическими объектами с распределенными параметрами (СРП), в рамках моделей которых описывается широкий круг управляемых процессов самой различной физической природы [9]. Возникающие здесь особенности связаны прежде всего с необходимостью решения задачи АКОР в условиях бесконечной размерности пространственно распределенной управляемой величины [10–13].

Задачи синтеза СРП в указанной постановке рассматривались путем распространения на системы с распределенными параметрами метода динамического программирования в идеализированных и реализуемых условиях соответственно полного и неполного измерения управляемых функций состояния объекта [10–13]. Основные результаты решения проблемы АКОР в СПП и СРП получены применительно к задачам со свободным или подвижным правым концом траек-

тории движения объекта с использованием классических условий трансверсальности на гладкой границе области допустимых конечных состояний управляемой системы.

Однако в целом ряде типичных для приложений и представляющих самостоятельный интерес ситуаций требования к конечному состоянию СРП предъявляются в чебышевской метрике в форме допустимой величины ошибки равномерного приближения управляемой величины к заданному распределению в пространственной области ее определения [13–15]. Известные условия трансверсальности неприменимы на негладкой границе соответствующего целевого множества в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, что существенно усложняет решение краевой задачи оптимального управления. В целях опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы ее специальные альтернативные свойства, определяемые по схеме конструктивного альтернативного метода, который является распространением на задачи оптимизации теории нелинейных чебышевских приближений [13–15].

В настоящей работе предлагается метод решения задачи АКОР для линейных моделей СРП параболического типа в условиях равномерных оценок целевых множеств применительно к детерминированному варианту и в условиях воздействия множественных возмущений. Развиваемый подход существенно опирается на результаты решения задачи оптимального программного управления с помощью альтернативных свойств искоемых экстремалей [13–15].

**1. Постановка задачи.** Пусть управляемая величина  $Q(x, t)$  объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты  $x \in [x_0, x_1]$  и времени  $t \in [0, t^*]$  одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с самосопряженным дифференциальным оператором в его правой части:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x) Q(x, t) + f_v(x) u_v(t) + f_\eta(x) \eta_1(t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} < 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = u_s(t) + \eta_2(t); \quad 0 \leq t \leq t^* \quad (1.3)$$

при сосредоточенном внутреннем  $u_v(t)$  или граничном  $u_s(t)$  кусочно-непрерывных управляющих воздействиях; заданных достаточно гладких функциях  $f_v(x)$ ,  $f_\eta(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $c_1(x)$ ; постоянных коэффициентах  $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_0, \beta_1 > 0$  и кусочно-непрерывных внешних возмущениях  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$ , учитываемых далее только по каналу управляющего воздействия. Управляющие и возмущающие воздействия не стесняются никакими дополнительными ограничениями.

Всюду далее исключается для простоты случай одновременного использования  $u_v(t)$  и  $u_s(t)$ , полагая

$$u(t) = u_v(t) \quad \text{или} \quad u(t) = u_s(t); \quad (1.4)$$

$$\eta(t) = \eta_1(t) \quad \text{или} \quad \eta(t) = \eta_2(t). \quad (1.5)$$

Пусть необходимо обеспечить за фиксируемое априори конечное время  $t^*$  заданную точность  $\varepsilon$  равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины  $Q(x, t^*)$  к требуемому  $Q^{**}(x) = Q^{**} = 0$ , согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t^*)| \leq \varepsilon, \quad (1.6)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [13–15].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.6) оценивается квадратичным функционалом качества, определяемым для простоты и наглядности без потери общности основных результатов в следующей типичной для приложений частной форме:

$$I(u, \eta) = \int_0^{t^*} \int_{x_0}^{x_1} \rho_Q Q^2(x, t) dx dt + \int_0^{t^*} (u^2(t, \eta(t)) - \rho_\eta \eta^2(t)) dt \rightarrow \min_u \quad (1.7)$$

с постоянными положительными весовыми коэффициентами  $\rho_Q$  и  $\rho_\eta$ .

Применение к уравнениям объекта (1.1)–(1.3) конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу с ядром, равным его собственным функциям  $\varphi_n(\mu_n, x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\mu_n^2$  – собственные числа, приводит к представлению СРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$  разложения  $Q(x, t)$  в сходящийся в среднем ряд по  $\varphi_n(\mu_n, x)$  [16]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{vn}u_v(t) + k_{1n}\eta_1(t) + k_{sn}u_s(t) + k_{2n}\eta_2(t); \tag{1.8}$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x). \tag{1.9}$$

Здесь  $k_{vn}, k_{1n}, \bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$  – моды конечных интегральных преобразований функций  $f_v(x), f_{\eta}(x)$  и  $Q_0(x)$  соответственно,  $k_{sn}, k_{2n}$  – известные постоянные коэффициенты [16].

Можно показать [17, 18], что в малостеснительных условиях выполнения усиленных [17, 18] условий Коши–Липшица система уравнений (1.8) имеет единственное решение при заданных воздействиях  $u(t), \eta(t)$ , которое с любой требуемой точностью при необходимости аппроксимируется решением “укороченной” системы, образуемой достаточно большим конечным числом  $N$  первых уравнений (1.8) при  $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0 \quad \forall n > N$ , т.е. оказывается допустимой конечномерная аппроксимация модели (1.8) при  $n = \overline{1, N}$ ,  $N < \infty$ . Всюду далее на этом основании учитываются  $N_1$  мод  $\bar{Q}_n, n = \overline{1, N_1}$  в (1.8), где  $N_1 = \infty$  или  $N_1 = N < \infty$  в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления. Конкретный выбор числа  $N_1$  должен производиться при проектировании системы управления, исходя из практически требуемой точности описания модели объекта  $N_1$  уравнениями (1.8).

Переход к описанию СРП в (1.8), (1.9) в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций [16] к представлению критерия (1.7) в следующем виде:

$$I_1(u, \eta) = \int_0^{t^*} \left[ \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + u^2(t, \eta(t)) - \rho_{\eta} \eta^2(t) \right] dt \rightarrow \min_u, \tag{1.10}$$

а требования (1.6) к конечному состоянию объекта представляются условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*)\varphi_n(\mu_n, x) \right| \leq \varepsilon. \tag{1.11}$$

Рассматриваемая задача АКОР сводится к определению алгоритма обратной связи  $u(Q, t, \eta)$ , обеспечивающего перевод не полностью определенного в условиях воздействия внешних возмущений бесконечномерного объекта (1.8), (1.9) в требуемое конечное состояние (1.11) при минимально возможном значении критерия оптимальности (1.10).

В типичных частных случаях внешнее возмущение  $\eta(t)$  в (1.5) определяется заданной кусочно-непрерывной функцией времени [3, 4].

