ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.51+519.711

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ С ОШИБКОЙ СОСТОЯНИЮ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФАЗОВЫЕ И УПРАВЛЯЮЩИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ[1]

© 2021 г. Д. В. Баландин[a,*], А. А. Федюков[a]

[a] *Нижегородский государственный ун-т им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: dbalandin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.
После доработки 23.03.2021 г.
Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача по оценке области допустимых начальных состояний линейной динамической системы, при которых линейный регулятор, полученный в задаче синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измерении состояния, будет обеспечивать стабилизацию и в случае управления в форме линейной обратной связи по состоянию, измеряемому с ограниченной относительной ошибкой. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для нахождения границ этой области. В качестве примеров рассмотрены задачи стабилизации перевернутого маятника и движения тела в электромагнитном подвесе. Приведены результаты численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0002338821050036

Введение. Существуют разные способы построения регуляторов [1–4], в том числе способ, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств [1]. В задаче стабилизации по состоянию предполагают, что состояние системы доступно измерению и управление строят в виде линейной обратной связи по состоянию. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов Matlab) можно получить параметры такого регулятора. Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. Заметим также, что в реальных условиях работы система должна находиться в области ее допустимых состояний. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничение на фазовые переменные объекта и управление. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [2, 3, 5].

В работах [2, 3] рассмотрена и решена задача синтеза управления по состоянию, которое обеспечивает стабилизацию динамического объекта при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. В фазовом пространстве получена область допустимых начальных состояний системы, при которых регулятор стабилизирует систему. Однако в реальных ситуациях состояние системы измеряется, как правило, с ошибкой. Поэтому открытым остается вопрос о возможности применения полученного в [2, 3] регулятора в указанной ситуации.

В статье обсуждаются вопросы по оценке области допустимых начальных состояний линейной динамической системы, при которых регулятор, полученный в задаче синтеза управления по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию также и в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии. Сформулированы достаточные условия, позволяющие оценить множество допустимых начальных состояний динамической системы. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ля-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90086).

пунова и аппарата линейных матричных неравенств. Ключевым моментом в доказательстве теоремы является использование неущербности S-процедуры при двух ограничениях [6]. В качестве примеров приведены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$z_i = C_i x + D_i u, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1.2}$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $z_i \in R^{m_i}$ – управляемые выходы системы; A, B, C_i и D_i – заданные матрицы соответствующих размеров.

Задача о стабилизации объекта (1.1) с помощью управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{1.3}$$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.1)–(1.3) и выполнение при заданных значениях γ_i ограничений

$$\max_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1.4}$$

обсуждалась в работах [2, 3]. С помощью техники линейных матричных неравенств и неущербности S-процедуры для квадратичных неравенств были сформулированы условия на множество начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1.1), замкнутой управлением (1.3), асимптотически приближались к нулевому состоянию и не выходили за границы множества, задаваемого ограничениями (1.4). Для решения задачи синтеза управления в [3] проводится анализ линейной системы с фазовым ограничением. Рассматривается асимптотически устойчивая линейная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где матрица A – гурвицева, т.е. все собственные значения этой матрицы имеют строго отрицательные действительные части. Ставится задача поиска множества начальных состояний $x(0) = x_0$, из которых стартует фазовая траектория, не выходя за пределы множества, задаваемого ограничением

$$\max_{t \ge 0} |z(t)| \le \gamma \tag{1.6}$$

при $\gamma > 0$.

Заметим, что если функция $V = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ с матрицей $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ является квадратичной функцией Ляпунова системы (1.5), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества $E(Y) = \{x : x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x \le 1\}$, ограниченного эллипсоидом $x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x \le 1$, вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенством $|z| \le \gamma$, удовлетворяют ограничению (1.6). В работе показано, что область фазового пространства, определяемая объединением всех таких множеств $E(Y)$ при всевозможных функциях Ляпунова указанного вида, можно характеризовать в терминах линейных матричных неравенств. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Если матрица $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ удовлетворяет системе линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} &YA^{\mathrm{T}} + AY < 0, \\ &\begin{pmatrix} Y & YC^{\mathrm{T}} \\ CY & \gamma^2 I \end{pmatrix} \ge 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

тогда все траектории системы (1.5) с начальными условиями $x(0) \in E(Y)$ удовлетворяют ограничениям (1.6).

Заметим, что матриц Y, удовлетворяющих системе матричных неравенств (1.7), очень много. Это в свою очередь означает, что “много” множеств начальных состояний, определяемых соответствующими эллипсоидами. Поэтому возникает желание найти множество, которое является “максимальным” в соответствии с некоторым критерием. В частности, в качестве критериев для поиска множества, обладающего в некотором смысле “максимальными” размерами, могут выступать максимизация следа матрицы Y при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (1.7), или максимизация объема соответствующего эллипсоида.

В случае анализа асимптотически устойчивой линейной системы с несколькими ограничениями определим множество начальных состояний “наибольшего” размера как множество, полученное пересечением эллипсоидов с “максимальными” размерами, отвечающих каждому из этих ограничений.

