

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.977

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧЕ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ В ДИСКРЕТНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ ЧАСТИ КООРДИНАТ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА

© 2021 г. В. И. Максимов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Москва

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 30.03.2019 г.

После доработки 23.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача отслеживания траектории нелинейной управляемой системы дифференциальных уравнений в условиях неточного измерения в дискретные моменты времени части фазовых координат. Указывается устойчивый к помехам алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теорий управления с обратной связью. Алгоритм состоит из двух блоков: блока динамического восстановления неизмеряемых координат и блока управления.

DOI: 10.31857/S0002338821040090

Введение. В статье описывается задача управления системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы отслеживание траекторией заданной системы траектории другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. В работе исследуем задачу, в которой предполагается, что измеряются (с ошибкой) в дискретные моменты времени не все, а часть фазовых координат заданной управляемой системы. Кроме того, полагаем, что неизвестное возмущение является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е. может быть неограниченным. Учитывая данную особенность задачи, конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения, который основан на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Предлагаемый алгоритм содержит два блока: блок реконструкции в темпе “реального времени” ненаблюдаемых координат, а также блок управления, использующий результаты работы блока реконструкции в качестве входа.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), y_1(t)), \quad t \in T, \\ \dot{y}_1(t) &= f_{21}(t, x_1(t), y_1(t)) + Cv(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

с начальным состоянием

$$x_1(0) = x_{10}, \quad y_1(0) = y_{10}.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$ — конечный момент времени, $x \in R^n$ — измеряемая часть полного фазового вектора системы, $y \in R^N$ — неизмеряемая часть, $v \in R^r$ — возмущение, f_1 и f_{21} — липшицевые функции с константой Липшица L , C — стационарная матрица соответствующей размерности. Назовем систему (1.1) возмущенной. Система (1.1) подвержена воздействию некоторого возмущения $v(\cdot) \in L_2(T; R^r)$. Как это возмущение $v(\cdot)$, так и отвечающее ему решение системы (1.1) $z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)) = \{x_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)), y_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))\}$, где $z_1 = \{x_1, y_1\}$, $z_{10} = \{x_{10}, y_{10}\}$, неизвестны.

Наряду с системой (1.1) имеется еще одна система того же вида

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(t, x(t), y(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ \dot{y}(t) &= f_{21}(t, x(t), y(t)) + Cu(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

с начальным состоянием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

и управлением $u \in R^r$. Назовем её следящей. Начальные состояния систем (1.1) и (1.2) полагаем в дальнейшем известными.

В дискретные, достаточно частые, моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m_h} \quad (\tau_0 = 0, \tau_{m_h} = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряется часть фазовых состояний системы (1.1), а именно состояния $x_1(\tau_i) = x_1(\tau_i; z_{10}, v(\cdot))$, а также состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; z_0, u(\cdot))$ системы (1.2). Состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in R^n, i \in \overline{0, m_h - 1}$, удовлетворяют неравенствам

$$|x_1^h(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h. \quad (1.3)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ – уровень погрешности измерения, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве R^n . Для простоты ограничимся случаем, когда состояния $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$ системы (1.2) измеряются точно. Будем предполагать

$$|x_0 - x_{10}|_n \leq h, \quad |y_0 - y_{10}|_N \leq h. \quad (1.4)$$

Неравенства (1.3) означают, что состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. В свою очередь неравенства (1.4) говорят о том, что начальные состояния следящей и возмущенной систем близки.

Обсуждаемая в работе задача состоит в построении алгоритма формирования управления $u = u^h(\cdot)$ системой (1.2), позволяющего осуществлять отслеживание решением $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ этой системы решением $z_1(\cdot) = \{x_1(\cdot), y_1(\cdot)\}$ системы (1.1), т.е. обеспечить малость величины $\sup_{t \in T} |z(t) - z_1(t)|_{n+N}$. Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x_1(\tau_i)$ и $z(\tau_i)$ в “реальном времени” формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ в правой части системы (1.2), такое, что отклонение решения системы (1.2) $z(\cdot) = z(\cdot; z_0, u^h(\cdot)) = \{x(\tau_i; z_0, u(\cdot)), y(\tau_i; z_0, u(\cdot))\}$ ($z_0 = \{x_0, y_0\}$) от решения системы (1.1) $z_1(\cdot) = z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))$ в метрике пространства $C(T; R^{n+N})$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h и периода дискретизации δ .