**2. Программное оптимальное управление при детерминированном возмущении.** Структура оптимального управления. На сформулированную бесконечномерную задачу оптимизации распространяется принцип максимума Понтрягина [13, 19]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \eta(t)) = \max_u H(\bar{Q}^*(t), u(t), \psi^*(t), \eta(t)), \quad t \in (0, t^*) \tag{2.1}$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах  $\bar{Q}^*(t)$ ,  $u^*(t)$ ,  $\psi^*(t)$  максимума функции Понтрягина  $H$  по переменной  $u$  для рассматриваемой задачи оптимизации (1.8)–(1.11)

$$H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t)) = -\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) - u^2(t, \eta(t)) + \rho_\eta \eta^2(t) + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{vn} u_v(t) + k_{1n} \eta_1(t) + k_{sn} u_s(t) + k_{2n} \eta_2(t)), \quad (2.2)$$

где  $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , и вектор сопряженных переменных  $\psi(t) = (\psi_n(t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_p} = 2\rho_Q \bar{Q}_p(\mu_p, t) + \mu_p^2 \psi_p(t), \quad p = \overline{1, N_1}, \quad (2.3)$$

определяет в открытой области изменения управляющих воздействий программное оптимальное управление  $u^*(t)$  в форме явной функции от  $\psi^*(t)$ :

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t). \quad (2.4)$$

Здесь

$$k_n = k_{vn}, \quad \text{если } u(t) = u_v(t), \quad \text{или } k_n = k_{sn}, \quad \text{если } u(t) = u_s(t). \quad (2.5)$$

*Краевая задача принципа максимума.* Уравнения (1.8) с подстановкой управляющего воздействия в виде (2.4) образуют совместно с (2.3) линейную программно-управляемую систему, замыкаемую относительно неизвестных  $\bar{Q}(t)$  и  $\psi(t)$  требованиями (1.11) к конечному состоянию объекта:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_p}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_p + \mu_p^2 \psi_p, \quad p = \overline{1, N_1}; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} k_n \sum_{i=1}^{N_1} k_i \psi_i + \tilde{k}_n \eta(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_n^{(0)}(\mu_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где по-прежнему  $k_n$  определяется, согласно (2.5), и  $\tilde{k}_n = k_{1n}$ ,  $\eta(t) = \eta_1(t)$ , если  $u(t) = u_v(t)$ ,  $\tilde{k}_n = k_{2n}$ ,  $\eta(t) = \eta_2(t)$ , если  $u(t) = u_s(t)$ .

Решение этой системы может быть представлено в векторно-матричной форме [3, 4]:

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \bar{Q}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} C \eta(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Здесь

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ k_\eta \end{bmatrix}, \quad k_\eta = (\tilde{k}_n), \quad n = \overline{1, N_1},$$

вектор-столбец коэффициентов  $\tilde{k}_n$ ;  $A$  – матрица коэффициентов системы (2.6);  $e^{At}$  – определяемая известными способами [3, 4, 20, 21] нормированная фундаментальная матрица размерностью  $2N_1 \times 2N_1$  (матричная экспонента), столбцами которой являются линейно-независимые решения однородной системы (2.6) при  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

Матричная экспонента представляется в блочном виде

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где блоки  $A_{ij}(t)$ ;  $i, j = 1, 2$ , – известные матрицы размерности  $N_1 \times N_1$  в соответствии со структурой системы уравнений (2.6) [3, 4, 20].

*Параметризация управляющих воздействий.* Согласно (2.7),  $\psi(t)$ , а, следовательно, и программное управление (2.4) определяются для каждой известной величины  $\bar{Q}(0)$  с точностью до вектора  $\psi(0)$  начальных значений сопряженных функций, выступающих, таким образом, в роли параметрического представления  $u^*(t)$  [22, 23]. Однако для СРП такой подход оказывается неконструктивным, прежде всего, в силу бесконечной размерности этого вектора в (2.6) при  $N_1 = \infty$ . В работе [15] применительно к требованиям (1.11), предъявляемым к  $\bar{Q}^*(t^*)$ , предложен конструктивный способ последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий (“ $\psi$ -параметризация”) на множестве  $M$ -мерных векторов  $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;  $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t^*)$ ,  $M < N_1$ , конечных значений  $\tilde{\psi}_i$  первых  $M$  сопряженных функций в (2.6) при равных нулю всех остальных значениях  $\psi_i(t^*)$ :

$$\psi^{(M)} = (\psi_i(t^*)) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t^*) = 0, \quad \text{если } i > M. \quad (2.9)$$

С возрастанием  $M$  обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (2.9) управляющих воздействий вида (2.4) в сужающееся к началу координат в пространстве  $(\bar{Q}_n)$  целевое множество, гарантируя выполнение условий (1.11) для достижимых значений  $\varepsilon$  при некотором конечном значении  $M \geq 1$  [15].

С целью определения в явной форме  $\psi$ -параметризованного управления найдем вектор  $[\psi^T(0) \bar{Q}^T(0)]^T$  из (2.7) при  $t = t^*$  и, подставляя результат опять в (2.7), получим решение системы (2.6) в форме его зависимости от конечного состояния  $[\psi^T(t^*) \bar{Q}^T(t^*)]^T$ :

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{-A(t^*-t)} \begin{bmatrix} \psi(t^*) \\ \bar{Q}(t^*) \end{bmatrix} - \int_t^{t^*} e^{-A(\tau-t)} C \eta(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

С учетом блочного представления (2.8) матричной экспоненты равенство (2.10) определяет векторы  $\psi(t)$  и  $\bar{Q}(t)$  в следующей форме:

$$\psi(t) = \hat{A}_{11}(t^* - t)\psi(t^*) + \hat{A}_{12}(t^* - t)\bar{Q}(t^*) + \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (2.11)$$

$$\bar{Q}(t) = \hat{A}_{21}(t^* - t)\psi(t^*) + \hat{A}_{22}(t^* - t)\bar{Q}(t^*) + \tilde{D}_{Q\eta}; \quad (2.12)$$

где

$$\tilde{D}_{\psi\eta} = -\int_t^{t^*} \hat{A}_{12}(\tau - t) k_\eta \eta(\tau) d\tau; \quad \tilde{D}_{Q\eta} = -\int_t^{t^*} \hat{A}_{22}(\tau - t) k_\eta \eta(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

и  $\hat{A}_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ , – подобные (2.8) блоки обратной матрицы  $e^{-At}$ .