Ключевым моментом при решении задачи стабилизации объекта (1.1) в классе линейных обратных связей по состоянию (1.3) при ограничениях (1.4) является выбор единой квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы с учетом ограничений и применение неущербности S-процедуры при одном ограничении [7]. Это позволяет представить достаточные условия для поиска матрицы параметров регулятора (1.3) в терминах линейных матричных неравенств. Использование S-процедуры при одном ограничении — это прием, который позволяет заменить два неравенства для квадратичных форм эквивалентным им единственным неравенством. Он состоит в следующем. Рассмотрим неравенство

$$F(x) < 0, \quad x \neq 0 \tag{1.8}$$

для всех $x \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$G(x) \leq 0, \tag{1.9}$$

где $F(x)$ и $G(x)$ — квадратичные формы. Тогда можно составить квадратичную форму

$$S(x) = F(x) - \lambda G(x)$$

и рассмотреть неравенство

$$S(x) < 0, \quad x \neq 0 \tag{1.10}$$

при некотором $\lambda \geq 0$. Эквивалентная замена неравенств (1.8) и (1.9) неравенством (1.10) называется S-процедурой.

Очевидно, что из выполнения (1.10) следует выполнение (1.8) при условии (1.9). Но верно и обратное утверждение. При условии, что существует x_0, для которого $G(x_0) < 0$, выполнение неравенства (1.8) при условии (1.9) влечет существование $\lambda > 0$, при котором верно неравенство

$$F(x) - \lambda G(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

В этом случае говорят, что S-процедура неущербна для одного ограничения. Данный прием в работах [2, 3] авторы применяют для каждого индекса i, что позволяет свести процесс нахождения единой функции Ляпунова замкнутой системы к решению системы линейных матричных неравенств.

Если функция $V = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ с матрицей $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ является единой квадратичной функцией Ляпунова системы (1.1), замкнутой управлением (1.3), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества $E(Y) = \{x : x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x \leq 1\}$, ограниченного эллипсоидом $x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x \leq 1$, вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенствами $|z_i| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяют ограничениям (1.4). Можно показать [2, 3], что в этом случае справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Если матрицы $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, Z и величины $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{gathered} YA^{\mathrm{T}} + AY + Z^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} + BZ < 0, \\ \begin{pmatrix} Y & YC_i^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}} D_i^{\mathrm{T}} \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \end{gathered} \tag{1.11}$$

тогда все траектории системы (1.1), замкнутой управлением (1.3) с начальными условиями $x(0) \in E(Y)$, удовлетворяют ограничениям (1.4). Матрица параметров закона управления (1.3) для динамической системы с ограничениями вычисляется как

$$K = ZY^{-1}. \tag{1.12}$$

Заметим, что если матрица параметров закона управления (1.12) найдена, то для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap_{i=1}^{N} E(Y_i)$ фазовые траектории системы (1.1), замкнутой управлением (1.3), будут асимптотически приближаться к нулевому состоянию и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями (1.4). Здесь множества $E(Y_i) = \{x : x^{\mathrm{T}} Y_i^{-1} x \le 1\}$ получены как множества начальных состояний $x(0) = x_0$ для асимптотически устойчивой линейной системы, при которых фазовая траектория не выйдет за пределы множества, задаваемого ограничением $\max_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$. При этом желательно выбирать множества $E(Y_i)$, обладающие в некотором смысле "максимальными" размерами (например, в смысле максимизации следа матрицы Y или максимизации объема соответствующего эллипсоида).

Как отмечалось выше, ключевым моментом при решении задачи стабилизации объекта (1.1) в классе линейных обратных связей по состоянию (1.3) при ограничениях (1.4) является выбор единой квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы с учетом ограничений. Это связано с тем, что в противном случае, выбирая свою функцию Ляпунова для каждого ограничения $\max_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$, приходим к системе билинейных матричных неравенств

$$A^{\mathrm{T}} X_i + K^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} X_i + X_i A + X_i BK < 0,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_i^2 X_i & C_i^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}} D_i^{\mathrm{T}} \\ C_i + D_i K & I \end{pmatrix} \ge 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где I — единичная матрица соответствующего размера, относительно неизвестных матриц $X_i = X_i^{\mathrm{T}} > 0$, $i = \overline{1, N}$, и K, для которых задача поиска решений существенно усложняется.

Заметим, что полученный в работах [2, 3] результат не позволяет указать "полное" множество начальных состояний, фазовые траектории из которых не нарушают ограничений. В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \tag{1.13}$$

при ограничениях на φ — угол отклонения звена маятника от вертикали и управление u

$$\max_{t \ge 0} |\varphi(t)| \le 0.1, \quad \max_{t \ge 0} |u(t)| \le 1. \tag{1.14}$$

Представим уравнение и ограничения в виде (1.1), (1.2), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 0, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1.$$

Для объекта (1.13) найдено управление

$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \tag{1.15}$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.13), (1.15) и выполнение ограничений (1.14). Управление (1.15) получено в результате поиска матрицы Y, имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.11).