Задача слежения – одна из классических задач теории управления. Она исследовалась многими авторами (см., например, [1–5]). В данной работе мы рассмотрим случай измерения части координат. При этом укажем алгоритм решения, который основан на методе динамического обращения, развитом в [6, 7], а также известном в теории позиционного управления методе экстремального сдвига [8]. В связи с неполнотой информации (а именно с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы (1.1) – $\{x_1(\tau_i), y_1(\tau_i)\}$, а лишь его части – $x_1(\tau_i)$), наряду с блоком управления, нами будет использоваться дополнительный блок – блок динамического восстановления неизмеряемых координат. Последний будет играть роль поставщика недостающей информации о текущем фазовом состоянии системы (1.1). Эта информация оперативно передается на блок управления, формирующий u по принципу обратной связи. Среди последних работ, где сначала оценивается часть координат, а затем все координаты подаются на вход контура управления, следует отметить [9].

Другие задачи отслеживания решений дифференциальных уравнений, основанные на методе экстремального сдвига, обсуждались, например, в [10–15]. При этом в работах [10–12] рассматривался случай измерения “всех” координат. Случай измерения части фазовых координат обсуждался в публикациях [13] (линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений), [14] (система с последействием), [15] (система с распределенными параметрами).

2. Метод решения. Перейдем к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Пусть для каждого $h \in (0, 1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, 1). \quad (2.1)$$

Как было отмечено выше, при решении задачи слежения будут использоваться два блока.

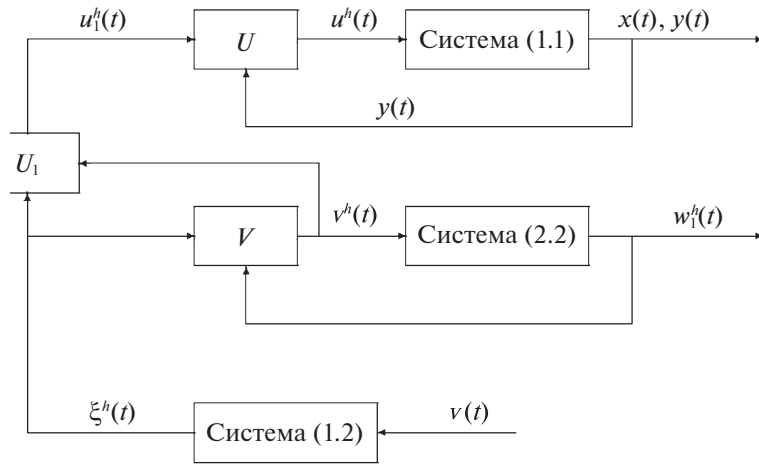


Рис. 1

Первый (вспомогательный) блок — блок реконструкции, содержит управляемую систему и закон формирования управления $u_0^h(\cdot)$ этой системой по принципу обратной связи U_0 . Динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}_1^h(t) = u_0^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T \quad (w_1^h, u_0^h \in R^n) \quad (2.2)$$

с начальным условием $w_1^h(0) = x_0$. Здесь управление $u_0^h(\cdot)$ задается формулой

$$u_0^h(t) = u_{0i}^h = U_0(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}), \quad (2.3)$$

ξ_i^h — результат измерения компоненты $x_1(\tau_i)$ (см. (1.3)), п.в. — почти всех. При $i = 0$ полагаем $\xi_0^h = x_0$. Закон $U_0(\cdot, \cdot, \cdot) : T \times R^n \times R^n \mapsto R^n$ конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управление $u_0^h(\cdot)$, стоящее в правой части системы (2.2), позволяет с помощью некоторого отображения $U_1 : T \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ сконструировать функцию $u_1^h(\cdot)$:

$$u_1^h(t) = u_{1i}^h = U_1(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}), \quad (2.4)$$

являющуюся приближением (в метрике пространства непрерывных функций) неизмеряемой части фазовой траектории $y_1(\cdot)$.