После подстановки (2.8) в (2.7) будем иметь, согласно (2.7), при  $t = t^*$ :

$$\psi(t^*) = A_{11}(t^*)\psi(0) + A_{12}(t^*)\bar{Q}(0) + D_{\psi\eta}; \quad (2.14)$$

$$\bar{Q}(t^*) = A_{21}(t^*)\psi(0) + A_{22}(t^*)\bar{Q}(0) + D_{Q\eta}, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\psi\eta} &= \int_0^{t^*} A_{12}(t^* - \tau) k_\eta \eta(\tau) d\tau; \\ D_{Q\eta} &= \int_0^{t^*} A_{22}(t^* - \tau) k_\eta \eta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Определяя  $\psi(0)$  из (2.14) и подставляя результат в (2.15), получим следующее выражение для  $\bar{Q}(t^*)$  в форме линейной функции начального состояния объекта  $\bar{Q}(0)$  и априори неизвестных конечных значений  $\psi(t^*)$  сопряженных переменных:

$$\bar{Q}(t^*) = B(t^*)\psi(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0) + D_\eta(t^*), \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} B(t^*) &= A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*); \\ B_1(t^*) &= A_{22}(t^*) - A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*)A_{12}(t^*); \\ D_\eta(t^*) &= D_{Q\eta} - A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*)D_{\psi\eta}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При описании  $\bar{Q}(t^*)$  в (2.11), (2.12) соотношением (2.17) получим, согласно (2.11), следующее выражение для вектора  $\psi^*(t)$  в оптимальном процессе в зависимости от его параметризуемой конечной величины  $\psi^*(t^*)$  в (2.9) и начального состояния объекта  $\bar{Q}(0)$ :

$$\psi^*(t) = [\hat{A}_{11}(t^* - t) + \hat{A}_{12}(t^* - t)B(t^*)]\psi^*(t^*) + \hat{A}_{12}(t^* - t)B_1(t^*)\bar{Q}(0) + \hat{A}_{12}(t^* - t)D_\eta(t^*) + \tilde{D}_{\psi\eta}. \quad (2.19)$$

Искомое программное управление (2.4)

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) = \frac{1}{2} K \psi^*(t); \quad K = (k_n), \quad \psi^*(t) = (\psi_n^*(t)), \quad (2.20)$$

где  $K$  – матрица – строка,  $\psi^*(t)$  – матрица-столбец, определяется в  $\psi$ -параметризованной форме в виде линейной зависимости от  $\psi^{(M)}$  в (2.9) после подстановки (2.19) в (2.20).

*Редукция к задаче полубесконечной оптимизации.* Интегрирование уравнений системы (2.6) с  $\psi$ -параметризованным управляющим воздействием вида (2.9), (2.19), (2.20) позволяет получить при заданном детерминированном воздействии  $\eta(t)$  зависимости  $Q(x, \psi^{(M)})$  управляемой величины в конце процесса управления и критерия оптимальности  $I_1(\psi^{(M)})$  в (1.9), (1.10) для каждого значения  $\bar{Q}(0)$  в форме явных функций только своих аргументов [15].

В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [13–15]:

$$I_1(\psi^{(M)}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}}; \quad \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)})| \leq \varepsilon \quad (2.21)$$

на экстремум функции  $I_1(\psi^{(M)})$  конечного числа  $M$  переменных  $\tilde{\psi}_i, i = \overline{1, M}$ , с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (1.11) для всех  $x \in [x_0, x_1]$ .

Как показано в [15], для заданной величины  $\varepsilon$  в (1.11) размерность  $M$  вектора  $\psi^{(M)}$  однозначно определяется соотношением

$$M = \nu \forall \varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(\nu)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\nu-1)}, \quad (2.22)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\nu)} = \min_{\psi^{(\nu)}} \{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(\nu)})| \}. \quad (2.23)$$

Значения  $\varepsilon_{\min}^{(\nu)}$  образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием  $\nu$ , и задача (2.21) оказывается разрешимой, если  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$ . Здесь точная нижняя грань  $\varepsilon_{\inf}$  достижимых значений  $\varepsilon$  оказывается равной минимуму  $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$ , где  $\rho = \infty$  при  $\varepsilon_{\inf} = 0$  и  $\rho < \infty$  при  $\varepsilon_{\inf} > 0$  соответственно для управляемых и неуправляемых относительно  $Q^{**}(x) \equiv 0$  объектов [13].

*Решение задачи полубесконечной оптимизации.* Решение ЗПО (2.21)–(2.23) относительно вектора параметров  $\psi^{(M)}$ , а также априори неизвестной величины минимакса  $\varepsilon_{\min}^{(M)}$  в (2.22) в случае, когда  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ , может быть получено в условиях малостеснительных ограничений альтернансным методом [13, 14]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого значения  $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*), i = \overline{1, M}$ , являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения результирующего состояния  $Q(x, \psi_*^{(M)})$  управляемой величины, диктуемой закономерностями предметной области. Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величи-

не  $\varepsilon$  одинаковые значения максимальных отклонений  $\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi_*^{(M)})|$  достигаются в некоторых точках  $x_j^0$ ,  $j = \overline{1, R}$ , на отрезке  $[x_0, x_1]$ . Общее число  $R$  этих точек, где  $R = M$  при заданном  $\varepsilon$ :  $\varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$  и  $R = M + 1$ , если  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ , равно числу искомым неизвестных в ЗПО (2.21)–(2.23), порождая тем самым замкнутую относительно этих неизвестных систему соотношений

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \tag{2.24}$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой  $Q(x, \psi_*^{(M)})$  на отрезке  $[x_0, x_1] \ni x$ , позволяющей при известной функции  $\eta(t)$  идентифицировать координаты  $x_j^0$  и знаки  $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$ , равенства (2.24), дополненные условиями существования экстремума функции  $Q(x, \psi_*^{(M)})$  в точках  $x_{j_g}^0 \in \text{int}[x_0, x_1]$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ , где  $R_1 \leq R$  и  $x_{j_g}^0 \in \{x_j^0\}$ , переводятся в систему уравнений

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) &= \pm \varepsilon, & j &= \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} Q(x_{j_g}^0, \psi_*^{(M)}) &= 0, & g &= \overline{1, R_1}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

с однозначно определяемым знаком  $\varepsilon$  в каждой точке  $x_j^0$ , которая разрешается относительно  $\tilde{\psi}_i^*$ ,  $i = \overline{1, M}$ ; значений  $x_{j_g}^0$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ , а также  $\varepsilon_{\min}^{(v)}$ , если в (2.22)  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(v)}$ .

Пространственное распределение управляемой величины  $Q(x, \psi_*^{(M)})$  в конце оптимального процесса описывается рядом (1.9) с вектором модальных переменных  $\bar{Q}^*(t^*)$ , и, следовательно, система равенств (2.25) приводится к следующему виду:

$$\Phi \bar{Q}^*(t^*) = \bar{\varepsilon}, \quad \Phi = [\varphi_n(\mu_n, x_j^0)], \tag{2.26}$$

$$\Phi_1 \bar{Q}^*(t^*) = 0; \quad \Phi_1 = \left[ \frac{d}{dx} \varphi_n(\mu_n, x_{j_g}^0) \right], \tag{2.27}$$

где  $n = \overline{1, N_1}$ ;  $j = \overline{1, R}$ ;  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ ,  $i = \overline{1, R}$ ;  $\varepsilon_i = \pm \varepsilon$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ .

Подстановка (2.17) в (2.26) при  $\psi(t^*) = \psi^*(t^*)$  приводит к линейной системе  $R$  уравнений

$$\Phi [B(t^*)\psi^*(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0) + D_\eta(t^*)] = \bar{\varepsilon} \tag{2.28}$$

относительно вектора  $\psi^*(t^*)$ , представляемого в форме (2.9) с  $M$  неизвестными компонентами  $\tilde{\psi}_i^*$ ,  $i = \overline{1, M}$ , и  $\varepsilon_{\min}^{(M)}$  в случае  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$  в (2.25). При  $\varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$  решение системы  $R = M$  уравнений (2.28) относительно  $\psi^*(t^*)$  при априори фиксируемом значении  $\bar{\varepsilon}$  принимает следующий вид для каждой заданной величины  $\bar{Q}(0)$ :

$$\psi^*(t^*) = [\Phi B(t^*)]^{-1} (\bar{\varepsilon} - \Phi B_1(t^*)\bar{Q}(0) - \Phi D_\eta(t^*)). \tag{2.29}$$

Здесь значения  $x_j^0$  в элементах матрицы  $\Phi$  должны быть определены дополнением (2.29) системой уравнений (2.27) с подстановкой  $\bar{Q}^*(t^*)$  в форме (2.17). В итоге выражения (2.19), (2.20) и (2.29) полностью определяют искомым алгоритм оптимального программного управления.

*Об учете ограничений на управляющие воздействия.* Предлагаемый способ расчета программного оптимального управления соответствует традиционному методу исследования задачи АКОР в открытой области изменения  $u(t)$ , позволяющему, во-первых, определить минимально достижимые значения квадратичного функционала качества и, во-вторых, установить по полученным результатам предельные значения  $u(t)$ , необходимые для реализации максимального эффекта по величине  $I_1$  в (1.10). Тем не менее существенный интерес представляют задачи АКОР с учетом априори заданных ограничений

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \tag{2.30}$$

с известными граничными значениями  $u_{\min}, u_{\max} = \text{const}$ , если эти ограничения нарушаются на протяжении оптимального процесса с линейным управлением вида (2.4). Равенства

$$u(t) = u_{\max}, \quad u(t) = u_{\min} \quad (2.31)$$

могут достигаться в различные моменты времени на протяжении оптимального процесса, образуя в общем случае многочисленные возможные варианты компоновки управляющих воздействий  $\tilde{u}^*(t)$  из различных участков в соответствии с (2.4), (2.31).

В типичном частном случае ограничения на  $\tilde{u}^*(t)$  достигаются только на начальной стадии процесса управления, на протяжении которой  $\tilde{u}^*(t) = u_{\max}$ ,  $t \in [0, t_1]$ ,  $t_1 < t^*$ , где момент  $t_1$  определяется по найденному линейному алгоритму  $u^*(t)$  как корень уравнения  $u^*(t_1) = u_{\max}$ . В такой ситуации состояние объекта  $\bar{Q}(t_1)$ , найденное интегрированием уравнений модели (1.8) с управлением  $u(t) = u_{\max}$ ,  $t \in [0, t_1]$ , можно рассматривать в роли начального  $\bar{Q}(0)$  на последующем временном интервале  $[t_1, t^*]$ , где программное управление вида (2.4) определяется по описанной выше схеме.

Аналогичным образом может быть найдено программное управление и при других вариантах его построения с учетом ограничений в (2.30).

**3. Синтез оптимальной системы управления.** Рассмотрим далее задачу синтеза в условиях линейного алгоритма (2.4) оптимального программного управления. Решение этой задачи построения оптимального регулятора  $u^*(Q, t)$  существенно зависит от характера информации о внешнем возмущении  $\eta(t)$  в уравнениях моделей объекта (1.1)–(1.3).

3.1. Синтез оптимального регулятора при заданном внешнем возмущении. Пусть  $\eta(t)$  в (1.5), (1.8) – известная функция времени. Определим конечное состояние модели (2.6) из уравнения (2.10):

$$\begin{bmatrix} \psi(t^*) \\ \bar{Q}(t^*) \end{bmatrix} = e^{A(t^*-t)} \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t^*} e^{A(t^*-\tau)} C \eta(\tau) d\tau, \quad (3.1)$$

откуда получим, используя представление матричной экспоненты в блочной форме (2.8):

$$\psi(t^*) = A_{11}(t^* - t)\psi(t) + A_{12}(t^* - t)\bar{Q}(t) + \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (3.2)$$

$$\bar{Q}(t^*) = A_{21}(t^* - t)\psi(t) + A_{22}(t^* - t)\bar{Q}(t) + \tilde{D}_{Q\eta}, \quad (3.3)$$

где подобно (2.16)

$$\tilde{D}_{\psi\eta} = \int_t^{t^*} A_{12}(t^* - \tau) k_{\eta} \eta(\tau) d\tau; \quad \tilde{D}_{Q\eta} = \int_t^{t^*} A_{22}(t^* - \tau) k_{\eta} \eta(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

В оптимальном процессе  $(\bar{Q}^*(t), \psi^*(t))$  соотношения (3.2), (3.3) принимают следующий вид:

$$\psi^*(t^*) = A_{11}(t^* - t)\psi^*(t) + A_{12}(t^* - t)\bar{Q}^*(t) + \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (3.5)$$

$$\bar{Q}^*(t^*) = A_{21}(t^* - t)\psi^*(t) + A_{22}(t^* - t)\bar{Q}^*(t) + \tilde{D}_{Q\eta}, \quad (3.6)$$

где значения  $\bar{Q}^*(t^*)$  и  $\psi^*(t^*)$  фиксируются расчетом программного управления, согласно (2.17), (2.29).

После умножения слева равенств (3.5) и (3.6) соответственно на известные в соответствии с (2.17), (2.29)  $N_1 \times N_1$ -матрицы  $\text{diag}[\bar{Q}_j^*(t^*)]$ ,  $\bar{Q}^*(t^*) = (\bar{Q}_j^*(t^*))$ ,  $j = \overline{1, N_1}$  и  $\text{diag}[\psi_j^*(t^*)]$ ,  $\psi^*(t^*) = (\psi_j^*(t^*))$ ,  $j = \overline{1, N_1}$ , левые части соотношений (3.5) и (3.6) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \psi^*(t, \psi^*(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t)) &= T_1(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0)) T_2(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0)) \bar{Q}(t) + \\ &+ T_1(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0)) D_{\Sigma}(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0), \eta); \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$T_1 = [W_1 A_{11}(t^* - t) - W_2 A_{21}(t^* - t)]^{-1}; \quad (3.8)$$



$$T_2 = [W_2 A_{22}(t^* - t) - W_1 A_{12}(t^* - t)]; \quad (3.9)$$

$$D_\Sigma = W_2 \tilde{D}_{Q\eta} - W_1 \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (3.10)$$

$$W_1 = \text{diag}[\bar{Q}_j^*(t^*)]; \quad W_2 = \text{diag}[\psi_j^*(t^*)]; \quad \bar{Q}_j^*(t^*) = (B(t^*)\psi^*(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0))_j, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (3.11)$$

однозначным образом определяющему зависимость  $\psi^*(t, \psi^*(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t))$  от своих аргументов при заданном кусочно-непрерывном воздействии  $\eta(t)$  по предварительно вычисляемым решениям системы уравнений (2.26), (2.27) в условиях (2.17).