На рис. 1 и 2 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \le 0.1, \quad |u(t)| \le 1. \tag{1.16}$$

На рис. 1 эллипс *1* ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление (1.15) обеспечивает стабилизацию перевернутого маятника при первом ограничении, т.е. на угол отклонения маятника φ. Эллипс *2* ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление обеспечивает стабилизацию при втором ограничении, т.е. при ограничении на управление. В пересечении эллипсов получим оценку области допустимых начальных состояний, для которых управление стабилизирует объект при двух ограничениях. На рис. 1 и 2 данная область отмечена светло-серым цветом. Можно построить и проанализировать фазовый портрет замкнутой системы. На рис. 2 серым цветом отмечено множество допустимых начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1.13), замкнутой управлением (1.15), асимптотически приближаются к нулевому

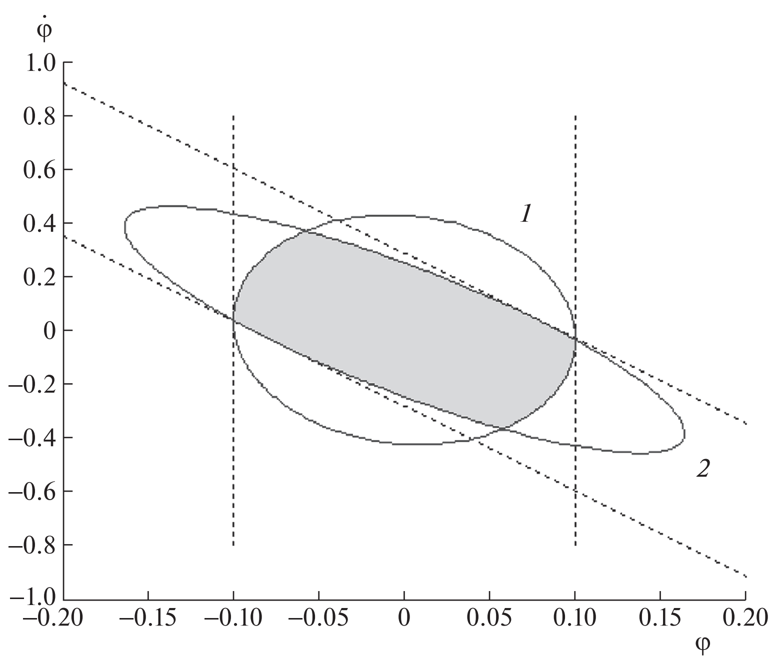

Рис. 1. Оценка множества допустимых начальных состояний, полученная пересечением эллипсоидов в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу и управлению

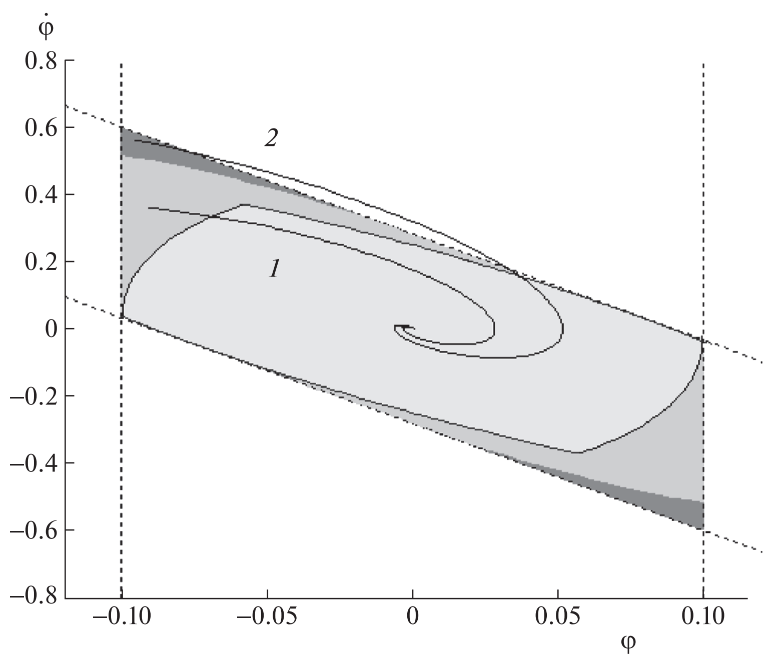

Рис. 2. Множество допустимых начальных состояний и ее оценка, полученная пересечением эллипсоидов в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу и управлению

состоянию и не выходят за границы множества, задаваемого ограничениями (1.14). В качестве примера приведена траектория *1* для начального состояния $\varphi = -0.09$, $\dot{\varphi} = 0.36$. Темным цветом на рис. 2 отмечено множество начальных состояний, при выборе которых фазовые траектории системы выйдут за границы области (1.16). В качестве примера приведена траектория *2* для начального состояния $\varphi = -0.095$, $\dot{\varphi} = 0.56$.