Второй (основной) блок — блок управления системой (1.2), содержит закон $U(\cdot, \cdot, \cdot) : T \times R^N \times R^N \mapsto R^r$ формирования управления $u = u^h(\cdot)$. Закон U конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании ряда параметров управление $u = u^h(\cdot)$ вида

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, u_{1i}^h, y(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}) \quad (2.5)$$

обеспечивает отслеживание решения системы (1.2) решением системы (1.2).

На рис. 1 изображена блок-схема алгоритма решения задачи.

3. Алгоритм решения. Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Фиксируем некоторое семейство Δ_h (2.1), а также две функции $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ и $\alpha_1(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

Пусть $M \subset R^n$ — область, в которой остаются первые n фазовых координат решения системы (1.1), порожденного неизвестным возмущением $v(\cdot)$, т.е.

$$x_1(t) \in M \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Условие. В области $T \times M$ функция $y \rightarrow F = f_1(t, x, y)$ имеет обратную функцию $y = f_{1y}^{-1}(t, x, F)$, которая является липшицевой функцией по совокупности переменных с постоянной Липшица L_y .

Кроме того, полагаем, что функция f_1 — дифференцируема, а компонента $x(\cdot)$ решения системы (1.2) обладает следующим свойством: $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T; R^n)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$, числа $\alpha_1 = \alpha_1(h)$, $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (2.1). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляются векторы u_{0i}^h , u_{1i}^h и u_i^h по формулам (2.3)–(2.5), в которых

$$\begin{aligned} U_0(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) &= -\alpha^{-1}[w_1^h(\tau_i) - \xi_i^h + \tau_i f_1(0, x_{10}, y_{10})], \\ U_1(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h) &= f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h + f_1(0, x_{10}, y_{10})), \\ U(\tau_i, u_{1i}^h, y(\tau_i)) &= -\alpha_1^{-1} C^T (y(\tau_i) - u_{1i}^h). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь символ “ T ” означает транспонирование. Затем на вход системы (2.2) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $u_0^h(t)$ вида (2.3), (3.1), а на вход системы (1.2) — управление $u = u^h(t)$ вида (2.5), (3.1). Под действием этих управлений решение системы (1.2) переходит из состояния $z(\tau_i)$ в состояние $z(\tau_{i+1})$, а решение системы (2.2) — из состояния $w_1^h(\tau_i)$ в состояние $w_1^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Оказывается, что при определенном согласовании величин h , $\delta(h)$, $\alpha(h)$ и $\alpha_1(h)$ построенное таким образом управление $u = u^h(\cdot)$ решает обсуждаемую задачу слежения.

Прежде чем перейти к доказательству этого факта, приведем два вспомогательных утверждения. Заметим, что встречающиеся далее постоянные c_j , C_j зависят от структуры системы (1.2) и не зависят от h , α , α_1 , δ .

Л е м м а 1 [10]. Пусть неотрицательная функция $\varphi(\cdot)$ при всех $i \in \overline{0, m_h - 1}$ удовлетворяет неравенствам

$$\varphi(\tau_{i+1}) \leq \varphi(\tau_i)(1 + p\delta) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |G(\tau)| d\tau,$$

где $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $p = \text{const} > 0$, $G(\cdot) \in L_\infty(T; R)$. Тогда справедливы неравенства

$$\varphi(\tau_i) \leq \left(\varphi(0) + \int_0^{\tau_i} |G(\tau)| d\tau \right) \exp(p\tau_i).$$

Символ $|\cdot|$ здесь означает модуль числа.

Л е м м а 2. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $\delta(h) \rightarrow 0$, $(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, причем $\delta(h_1) \leq \delta(h_2)$, если $h_1 \leq h_2$. Тогда можно указать такое число $h_0 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_0)$ верно неравенство

$$\sup_{t \in T} |u_1^h(t) - y_1(t)|_N \leq C_1 v^h,$$

где $v^h = v(h, \alpha(h), \delta(h)) = \alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h)$.