Подстановка (3.7) в выражение (2.20) для программного управления приводит к линейному закону синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами обратных связей в детерминированной системе управления с полным измерением состояния  $\bar{Q}(t)$ :

$$u^*(\bar{Q}, t) = \frac{1}{2} K(T_1 T_2 \bar{Q}(t) + T_1 D_\Sigma). \quad (3.12)$$

Здесь матрицы  $T_1$  и  $T_2$  представляются, согласно (3.8)–(3.11), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями  $\bar{Q}(0)$ , которые определяются по результатам наблюдения  $\bar{Q}(t)$  в момент  $t = 0$ .

Переход в (3.12) от  $\bar{Q}(t)$  к измеряемому выходу объекта  $Q_u(x_u, t) = (Q(x_{ij}, t))$  в  $r$  точках  $x_{ij} \in [x_0, x_1]$ ,  $j = \overline{1, r}$ , определяется, согласно (1.9), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t), \quad \Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (3.13)$$

В условиях  $r < N_1$  неполного измерения состояния для восстановления вектора  $\bar{Q}(t)$  по значениям  $Q(x_u, t)$  требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [21]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.8) можно ограничиться учетом только  $M$  первых составляющих  $\bar{Q}(t)$  с минимальным их числом  $M$ , требуемым для решения системы уравнений (2.28) относительно представляемого в форме (2.9) вектора  $\psi^*(t^*)$ , то  $\bar{Q}(t)$  непосредственно определяется решением системы уравнений (3.13) при  $r = M$ ,  $N_1 = N = M$ :

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \quad (3.14)$$

Подстановка (3.14) в (3.12) приводит к линейному алгоритму детерминированного синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$u^*(Q_u, t) = \frac{1}{2} K T_1 T_2 \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) + K T_1 D_\Sigma. \quad (3.15)$$

Аналитическое решение задачи синтеза с учетом ограничений на управляющие воздействия становится невозможным в силу нелинейности в таком случае П-системы принципа максимума. Широко распространенный способ определения  $\tilde{u}^*(Q_u, t)$  в первом приближении заключается в дополнении алгоритма  $u^*(Q_u, t)$  в (3.15) характеристикой усилительного звена с насыщением [1, 2, 4]:

$$\tilde{u}^*(Q_u, t) = \begin{cases} u_{\max}, & u^*(Q_u, t) > u_{\max}; \\ u^*(Q_u, t), & u_{\min} < u^*(Q_u, t) < u_{\max}; \\ u_{\min}, & u^*(Q_u, t) < u_{\min}. \end{cases}$$

Однако такой результат может не обеспечить требуемую точность  $\epsilon$  приближения к заданному конечному состоянию объекта. Более точный результат может быть получен для известного варианта структуры программного управления  $\tilde{u}^*(t)$  при законе регулирования  $\tilde{u}^*(Q_u, t)$ , компонентом из участков (2.31) выхода  $\tilde{u}^*(t)$  на ограничения и линейных алгоритмов обратной связи в форме (3.15) на остальных интервалах изменения  $\tilde{u}^*(t)$  вида (2.4).

3.2. Синтез оптимального регулятора в условиях неопределенности множественных внешних возмущений. *Антагонистические алгоритмы программного управления.* Сложная задача синтеза в условиях воздействия множественных возмущений может быть рассмотрена в игровой постановке с антагонистическими программными управлениями  $u(t)$  и  $\eta(t)$  в форме линейной дифференциальной игры с объектом управления (1.8) и критерием оптимальности  $I_1$  в (1.10) [7, 24–26]. При этом оптимальное управление  $u^{**}(t)$  и наиболее “неблагоприятное” возмущение  $\eta^{**}(t)$  находятся, согласно стратегии получения наилучшего гарантированного результата:

$$u^{**}(t) = \arg \min_u [\max_{\eta} I_1(u, \eta)]; \quad \eta^{**}(t) = \arg \max_{\eta} [\min_u I_1(u, \eta)], \quad (3.16)$$

в задаче со свободным конечным состоянием  $Q(x, t^*)$  с целью определения “наихудшей” величины  $\eta^{**}(t)$ .

При аддитивном характере зависимости подынтегральной функции критерия (1.10) от антагонистических управлений  $u(t)$  и  $\eta(t)$  их оптимальные значения  $u^{**}(t)$  и  $\eta^{**}(t)$  в (3.16) могут быть найдены из условия существования седловой точки игры [24–26]:

$$I_1(u^{**}(t), \eta^{**}(t)) = \min_u [\max_{\eta} I_1(u(t), \eta(t))] = \max_{\eta} [\min_u I_1(u(t), \eta(t))] \quad (3.17)$$

путем распространения на рассматриваемую задачу принципа максимума Понтрягина, согласно которому в каждой точке непрерывности функций  $u^{**}(t)$  и  $\eta^{**}(t)$  выполняется базовое соотношение [24–26]

$$\max_u \min_{\eta} H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t)) = H(\bar{Q}(t), u^{**}(t), \psi(t), \eta^{**}(t)) = \min_{\eta} \max_u H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t)). \quad (3.18)$$

Здесь функция  $H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t))$  и вектор  $\psi(t)$  сопряженных переменных опять определяются, согласно (2.2), (2.3).

В таком случае  $u^{**}(t)$  по-прежнему находится в виде (2.4), а  $\eta^{**}(t)$  представляется аналогично (2.4) в форме линейной зависимости от  $\psi^*(t)$ :

$$\eta^{**}(t) = -\frac{1}{2\rho_{\eta}} \sum_{n=1}^{N_1} \tilde{k}_n \psi_n^*(t). \quad (3.19)$$

Подстановка  $u(t)$  и  $\eta(t)$  в виде (2.4) и (3.19) в уравнения (1.8), (2.3) приводит аналогично (2.6) к программно-управляемой системе, замыкаемой относительно неизвестных  $\bar{Q}(t)$  и  $\psi(t)$  условиями трансверсальности:

$$\psi^*(t^*) = 0 \quad (3.20)$$

в задаче со свободным правым концом траектории  $\bar{Q}(t^*)$  [4, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_p}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_p + \mu_p^2 \psi_p; \quad \psi_p(t^*) = 0, \quad p = \overline{1, N_1}; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} k_n \sum_{i=1}^{N_1} k_i \psi_i - \frac{1}{2\rho_{\eta}} \tilde{k}_n \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{k}_j \psi_j; \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Решение однородной системы уравнений (3.21) представляется подобно (2.8), (2.10) в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{-\tilde{A}(t^*-t)} \begin{bmatrix} \psi(t^*) \\ \bar{Q}(t^*) \end{bmatrix}; \quad e^{-\tilde{A}(t)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ \tilde{A}_{21}(t) & \tilde{A}_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где  $\tilde{A}$  – матрица коэффициентов в (3.21) и  $\tilde{A}_{ij}$  в (3.22) – блоки обратной матрицы  $e^{-\tilde{A}(t)}$ .