2. Постановка задачи. Предположим, что для объекта (1.1), (1.2) решена задача стабилизации с ограничениями на фазовые и управляющие переменные и найден закон управления $u = Kx$. В реальной ситуации состояние динамической системы всегда измеряется с некоторой ошибкой. В этой связи введем переменную

$$y = \left(I + \Delta(t)\right)x, \tag{2.1}$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^{\mathrm{T}}\Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения. Рассмотрим задачу стабилизации системы (1.1), (1.2) регулятором

$$u = Ky \tag{2.2}$$

при ограничениях на фазовые и управляющие переменные (1.4). Возникает следующий вопрос: как скажутся ошибки измерения фазовых переменных на выполнении ограничений (1.4)? Другими словами, как изменится множество начальных состояний системы, для которых регулятор (2.2) обеспечивает стабилизацию при ограничениях (1.4) и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе (2.1)?

3. Оценка области допустимых начальных состояний в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии. Рассмотрим ситуацию, когда состояние системы (1.1) измеряется с ошибкой. Представим измеряемый выход системы (2.1) в виде

$$y = x + w, \tag{3.1}$$

где $w = \Delta(t)x$. Так как матрица неопределенности $\Delta(t)$ удовлетворяет условию $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leq \delta^2 I$, то

$$w^{\mathrm{T}}w \leq \delta^2 x^{\mathrm{T}}x. \tag{3.2}$$

Обозначив $\overline{A} = A + BK$, $\overline{B} = BK$, $\overline{C}_i = C_i + D_iK$, $\overline{D}_i = D_iK$, запишем замкнутую систему (1.1), (1.2), (2.2), (3.1) в виде

$$\dot{x} = \overline{A}x + \overline{B}w, \tag{3.3}$$

$$z_i = \overline{C}_i x + \overline{D}_i w, \quad i = \overline{1, N}. \tag{3.4}$$

Сформулируем достаточные условия для поиска области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (2.2) с матрицей параметров регулятора K, полученной в задаче синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти множество допустимых начальных состояний, при которых полученный регулятор (2.2) обеспечивает для каждого индекса i стабилизацию системы (3.3) при одном ограничении $\max\limits_{t\geq 0}|z_i(t)| \leq \gamma_i$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть матрица $X_i = X_i^{\mathrm{T}} > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} \overline{A}^{\mathrm{T}}X_i + X_i\overline{A} + \mu_1\delta^2 I & X_i\overline{B} \\ \overline{B}^{\mathrm{T}}X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} \overline{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{C}_i + \mu_2\delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \overline{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{D}_i \\ \overline{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{C}_i & \overline{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \leq 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда все траектории замкнутой системы (3.3) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^{\mathrm{T}}X_i x \leq 1\}$ удовлетворяют ограничению $\max\limits_{t\geq 0}|z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В область фазового пространства, заданную неравенством $|z_i| \le \gamma_i$, впишем эллипсоид $x^{\mathrm{T}} X_i x = 1$. Покажем, что выполнение первого неравенства системы (3.5) обеспечивает выполнение условия, что квадратичная функция $V = x^{\mathrm{T}} X_i x$ с матрицей $X_i = X_i^{\mathrm{T}} > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы. На любой траектории замкнутой системы (3.3) верно условие

$$\dot{V}(x) = (\bar{A}x + \bar{B}w)^{\mathrm{T}} X_i x + x^{\mathrm{T}} X_i (\bar{A}x + \bar{B}w) < 0. \tag{3.6}$$

Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении, неравенство (3.6) выполнено для всех x, w, таких, что $|x|^2 + |w|^2 \ne 0$, удовлетворяющих неравенству (3.2), тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\mu_1 > 0$ и для всех x, w выполнено неравенство

$$(\bar{A}x + \bar{B}w)^{\mathrm{T}} X_i x + x^{\mathrm{T}} X_i (\bar{A}x + \bar{B}w) - \mu_1 (w^{\mathrm{T}} w - \delta^2 x^{\mathrm{T}} x) < 0.$$

Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}} X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}} X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} < 0.$$

Это неравенство эквивалентно первому неравенству системы (3.5).

Покажем, что любое решение второго неравенства системы (3.5) обеспечивает выполнение условия $|z_i(t)| \le \gamma_i$. Для квадратичных форм справедлива S-процедура при двух ограничениях [6]. Теорема утверждает следующее. Пусть даны квадратичные формы $F(x) = x^{\mathrm{T}} A_0 x$, $G_1(x) = x^{\mathrm{T}} A_1 x$, $G_2(x) = x^{\mathrm{T}} A_2 x$, где $x \in R^n$, $A_i = A_i^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$, $i = 0,1,2$, и числа a_0, a_1, a_2. Составим квадратичную форму $S(x) = F(x) - \tau_1 G_1(x) - \tau_2 G_2(x)$ и рассмотрим систему неравенств

$$S(x) \le 0, \quad a_0 \ge \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 \tag{3.7}$$

при некоторых $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$. Рассмотрим неравенство

$$F(x) \le a_0, \tag{3.8}$$

которое для всех $x \in R^n$ удовлетворяет системе неравенств

$$G_1(x) \le a_1, \quad G_2(x) \le a_2. \tag{3.9}$$

Тогда из неравенств (3.7) следует неравенство (3.8) при условии (3.9).