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть также $\alpha_1(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\delta^\gamma(h) \leq C_1 \alpha_1^2(h)$ при некотором $\gamma \in (0, 1)$. Тогда можно указать $h_1 \in (0, h_0)$, такое, что при всех $h \in (0, h_1)$ верно неравенство

$$\max_{i \in \overline{0, m_h-1}} \varepsilon_1(\tau_i) \leq C_2 (h^2 + \alpha_1 + \delta^\gamma + (v^h)^2 \delta^{-\gamma}),$$

где $\varepsilon_1(t) = |z(t) - z_1(t)|_{n+N}^2$, $\alpha_1 = \alpha_1(h)$, $\delta = \delta(h)$, $v^h = v(h, \alpha(h), \delta(h))$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

С л е д с т в и е. Если $\gamma = 1/2$, $\delta = h$, $\alpha = h^{1/2}$, $\alpha_1 = h^{1/2}$, то справедливо неравенство

$$\max_{i \in [0:m_h]} \varepsilon_1(\tau_i) \leq C_3 h^{1/2}.$$

З а м е ч а н и е. Пусть неточно измеряются состояния $x(\tau_i)$ системы (1.2), т.е. в моменты τ_i находятся величины $\psi_i^h \in R^n$, такие, что

$$|\psi_i^h - x(\tau_i)|_n \leq h, \quad i \in \overline{1, m_h - 1}.$$

В этом случае блок реконструкции следует дополнить системой

$$\dot{w}_2^h(t) = v^{h(1)}(t), \quad t \in T \quad (w_2^h, v^{h(1)} \in R^n)$$

с начальным состоянием $w_2^h(0) = x_{10}$. При этом управление $v^{h(1)}(t)$ будем вычислять по правилу

$$v^{h(1)}(t) = v_i^{h(1)} = V^{(1)}(\tau_i, \psi_i^h, w_2^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1}[w_2^h(\tau_i) - \psi_i^h + \tau_i f_1(0, x_0, y_0)].$$

В свою очередь управление $u^h(t)$ вычисляется по формуле (2.5), в которой вместо вектора $y(\tau_i)$ стоит вектор

$$u_{2i}^h = U_2(\tau_i, \psi_i^h, v_i^{h(1)}) = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \psi_i^h, v_i^{h(1)} + f_1(0, x_0, y_0)),$$

т.е.

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, u_{1i}^h, u_{2i}^h) = -\alpha_1^{-1} C'(u_{2i}^h - u_{1i}^h).$$

При этом теорема и следствие будут справедливыми.

4. Примеры. П р и м е р 1. Рассматриваются две материальные точки единичной массы, которые движутся по прямой под действием внешних сил. Силы гравитации, а также сопротивления среды отсутствуют. Поэтому уравнения движения точек, согласно второму закону Ньютона, имеют вид

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad \vartheta \in (0, +\infty) \quad (4.1)$$

и

$$\ddot{x}_1(t) = v(t), \quad t \in T. \quad (4.2)$$

Здесь $x(t)$ ($x_1(t)$) — путь, пройденный к моменту t первой (второй) точкой, $\dot{x}(t)$ ($\dot{x}_1(t)$) — скорость первой (второй) точки, $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) — сила воздействия на первую (вторую) точку. В начальный момент времени ($t = 0$) состояния точек и их скоростей изменения близки:

$$|x_0 - x_1(0)| \leq h, \quad |\dot{x}(0) - \dot{x}_1(0)| \leq h.$$

Сила $v(\cdot)$, действующая на вторую точку, неизвестна. Известно лишь, что она удовлетворяет условию $v(\cdot) \in L_2(T; R)$. В дискретные моменты времени τ_i , $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\tau_0 = 0$, измеряются пути, пройденные каждой из точек, т.е. определяются числа ξ_i^h и ψ_i^h , такие, что

$$|x_1(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h, \quad |x(\tau_i) - \psi_i^h| \leq h.$$

Необходимо указать алгоритм формирования управления $u(\cdot)$ по принципу обратной связи

$$u(t) = u(\xi_i^h, \psi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

такой, что первая точка отслеживает движение второй, т.е. величина

$$\varepsilon(t) = \max \{ |x(t) - x_1(t)|, |\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)| \}$$

мала при малых величинах погрешности измерения h и расстояния между узлами измерения фазовых положений точек $\delta = \tau_i - \tau_{i-1}$.

Для решения сформулированной задачи был использован описанный выше алгоритм. Уравнение (4.1) сводилось к виду (1.2) заменой переменных $y(t) = \dot{x}(t)$, а уравнение (4.2) — к виду (1.1) заменой $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$. Полученные системы решались методом Эйлера с шагом δ .