Отсюда аналогично (2.19) в условиях  $\psi^*(t^*) = 0$  получаем следующее выражение для  $\psi^*(t)$ :

$$\psi^*(t) = \tilde{A}_{12}(t^* - t) \tilde{B}_1(t^*) \bar{Q}(0), \quad (3.23)$$

где  $\tilde{B}_1(t^*)$  определяется аналогично (2.18) при замене матрицы  $A$  на  $\tilde{A}$ .

Подстановка (3.23) в (3.19) позволяет найти  $\eta^{**}(t)$  в виде явной зависимости от  $t$ :

$$\eta^{**}(t) = -\frac{1}{2\rho_\eta} \tilde{K}\tilde{A}_{12}(t^* - t)\tilde{B}_1(t^*)\bar{Q}(0). \tag{3.24}$$

*Редукция к задаче синтеза с заданным детерминированным возмущением.* Задача синтеза при множественных возмущениях может быть сведена к рассмотренной в разд. 3.1 задаче конструирования оптимального регулятора при заданном детерминированном внешнем воздействии  $\eta(t) = \eta^{**}(t)$  в (3.24). Действительно, при любом реализуемом возмущении  $\eta^0(t)$  будем иметь в соответствии с (3.16)–(3.18) в условиях существования седловой точки рассматриваемой дифференциальной игры

$$\min_{u \in \Omega} I_1(u, \eta^0) = I_1(u^*(\eta^0), \eta^0) \leq \min_{u \in \Omega} (\max_{\eta} I_1(u, \eta)) = \max_{\eta} (\min_{u \in \Omega} I_1(u, \eta)) = I_1(u^{**}, \eta^{**}). \tag{3.25}$$

Здесь

$$\Omega = \{u: \max_{\eta} \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi_*^{(M)}(\eta^{**}), \eta)| \leq \varepsilon_0\}, \tag{3.26}$$

согласно требованиям (1.6), где  $|Q(x, \psi_*^{(M)}(\eta^{**}), \eta)|$  – конечное состояние объекта при оптимальном  $\psi^{(M)}$ -параметризованном управлении  $u^*(t)$ , найденном при  $\eta(t) = \eta^{**}(t)$  путем решения задачи (1.8)–(1.11) с заданной величиной  $\varepsilon$ , а  $\varepsilon_0$  непосредственно находится вычислением максимума по  $\eta$  в (3.26).

Как следует из (3.25), синтез оптимального управления  $u^*(\bar{Q}, t)$  при заданном детерминированном возмущении  $\eta^0(t) = \eta^{**}(t)$  в условиях (3.26) отвечает верхней оценке достижимых значений минимизируемого критерия  $I_1$  на множестве допустимых возмущений в соответствии с требованиями стратегии управления по принципу наилучшего гарантированного результата.

**4. Синтез оптимального регулятора для управления нестационарным процессом теплопроводности.** В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для управления процессом нагрева неограниченной пластины.

Пусть температурное поле  $Q(x, t)$  пластины описывается линейным однородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [16, 27]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \in [0, t^*] \tag{4.1}$$

с заданными начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} < 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.2}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} = u_s(t) + \eta_2(t) \tag{4.3}$$

при граничном управляющем воздействии  $u_s(t)$  в характерных условиях воздействия на него заданного детерминированного возмущения

$$\eta_2(t) = k_0 u_s(t), \quad k_0 = \text{const}, \quad |k_0| < 1. \tag{4.4}$$

Модальное описание объекта (4.1)–(4.3) сводится к бесконечной системе дифференциальных уравнений вида (1.8)–(1.9):

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{sn}(1 + k_0)u_s(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.5}$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x), \tag{4.6}$$

где [16]

$$\mu_n = \pi(n-1); \quad \varphi_n(\mu_n, x) = \frac{1}{V_n} \cos(\pi(n-1)x); \quad V_n^2 = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{1}{2}, & n>1 \end{cases}; \quad k_{sn} = \frac{(-1)^{n-1}}{V_n}. \quad (4.7)$$

Задача сводится к определению алгоритма обратной связи  $u_s(Q, t)$ , обеспечивающего перевод объекта (4.5), (4.6) за заданное время  $t^*$  в требуемое конечное состояние  $Q^{**}(x) = Q^{**} = 0$  с заданной точностью равномерного приближения  $\varepsilon > 0$ , согласно (1.11), при минимальном значении квадратичного критерия качества (1.10), где выберем  $\rho_Q = 1$ .

Оптимальное программное управление  $(1+k_0)u_s^*(t)$  находится в форме (2.4) при  $k_n = k_{sn}$ , а П-система принципа максимума представляется в виде однородной системы уравнений (2.6), где в рассматриваемом примере следует принять

$$\eta(t) = \eta_2(t) = \frac{1}{2} k_0 \sum_{i=1}^{N_1} k_i \psi_i(t), \quad \tilde{k}_n = k_n.$$

*Вычисление матричной экспоненты.* Примем далее для большей простоты и наглядности получаемых результатов  $N_1 = N = 2$ , ограничиваясь учетом только двух модальных переменных в сумме (4.6). В таком случае матричная экспонента в (2.7) является нормированной фундаментальной  $4 \times 4$ -матрицей системы (2.6) следующего вида [3, 20, 21]:

$$e^{At} = Z(t)Z^{-1}(0).$$

Здесь  $Z(t)$  – матрица линейно-независимых решений однородной системы уравнений (2.6) [3, 20, 21]:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(1)} e^{p_1 t} & \dots & \gamma_1^{(4)} e^{p_4 t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_4^{(1)} e^{p_1 t} & \dots & \gamma_4^{(4)} e^{p_4 t} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где  $p_i, i = \overline{1, 4}$ , – различающиеся корни характеристического уравнения

$$\det[A - pE] = 0; \quad (4.9)$$

$\gamma^{(i)} = (\gamma_j^{(i)}), j = \overline{1, 4}$ , – корни уравнения

$$(A - p_i E) \gamma^{(i)} = 0, i = \overline{1, 4}, \quad (4.10)$$

и  $E$  – единичная матрица.

Матричная экспонента  $e^{At}$  представляется в блочной форме (2.8), где

$$\begin{aligned} A_{11}(t) &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) & \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) & \Psi_{22}(t) \end{bmatrix}; & A_{12}(t) &= \begin{bmatrix} \Psi_{13}(t) & \Psi_{14}(t) \\ \Psi_{23}(t) & \Psi_{24}(t) \end{bmatrix}; \\ A_{21}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(t) & \bar{Q}_{12}(t) \\ \bar{Q}_{21}(t) & \bar{Q}_{22}(t) \end{bmatrix}; & A_{22}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{13}(t) & \bar{Q}_{14}(t) \\ \bar{Q}_{23}(t) & \bar{Q}_{24}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь

$$\Psi_{ks}(t) = \sum_{i=1}^4 \gamma_k^{(i)} G_i^{(s)} e^{p_i t}; \quad \bar{Q}_{ks}(t) = \sum_{i=1}^4 \gamma_{k+2}^{(i)} G_i^{(s)} e^{p_i t}; \quad k = 1, 2; \quad s = \overline{1, 4}, \quad (4.12)$$

$$G_i^{(s)} = \frac{G_{is}}{G}; \quad G = \det Z(0) \quad (4.13)$$

и  $G_{is}$  – алгебраическое дополнение  $s$ -го элемента  $i$ -го столбца  $G$ .