Обратно, в случае если $n \ge 3$, существуют числа τ_3, τ_4 и вектор $x_* \in R^n$, такие, что

$$\tau_3 A_1 + \tau_4 A_2 > 0, \quad G_1(x_*) < a_1, \quad G_2(x_*) < a_2,$$

то выполнение неравенства (3.8) при условии (3.9) влечет существование чисел $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$, при которых верно условие (3.7).

Применим этот результат для решения задачи. Согласно неущербности S-процедуры, при двух ограничениях выполнение неравенства $\max\limits_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$ при условии (3.2) и условии $x^{\mathrm{T}} X_i x \le 1$ для всех x, w, таких, что $|x|^2 + |w|^2 \ne 0$, эквивалентно существованию чисел $\mu_2 \ge 0$, $\mu_3 \ge 0$, при которых верно неравенство

$$|z_i|^2 - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^{\mathrm{T}} w - \delta^2 x^{\mathrm{T}} x) - \mu_3 (x^{\mathrm{T}} X_i x - 1) \le 0. \tag{3.10}$$

При этом должны существовать числа μ_4, μ_5 и вектор $(x_*^{\mathrm{T}} \ \ w_*^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, такие, что

$$\mu_4 \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \tag{3.11}$$

и

$$\begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix}^{\mathrm T} \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix} < 1, \quad \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix}^{\mathrm T} \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix} < 0. \tag{3.12}$$

Запишем неравенство (3.10) в виде

$$(\bar C_i x + \bar D_i w)^{\mathrm T}(\bar C_i x + \bar D_i w) - \gamma_i^2 - \mu_2(w^{\mathrm T} w - \delta^2 x^{\mathrm T} x) - \mu_3(x^{\mathrm T} X_i x - 1) \le 0. \tag{3.13}$$

Неравенство (3.13) верно для всех x, w. Значит,

$$\mu_3^2 \le \gamma_i^2,$$

$$(\bar C_i x + \bar D_i w)^{\mathrm T}(\bar C_i x + \bar D_i w) - \mu_2(w^{\mathrm T} w - \delta^2 x^{\mathrm T} x) \le \mu_3(x^{\mathrm T} X_i x).$$

Следовательно,

$$(\bar C_i x + \bar D_i w)^{\mathrm T}(\bar C_i x + \bar D_i w) - \mu_2(w^{\mathrm T} w - \delta^2 x^{\mathrm T} x) \le \gamma_i^2(x^{\mathrm T} X_i x),$$

$$x^{\mathrm T} \bar C_i^{\mathrm T} \bar C_i x + x^{\mathrm T} \bar C_i^{\mathrm T} \bar D_i w + w^{\mathrm T} \bar D_i^{\mathrm T} \bar C_i x + w^{\mathrm T} \bar D_i^{\mathrm T} \bar D_i w - \mu_2(w^{\mathrm T} w - \delta^2 x^{\mathrm T} x) \le \gamma_i^2(x^{\mathrm T} X_i x). \tag{3.14}$$

Запишем неравенство (3.14) в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^{\mathrm T} \begin{pmatrix} \bar C_i^{\mathrm T} \bar C_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar C_i^{\mathrm T} \bar D_i \\ \bar D_i^{\mathrm T} \bar C_i & \bar D_i^{\mathrm T} \bar D_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \le 0. \tag{3.15}$$

Матричное неравенство (3.15) эквивалентно второму матричному неравенству в системе (3.5).

Найдем числа μ_4, μ_5, удовлетворяющие неравенству (3.11). Перепишем условие (3.11) в виде $\mu_5 > 0$, $\mu_4 X_i - \mu_5 \delta^2 I > 0$. Следовательно, с учетом $X_i = X_i^{\mathrm T} > 0$ для выполнения этих неравенств достаточно выбрать $\mu_4 = 2\delta^2 / \lambda_{\min}(X_i)$, где в знаменателе фигурирует минимальное собственное число матрицы; $\mu_5 = 1$.

Найдем вектор $(x_*^{\mathrm T} \ \ w_*^{\mathrm T})^{\mathrm T}$, удовлетворяющий неравенствам (3.12). Так как $V = x^{\mathrm T}(t) X_i x(t)$ – квадратичная функция Ляпунова, то для всех $x \in E(X_i)$ выполнено неравенство $x^{\mathrm T}(t) X_i x(t) \le 1$. Следовательно, первое неравенство (3.12) верно, если точка x_* лежит внутри эллипсоида $E(X_i)$. В силу неравенства (3.2) для выполнения второго неравенства (3.12) выберем $w_* = \delta x_* / 2$. Теорема 3 доказана.

Обозначим через X_i множество всех матриц X_i, удовлетворяющих неравенствам (3.5). Максимальную по всем $X_i \in \mathrm{X}_i$ область $E(X_i^*)$ найдем путем минимизации следа матрицы X_i. Эта операция является стандартной в пакете программ для инженерных расчетов Matlab [8] с использованием приложения CVX. Заметим, что не удается получить в терминах линейных матричных неравенств условия для построения множеств $E(Y_i) = \{x : x^{\mathrm T} Y_i^{-1} x \le 1\}$, $i = \overline{1, N}$, что позволило бы максимизировать объемы соответствующих эллипсоидов.