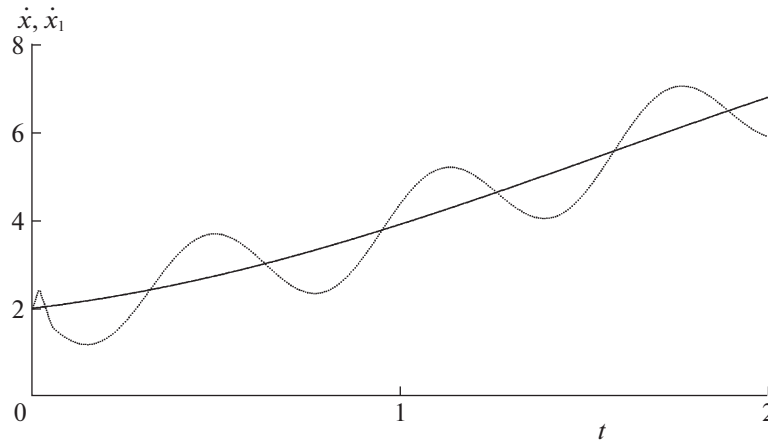


Рис. 2

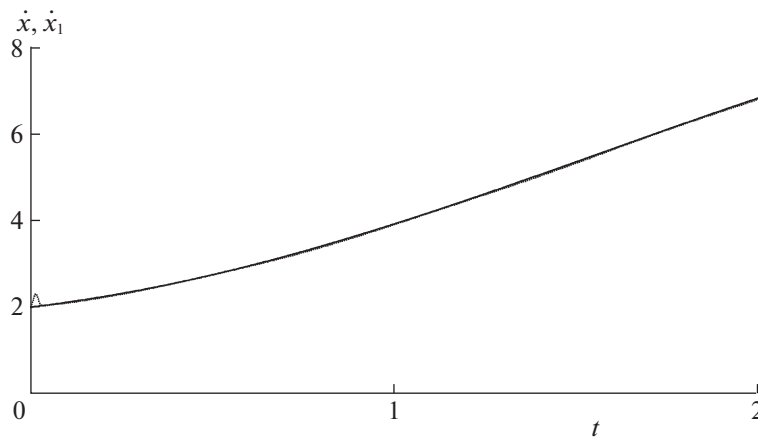


Рис. 3

В моменты $\tau_i = i\delta$ числа v_i^h , u_{1i}^h и u_i^h вычислялись по формулам (2.3)–(2.5) и (3.1). В ходе эксперимента полагалось $v(t) = 1 + \sin(2t)$, $\vartheta = 2$, $x_0 = x_{10} = 2$, $y_0 = y_{10} = 2$, $\alpha = \alpha_1 = 0.002$, $\xi_i^h = x_1(\tau_i) + h \cos(10t)$, $\psi_i^h = x(\tau_i) + h$. Результаты вычислительного эксперимента показаны на рис. 2, 3. Рисунок 2 отвечает случаю $h = 0.01$, $\delta = 0.002$, в то время как рисунок 3 — случаю $h = 0.001$, $\delta = 0.002$. На рисунках сплошная линия изображает $\dot{x}(\cdot)$, пунктирная линия — $\dot{x}_1(\cdot)$. Как показал эксперимент, графики кривых $x(\cdot)$ и $x_1(\cdot)$ во втором случае практически совпадают.

Пример 2. Аналогичная задача решалась для систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 3y(t), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y}(t) &= -x(t) + y(t) + u(t), & y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + 3y_1(t), & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{y}_1(t) &= -x_1(t) + y_1(t) + v(t), & y_1(0) &= y_{10}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Системы (4.3)–(4.4) решались методом Эйлера с шагом δ . В ходе эксперимента полагалось $v(t) = t^2$, $\vartheta = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\alpha = \alpha_1 = 0.002$, $\xi_i^h = x_1(\tau_i) + h \cos(10t)$, $x_{10} = x_0$, $y_{10} = y_0 + h$. Результаты эксперимента приведены на рис. 4, 5. Рисунок 4 отвечает случаю $h = 0.5$, $\delta = 0.002$, а рисунок 5 — случаю $h = 0.1$, $\delta = 0.002$. На указанных рисунках сплошная линия изображает $y(\cdot)$, пунктирная линия — $y_1(\cdot)$.