Характеристическое уравнение (4.9) приводится к равенству

$$\det \begin{bmatrix} \mu_1^2 - p & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 - p & 0 & 2 \\ \frac{k_1^2}{2} & \frac{k_1 k_2}{2} & -(\mu_1^2 + p) & 0 \\ \frac{k_1 k_2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & 0 & -(\mu_2^2 + p) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.14)$$

из которого после простых преобразований получим с учетом (4.7) при  $\mu_1 = 0$  следующие действительные значения для четырех корней  $p_i$  в (4.8), (4.12):

$$p_1 = \sqrt{S_1 - S_2}; \quad p_2 = \sqrt{S_1 + S_2}; \quad p_3 = -\sqrt{S_1 - S_2}; \quad p_4 = -\sqrt{S_1 + S_2};$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(\mu_2^4 + k_1^2 + k_2^2); \quad S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(\mu_2^4 + k_1^2 + k_2^2)^2 - 4k_1^2\mu_2^4}. \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.10) приводит к значениям коэффициентов  $\gamma_j^{(i)}$  в (4.12):

$$\gamma_1^{(i)} = \frac{2k_1(\mu_2^2 + p_i)}{k_2 p_i^2}; \quad \gamma_2^{(i)} = \frac{2}{p_i - \mu_2^2}; \quad \gamma_3^{(i)} = \frac{k_1(\mu_2^2 + p_i)}{k_2 p_i}; \quad \gamma_4^{(i)} = 1. \quad (4.16)$$

Выражения (4.8)–(4.16) полностью определяют матричную экспоненту в (2.7), (2.8) применительно к рассматриваемому примеру.

*Расчетная система уравнений альтернансного метода.* Предлагаемый способ  $\psi^{(N)}$ -параметризации управляющего воздействия приводит к представлению  $\psi^*(t^*)$  в форме (2.9).

Для типичного в приложениях случая  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  в (2.21) здесь следует принять  $M = 2$ , согласно (2.22), и тогда в соответствии с (2.9)  $\psi^*(t^*) = (\tilde{\psi}_i^*)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\psi_i^*(t^*) = 0$ ,  $i > 2$ , в системе уравнений (2.28). При подстановке  $B(t^*)$  и  $B_1(t^*)$  в форме (2.18), (4.13) система (2.28) после элементарных вычислений приводится к следующему виду:

$$\Phi[F^{(1)}(t^*)\psi_*^{(M)} + F^{(2)}(t^*)\bar{Q}(0)] = \bar{\varepsilon}, \quad (4.17)$$

где

$$F^{(1)}(t^*) = \begin{bmatrix} F_{11}^{(1)}(t^*) & F_{12}^{(1)}(t^*) \\ F_{21}^{(1)}(t^*) & F_{22}^{(1)}(t^*) \end{bmatrix}; \quad F^{(2)}(t^*) = \begin{bmatrix} F_{11}^{(2)}(t^*) & F_{12}^{(2)}(t^*) \\ F_{21}^{(2)}(t^*) & F_{22}^{(2)}(t^*) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

и все элементы  $2 \times 2$ -матриц  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  становятся известными функциями  $\psi_{ks}(t^*)$ ,  $\bar{Q}_{ks}(t^*)$ ;  $k = \overline{1, 2}$ ;  $s = \overline{1, 4}$  в (4.11).

При  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  в (2.21) следует принять  $R = M + 1 = 3$  в (2.24). Тогда будем иметь матрицу  $\Phi$  размерностью  $3 \times 2$  в (2.26), подстановка которой в (4.17) позволяет получить, согласно (2.24), на основании (4.6) систему трех равенств:

$$\begin{aligned} |Q(x_j^0, \psi_*^{(2)})| &= |(F_{11}^{(1)}(t^*)\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + F_{21}^{(1)}(t^*)\varphi_2(\mu_2, x_j^0))\tilde{\psi}_1^* + \\ &+ (F_{12}^{(1)}(t^*)\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + F_{22}^{(1)}(t^*)\varphi_2(\mu_2, x_j^0))\tilde{\psi}_2^* + \\ &+ (F_{11}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_1(0) + F_{12}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_2(0))\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + \\ &+ (F_{21}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_1(0) + F_{22}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_2(0))\varphi_2(\mu_2, x_j^0)| = \varepsilon_{\min}^{(2)}, \quad j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

которая замыкается относительно всех неизвестных  $\tilde{\psi}_1^*$ ,  $\tilde{\psi}_2^*$ ,  $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ ,  $x_{j_g}^0$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ ,  $R_1 \leq R$ , условиями (2.25) существования экстремума  $Q(x, \psi_*^{(2)})$  в точках  $x_j^0 \in \text{int}[0, 1]$ , записываемыми в аналогичной (4.19) форме.

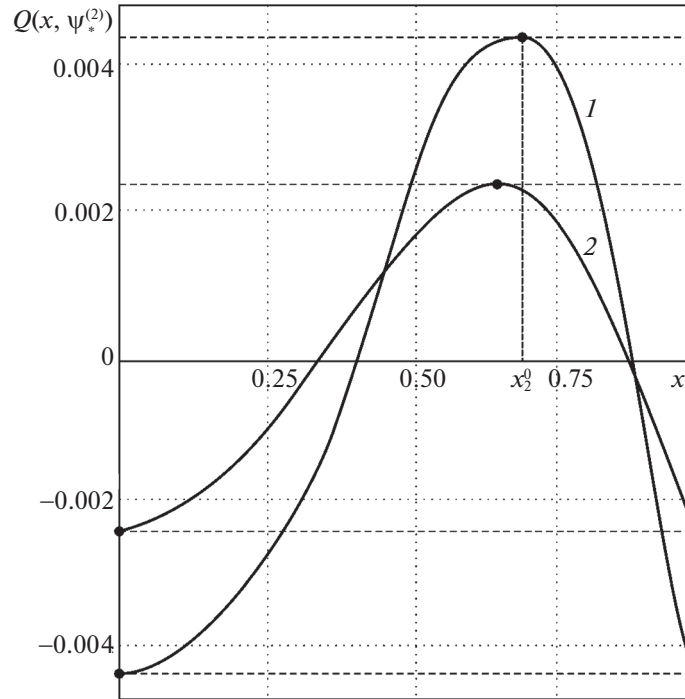


Рис. 1. Температурное распределение в конце оптимального процесса управления

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе нагрева пластины и альтернантные свойства  $Q(x, \psi_*^{(2)})$  определяют в рассматриваемом примере, подобно [13, 14], при  $M = 2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ ,  $Q_0 = \text{const}$  в (4.2) форму кривой  $Q(x, \psi_*^{(2)})$  результирующего распределения температуры по пространственной координате (рис. 1), что позволяет заведомо идентифицировать в (4.19) координаты точек  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = x_{j_g}^0 = x_{j_l}^0 \in (0, 1)$ ,  $x_3^0 = 1$  и знаки  $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)})$ . В результате равенства (4.19), дополняемые условиями существования экстремума (2.27) в одной точке  $x_2^0$ , редуцируются аналогично [13, 14] к замкнутой системе линейных по  $\tilde{\psi}_1^*$ ,  $\tilde{\psi}_2^*$  уравнений вида (2.25):

$$Q(0, \psi_*^{(2)}) = -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) = \varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad Q(1, \psi_*^{(2)}) = -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} = 0, \quad (4.20)$$