Пусть каждая из матриц X_i, $i = \overline{1, N}$, имеет минимальный след и является решением системы (3.5) для значения γ_i. Тогда все траектории замкнутой системы (3.3) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^{\mathrm T} X_i x \le 1\}$ будут удовлетворять ограничению $\max\limits_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$. Следовательно, для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} E(X_i)$, управление с заданной матрицей параметров регулятора K стабилизирует замкнутую систему при ограничениях (1.4).

4. Стабилизация перевернутого маятника. В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot\varphi - \varphi = u \tag{4.1}$$

при ограничениях на φ – угол отклонения звена маятника от вертикали и управление u

$$\max_{t \ge 0} |\varphi(t)| \le 0.1, \quad \max_{t \ge 0} |u(t)| \le 1. \tag{4.2}$$

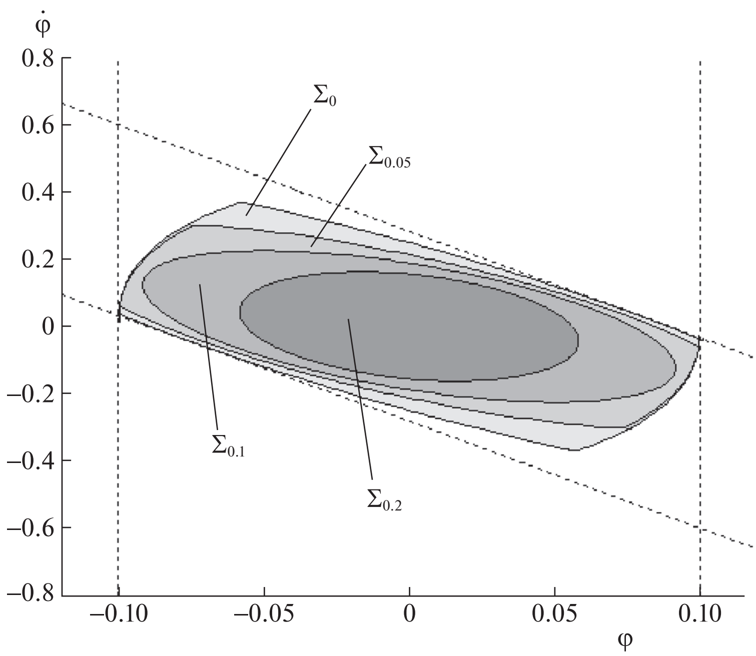

Рис. 3. Пересечение областей Σ_0, $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.1}$ и $\Sigma_{0.2}$

Численное решение получено в пакете Matlab. Для объекта (4.1) решен ряд задач. Как было указано выше, в случае решения задачи стабилизации при отсутствии ошибки в измеряемом выходе найдено управление

$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \tag{4.3}$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4.1), (4.3) и выполнение ограничений на фазовую переменную и управление (4.2). Управление (4.3) получено в результате поиска матрицы Y, имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.11).

На рис. 3 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \le 0.1, \quad |u(t)| \le 1. \tag{4.4}$$

Оценим изменение оценки области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (4.3) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Обозначим через Σ_δ оценку множества допустимых начальных состояний, для которых управление стабилизирует систему при значении δ. На рис. 3 приведены области Σ_0, $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.1}$, $\Sigma_{0.2}$, соответствующие значениям $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$, $\delta = 0.2$, и показано пересечение этих областей. Из рисунка следует, что область $\Sigma_{0.2}$ лежит внутри области $\Sigma_{0.1}$, которая в свою очередь лежит внутри области $\Sigma_{0.05}$, а область $\Sigma_{0.05}$ лежит внутри Σ_0.

Проведенные вычисления показывают, что эллипсы, отвечающие за ограничения на угол отклонения звена маятника при значениях $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$ и $\delta = 0.2$, близки друг к другу. Таким образом, на размер области Σ_δ допустимых начальных состояний оказывает влияние как значение величины параметра δ, так и наличие в задаче ограничения на управление.

Вычислим зависимость площади S области Σ_δ от величины δ, которая определяет величину ошибки в изменяемом выходе. На рис. 4 представлен график этой зависимости. В частности, получены значения $S(0) = 0.0819$, $S(0.05) = 0.0696$, $S(0.1) = 0.0541$, $S(0.2) = 0.0285$. Таким образом, при относительно небольших значениях δ размеры области допустимых начальных состояний могут существенно уменьшиться.