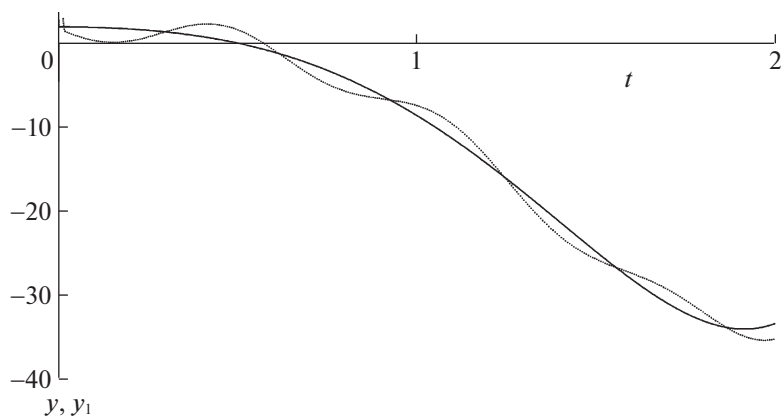


Рис. 4

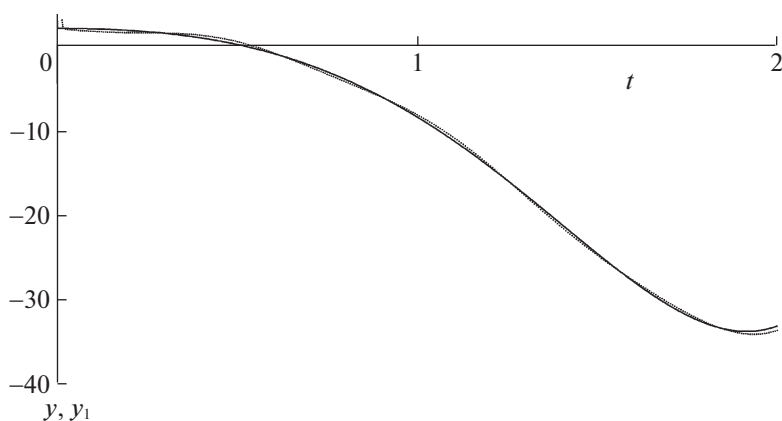


Рис. 5

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Пусть

$$\dot{X}(t) = \dot{x}_1(t) - f_1(0, x_{10}, y_{10}), \quad X(0) = x_{10}. \quad (\text{П.1})$$

Функция, стоящая в правой части (П.1), является дифференцируемой, ее производная суммируема с квадратом евклидовой нормы. В нуле эта функция обращается в ноль. Кроме того,

$$X(\tau_i) = x_1(\tau_i) - \tau_i f_1(0, x_{10}, y_{10}).$$

В силу теоремы 5 из работы [16] можно указать $h^{(1)} \in (0, 1)$, такое, что при всех $h \in (0, h^{(1)})$ справедливо неравенство

$$\text{vrai} \max_{t \in T} |u_0^h(t) - \dot{X}(t)|_n \leq c_1 v^h.$$

В свою очередь, в силу условия,

$$y_1(t) = f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)), \quad (\text{П.2})$$

$$\|f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), u_0^h(t) + f_1(0, x_{10}, y_{10})) - f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), \dot{x}_1(t))\|_N \leq L_y c_1 v^h. \quad (\text{П.3})$$

Заметим, что

$$\text{vrai max}_{t \in T} |\dot{x}_1(t)|_n < +\infty.$$

В таком случае при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$|f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), u_0^h(t) + f_1(0, x_{10}, y_{10})) - u_1^h(t)|_N \leq L_y(|t - \tau_i| + |x_1(\tau_i) - \xi_i^h|_n + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}_1(t)|_n dt) \leq c_2(h + \delta(h)). \quad (\text{П.4})$$

Утверждение леммы следует из равенства

$$u_{li}^h = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h + f_1(0, x_{10}, y_{10}))$$

и (П.2)–(П.4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_1(t)$. Обозначим

$$F_1(t, x, y) = \{f_1(t, x, y) + By, f_{21}(t, x, y)\}, \quad F_2(u) = \{0, Cu\}, \quad F(t, x, y, u) = F_1(t, x, y) + F_2(u).$$