разрешаемой относительно всех искомых величин стандартными численными методами.

*Аналитическое конструирование оптимального регулятора.* Согласно (3.12), получаем линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм оптимального управления с обратными связями по состоянию  $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ :

$$(1 + k_0)u_s^*(\bar{Q}, t) = \frac{1}{2}KT_1(t)T_2(t)\bar{Q}(t), \quad (4.21)$$

где матрицы  $T_1$ ,  $T_2$  вычисляются, согласно, (3.8), (3.9), (3.11), при  $\psi^*(t^*) = (\tilde{\psi}_i^*, i = 1, 2; \psi_i^*(t^*) = 0, i > 2)$ , найденном в результате решения системы уравнений (4.20). Произведение  $T_1T_2$  оказывается в результате  $2 \times 2$ -матрицей, все элементы которой становятся известными функциями  $\psi_{ks}(t)$ ,  $\bar{Q}_{ks}(t)$  в (4.12), однозначно определяющими закон (4.21) синтеза оптимального регулятора.

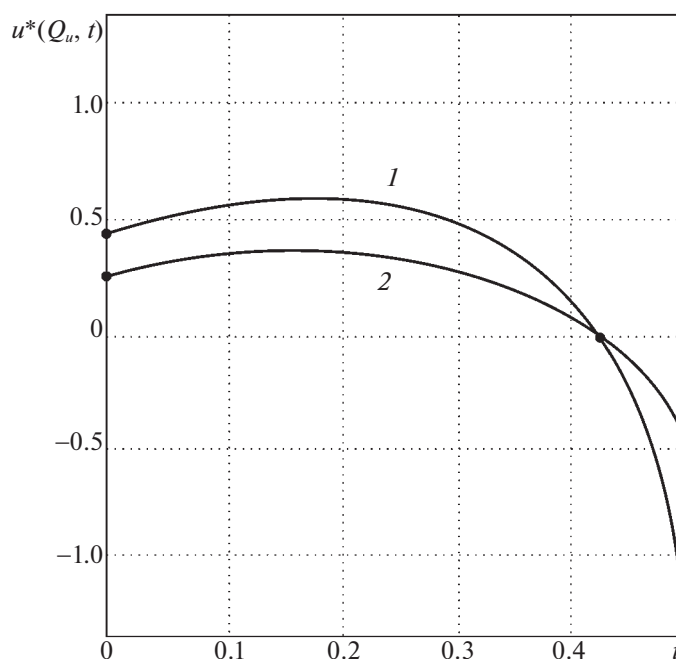


Рис. 2. Зависимости управляющих воздействий от изменяющихся во времени сигналов обратной связи

При наличии двух измерителей выхода объекта в точках  $x_{u1}, x_{u2} \in [0, 1]$  получаем систему двух линейных уравнений в (3.13):

$$\begin{aligned} Q_u(x_{u1}, t) &= \bar{Q}_1(t)\varphi_1(\mu_1, x_{u1}) + \bar{Q}_2(t)\varphi_2(\mu_2, x_{u1}); \\ Q_u(x_{u2}, t) &= \bar{Q}_1(t)\varphi_1(\mu_1, x_{u2}) + \bar{Q}_2(t)\varphi_2(\mu_2, x_{u2}), \end{aligned} \tag{4.22}$$

разрешаемую относительно  $\bar{Q}_1(t), \bar{Q}_2(t)$ .

Подстановка этого решения в (4.21) определяет алгоритм синтеза оптимальной обратной связи по выходу объекта в форме (3.15):

$$(1 + k_0)u_s^*(Q_u, t) = \frac{1}{2}KT_1(t)T_2(t)\Phi_u^{-1}Q_u(x_u, t), \tag{4.23}$$

где  $\Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj}); n, j = 1, 2]$ .

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при  $Q^{**} = 0, t^* = 0.5, k_0 = 0.1$  для двух различных значений  $Q_0$  (кривые 1 –  $Q_0 = -0.25; \tilde{\psi}_1^* = 0.648; \tilde{\psi}_2^* = -1.161; \epsilon_{\min}^{(2)} = 0.0043$ ; кривые 2 –  $Q_0 = -0.1; \tilde{\psi}_1^* = 0.260; \tilde{\psi}_2^* = -0.464; \epsilon_{\min}^{(2)} = 0.0023$ ) при выборе двух измерителей выхода объекта в точках  $x_{u1} = 0; x_{u2} = 1$ . На рис. 1 показаны распределения температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса нагрева. Рисунок 2 иллюстрирует поведение в процессе нагрева оптимальных управляющих воздействий, изменяющихся во времени по алгоритму (4.23) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи с нестационарными коэффициентами передачи. Как следует из приведенных данных, алгоритм (4.23) оптимального управления обеспечивает при различных начальных условиях заданную точность приближения к требуемому конечному состоянию объекта.

**Заключение.** Предлагаемый метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов в линейно-квадратичной задаче управления системами с распределенными параметрами параболического типа разработан применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Полученные уравнения регуляторов сводятся к линейным алгоритмам обратной связи с фиксируемыми предварительным расчетом нестационарными коэффициентами. Погрешности реализации предлагаемых алгоритмов обратной связи непосредственно по неполному измерению состояния системы определяются требованиями к точности описания модели объекта укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007.
4. Теория автоматического управления / Под. ред. В.Б. Яковлева. М.: Высш. шк., 2003.
5. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.
8. *Поляк Б.Е., Щербakov П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
9. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
10. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
11. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния (обзор) // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 123–136.
12. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986.
13. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
14. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
15. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22–33.
16. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
17. *Валеев Г.К., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974.
18. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
19. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Мат. сборник (новая серия). 1964. Т. 64 (106). № 1. С. 79–101.
20. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
21. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
22. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
23. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
24. *Гаврилов В.М.* Оптимальные процессы в конфликтных ситуациях. М.: Сов. радио, 1969.
25. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
26. *Пантелеев А.В., Бортакoвский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
27. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001.