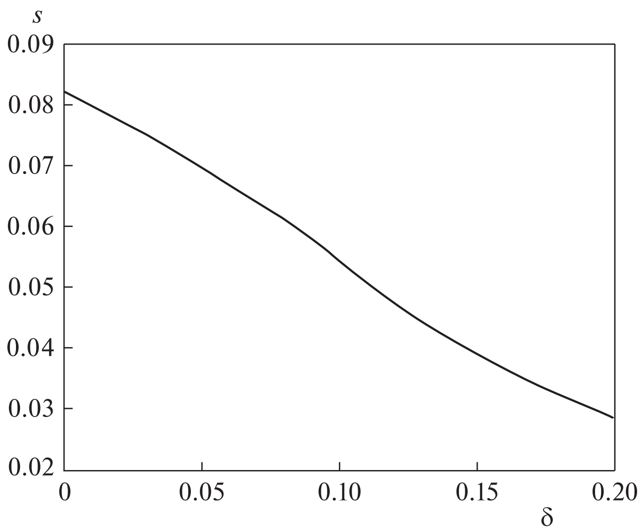

Рис. 4. График зависимости площади области Σ_δ

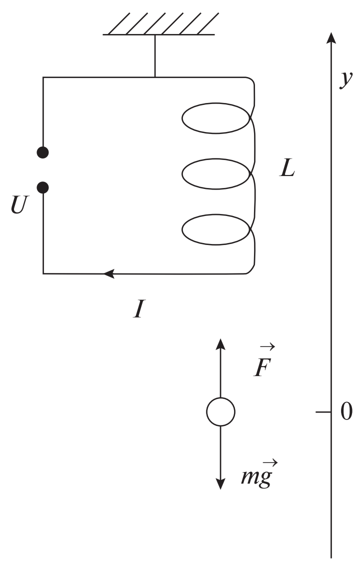

Рис. 5. Электромагнитный подвес

5. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе. Уравнения движения тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия, изображенном на рис. 5, имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F(y, I) - mg, \\ \dot{\psi} + RI &= U, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где m – масса вывешенного тела, y – координата вывешенного тела, g – ускорение свободного падения, ψ – потокосцепление обмотки электромагнита, I – сила тока в электромагните, R – сопротивление в цепи электромагнита, U – напряжение, подаваемое на электромагнит.

Первое уравнение системы (5.1) описывает второй закон Ньютона для вывешенного тела. Второе уравнение следует из закона Кирхгофа для электрической цепи электромагнита. Известно [9], что величина потокосцепления ψ связана с током I и величиной индуктивности электромагнита $L(y)$ выражением $\psi = L(y)I$, где $L(y) = C_L/(\delta - y)$. Здесь C_L – конструктивный параметр, δ – величина номинального зазора между электромагнитом и вывешенным телом. Также известно, что выражение для силы $F(y,I)$, действующей на тело, можно представить в виде $F(y, I) = \partial W/\partial y$, где коэнергия системы

$$W = \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)}.$$

Перепишем уравнения (5.1) в виде

$$\begin{gathered} m\ddot{y} = \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)^2} - mg, \\ \frac{C_L}{(\delta - y)}\dot{I} + \frac{C_L I}{(\delta - y)^2}\dot{y} + RI = U(t). \end{gathered} \tag{5.2}$$

Состояние равновесия системы (5.2) определяется равенствами $y = 0$, $\dot{y} = 0$, $I = I_C$, где $I_C = \sqrt{2\delta^2 mg/C_L}$. Перейдем к безразмерным величинам. Введем новое безразмерное время $t = \sqrt{2g/\delta}t'$ и, обозначив

$$x_1 = \frac{y}{\delta}, \quad x_2 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2g\delta}}, \quad x_3 = \frac{I}{I_C} - 1, \quad u = \sqrt{\frac{\delta}{4g^2 m C_L}}(U - RI_C),$$

запишем систему (5.2) в виде

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + x_3}{1 - x_1}\right)^2 - \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_3 = -\left(\frac{1 + x_3}{1 - x_1}\right)x_2 - \alpha(1 - x_1)x_3 + (1 - x_1)u, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где

$$\alpha = \frac{R\delta}{C_L}\sqrt{\frac{\delta}{2g}}.$$

Линеаризуем систему в окрестности состояния равновесия. Получим

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5.4}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Численное решение получено в пакете Matlab. Пусть значение параметра системы $\alpha = 7.5$. Для объекта (5.4) решен ряд задач. В случае отсутствия ошибки в измеряемом выходе системы найдено управление

$$u = -37.0112x_1 - 25.7894x_2 - 2.8794x_3, \tag{5.5}$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (5.4), (5.5) и выполнение ограничений

$$\max_{t\ge 0}|x_1(t)| \le 0.1, \quad \max_{t\ge 0}|u(t)| \le 1, \tag{5.6}$$

где x_1 – величина, пропорциональная смещению тела. Управление (5.5) получено в результате поиска матрицы Y, имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.11).