Тогда система (1.2) запишется в виде

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t), u(t)),$$

а система (1.1) – в виде

$$\dot{z}_1(t) = F(t, z_1(t), v(t)).$$

Здесь $z_1 = \{x_1, y_1\}$, $z = \{x, y\}$. При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо равенство

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_i + \pi_{i,t}^h + p_{i,t}^h, \quad (\text{П.5})$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_1(\tau_i)$,

$$\pi_{i,t}^h = 2(z(\tau_i) - z_1(\tau_i), \int_{\tau_i}^t \{F(\tau, z(\tau), u_i^h) - F(\tau, z_1(\tau), v(\tau))\} d\tau),$$

$$p_{i,t}^h = \left\| \int_{\tau_i}^t \{F(\tau, z(\tau), u_i^h) - F(\tau, z_1(\tau), v(\tau))\} d\tau \right\|_{n+N}^2,$$

символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве. Заметим, что

$$\pi_{i,t}^h = \chi_{i,t}^h + \rho_{i,t}^h. \quad (\text{П.6})$$

Здесь

$$\chi_{i,t}^h = 2 \left(z(\tau_i) - z_1(\tau_i), \int_{\tau_i}^t \{F_1(\tau, z(\tau)) - F_1(\tau, z_1(\tau))\} d\tau \right),$$

$$\rho_{i,t}^h = 2(y(\tau_i) - y_1(\tau_i), \int_{\tau_i}^t C\{u_i^h - v(\tau)\} d\tau).$$

Далее, имеем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\chi_{i,t}^h \leq 2L\varepsilon_i^{1/2} \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1^{1/2}(\tau) d\tau \leq 2L(t - \tau_i)^{1/2} \varepsilon_i^{1/2} \left(\int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq (t - \tau_i)\varepsilon_i + L^2 \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau, \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned} \rho_{i,t}^h &\leq 2(y(\tau_i) - u_{li}^h) \int_{\tau_i}^t C\{u_i^h - v(\tau)\} d\tau + 2c_* |y_1(\tau_i) - u_{li}^h|_N \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r + |v(\tau)|_r\} d\tau \leq \\ &\leq 2 \int_{\tau_i}^t (y(\tau_i) - u_{li}^h, C\{u_i^h - v(\tau)\} d\tau) + (t - \tau_i)^{1-\gamma} c_*^2 |y_1(\tau_i) - u_{li}^h|_N^2 + (t - \tau_i)^\gamma \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где c_* — евклидова норма матрицы C , L — постоянная Липшица функции $z \rightarrow F(t, z, u)$. Кроме того,

$$p_{i,t}^h \leq c_1 \left\{ (t - \tau_i) \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau + \left| \int_{\tau_i}^t C\{u_i^h - v(\tau)\} d\tau \right|_N^2 \right\} \leq c_1(t - \tau_i) \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau + c_2 \delta \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau. \quad (\text{П.9})$$

В силу (3.1) и леммы 2 при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верна оценка

$$\int_{\tau_i}^t \|u_i^h\|_N^2 d\tau \leq \frac{2(t - \tau_i)}{\alpha_1^2} c_*^2 ((C_1 v^h)^2 + \varepsilon_i) \leq c_3(t - \tau_i) \alpha_1^{-2} ((v^h)^2 + \varepsilon_i). \quad (\text{П.10})$$

Из (П.5), воспользовавшись (П.6)–(П.9), устанавливаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &\leq (1 + t - \tau_i)\varepsilon_i + c_4 \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau + c_5(t - \tau_i)^{1-\gamma} (v^h)^2 + \\ &+ c_6(t - \tau_i)^\gamma \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau + 2 \int_{\tau_i}^t (y(\tau_i) - u_{li}^h, C\{u_i^h - v(\tau)\} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Таким образом, из (П.12), учитывая (П.11), получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) + \alpha_1 \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\} d\tau &\leq \varepsilon_i + (t - \tau_i)\varepsilon_i + c_5(v^h)^2(t - \tau_i)^{1-\gamma} + 2 \int_{\tau_i}^t (y(\tau_i) - u_{li}^h, C\{u_i^h - v(\tau)\} d\tau + \\ &+ \alpha_1 \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\} d\tau + c_6(t - \tau_i)^\gamma \int_{\tau_i}^t \{\|v(\tau)\|_r^2 + \|u_i^h\|_r^2\} d\tau + c_4 \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Значит (см. (3.1)), при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) + \alpha_1 \int_{\tau_i}^t \{\|u_i^h\|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\} d\tau &\leq \varepsilon_i + (t - \tau_i)\varepsilon_i + c_5(v^h)^2(t - \tau_i)^{1-\gamma} + \\ &+ c_6(t - \tau_i)^\gamma \int_{\tau_i}^t \{\|v(\tau)\|_r^2 + \|u_i^h\|_r^2\} d\tau + c_4 \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &\leq \varepsilon_i + (t - \tau_i)\varepsilon_i + c_5(v^h)^2(t - \tau_i)^{1-\gamma} + c_7((t - \tau_i)^\gamma + \alpha_1) \int_{\tau_i}^t |v(\tau)|_r^2 d\tau + \\ &+ c_6(t - \tau_i)^\gamma \int_{\tau_i}^t \|u_i^h\|_r^2 d\tau + c_4 \int_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, из (П.12) выводим справедливую при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ оценку

$$\varepsilon_1(t) \leq \left\{ (1 + \delta)\varepsilon_i + c_5(v^h)^2 \delta^{1-\gamma} + c_6 \delta^\gamma \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h|_r^2 d\tau + c_7(\delta^\gamma + \alpha_1) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2 d\tau \right\} \exp\{c_4(t - \tau_i)\}. \quad (\text{П.13})$$

Кроме того, в силу (П.10) при $\delta\alpha_1^{-2} \leq c_8\delta^{1-\gamma}$

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h|_r^2 d\tau \leq c_9 \delta^{1-\gamma} ((v^h)^2 + \varepsilon_i).$$

Поэтому при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$c_6(t - \tau_i)^\gamma \int_{\tau_i}^t |u_i^h|_r^2 d\tau \leq c_{10} \delta ((v^h)^2 + \varepsilon_i).$$

Нетрудно видеть, что при $0 < t - \tau_i < \delta(h) \leq \delta(h_0)$, $h \in (0, h_0)$, $i \in \overline{0, m-1}$,

$$\exp\{c_4(t - \tau_i)\} \leq 1 + c_{11}\delta.$$

В таком случае при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ получаем из (П.13)

$$\varepsilon_1(t) \leq (1 + c_{12}\delta)\varepsilon_i + c_{13}(v^h)^2 \delta^{1-\gamma} + c_{14}(\alpha_1 + \delta^\gamma) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2 d\tau. \quad (\text{П.14})$$

Учитывая (П.14), а также лемму 1, заключаем, что верны неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\tau_i) &\leq \left(\varepsilon_1(0) + c_{13} \left(\delta \sum_{j=0}^i (v^h)^2 \right) \delta^{-\gamma} + c_{14}(\alpha_1 + \delta^\gamma) \int_0^{\tau_i} |v(\tau)|_r^2 d\tau \right) \exp\{c_{12}\tau_i\} \leq \\ &\leq c_{15} \left(\varepsilon_1(0) + \left(\delta \sum_{j=0}^i (v^h)^2 \right) \delta^{-\gamma} + \alpha_1 + \delta^\gamma \right). \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Кроме того (см. (1.4)), $\varepsilon_1(0) \leq c_{16}h^2$. Из (П.15) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М.А. Лекции по теории автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1958.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
3. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
4. Ананьевский И.М., Решмин С.А. Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5. С. 25–32.
5. Уткин В.А., Уткин А.В. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // АиТ. 2014. № 9. С. 45–64.
6. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
7. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
9. Ананьевский И.М. Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 18–25.

10. *Максимов В.И.* Об отслеживании траектории динамической системы // ПММ. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.
11. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 993–1002.
12. *Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 1. С. 14–26.
13. *Максимов В.И.* Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 218–230.
14. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме отслеживания движения эталонной системы с последствием при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 415–426.
15. *Maksimov V.I.* Game Control Problem for a Phase Field Equation // JOTA. 2016. V. 170. № 1. P. 294–307.
16. *Максимов В.И.* О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. МИРАН им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 559–586.