Оценим область допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (5.5) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Решение системы линейных матричных неравенств (3.5) при заданном параметре δ будут определять два множества допустимых начальных состояний $E(X_1) = \{x : x^{\mathrm{T}} X_1 x \le 1\}$, $E(X_2) = \{x : x^{\mathrm{T}} X_2 x \le 1\}$ для

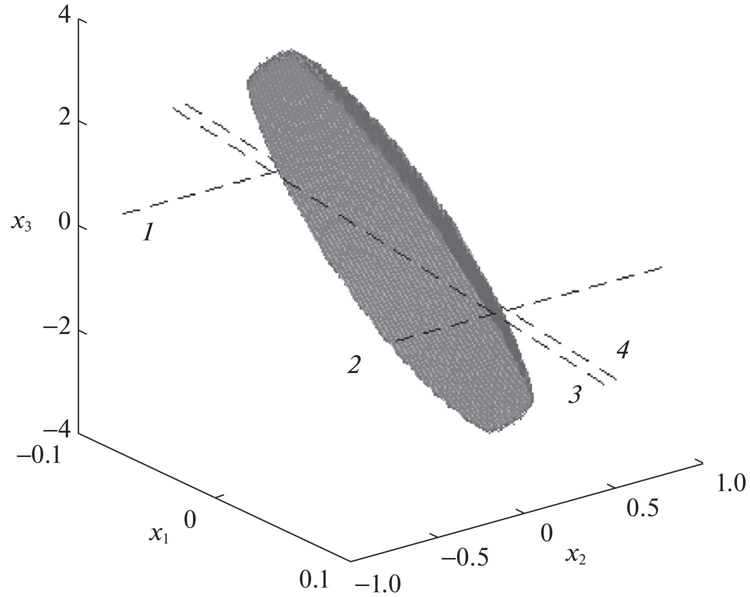

Рис. 6. Оценка множества допустимых начальных состояний при значении параметра $\delta = 0$

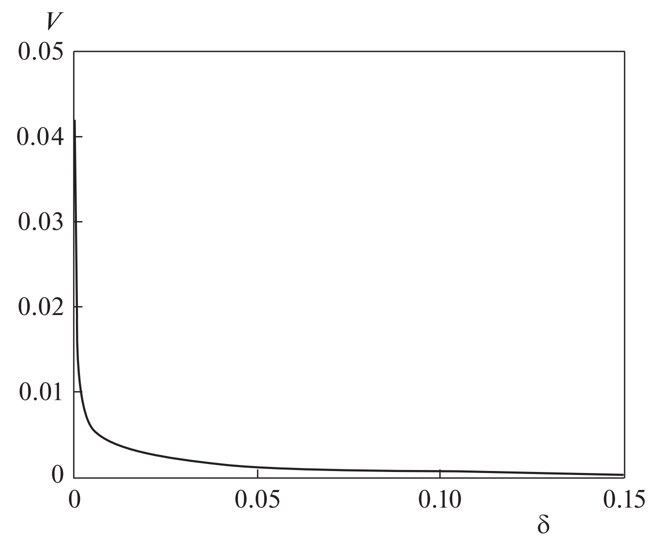

Рис. 7. График зависимости объема вписанного эллипсоида от δ

первого и второго ограничений (5.6) соответственно. На рис. 6 представлено множество, полученное пересечением эллипсоидов $E(X_1)$ и $E(X_2)$ при значении параметра $\delta = 0$. Пунктирными линиями *1* и *2* изображены при $x_3 = 0$ прямые $x_1 = -0.1$ и $x_1 = 0.1$ соответственно. Пунктирные линии *3* и *4* соответствуют при $x_3 = 0$ прямым $u = -1$ и $u = 1$.

Впишем в множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ эллипсоид, имеющий наибольший объем. На рис. 7 представлен график зависимости объема V данного эллипсоида от величины δ. В частности, получены значения $V(0) = 0.0481$, $V(0.05) = 0.0014$, $V(0.1) = 0.0008$, $V(0.15) = 0.0003$. Проведенные исследования показывают, что на размеры области $E(X_1) \cap E(X_2)$ наибольшее влияние оказывает наличие в задаче ограничения на управления. Так, при изменении значения параметра δ от 0 до 0.1 объем эллипсоида $E(X_1)$ меняется от 0.4678 до 0.1303. В то же время объем эллипсоида $E(X_2)$

меняется от 0.1161 до 0.0008. Таким образом, при относительно небольших значениях δ размеры области допустимых начальных состояний существенно уменьшаются.

Заключение. Поставлена и решена задача по оценке области допустимых начальных состояний линейной динамической системы, при которых регулятор, полученный в задаче синтеза управления по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить множество допустимых начальных состояний динамической системы. В качестве примеров рассмотрены задачи стабилизации перевернутого маятника и движения тела в электромагнитном подвесе. Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты.

Заметим, что при решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации динамических объектов по измеряемому выходу системы. В дальнейшем планируется рассмотреть ситуацию, когда измеряется часть фазовых переменных или их линейная комбинация. Предполагается решить задачу стабилизации с помощью статического регулятора при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, а также оценить область допустимых начальных состояний для полученного регулятора при наличии ошибки в измерениях выходных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
2. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // АиТ. 2009. № 6. С. 48–57.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
5. *Федюков А.А.* Синтез стабилизирующих регуляторов по выходу для динамических систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестн. ННГУ. 2013. № 2 (1). С. 152–159.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления: учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
8. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
9. *Журавлев Ю.Н.* Активные электромагнитные подшипники: теория, расчет, применение. СПб.: Политехника, 2003.