ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 5, с. 105–110

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 656.072:519.211

РАСЧЕТНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШРУТНЫХ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ ПАССАЖИРОПОТОКОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ ВХОДА И ВЫХОДА

 В. Н. Ембулаев

Владивостокский государственный ун-т экономики и сервиса, Владивосток, Россия

e-mail: Vladimir.Embulaev@vvsu.ru

Поступила в редакцию 26.10.2020 г.
После доработки 24.03.2021 г.
Принята к публикации 31.05.2021 г.

При разработке расчетного способа определения маршрутных корреспонденций пассажиропотоков по данным входа и выхода показано, что число пассажиров, совершающих поездку между двумя конкретными остановками, представляет собой дискретную случайную величину. Для каждого значения этой случайной величины ставится в соответствие ее вероятность. При этом в качестве определения числа проехавших пассажиров принимается то значение случайной величины, вероятность которого наибольшая.

DOI: 10.31857/S0002338821050073

Введение. Транспортная система крупного города относится к большим системам, поэтому с организацией пассажирских перевозок по маршрутам города всегда были проблемы [1, 2]. По мнению специалистов, данную проблему в крупных городах можно решить за счет наиболее рационального использования имеющихся в наличии и готовых к эксплуатации транспортных средств (ТС) на основе координированного управления работой всеми видами городского пассажирского транспорта [3, 4].

Анализ постановки и решения задачи координации в управлении транспортной системой крупного города показал, что при решении задач перспективного, текущего и оперативного управления вся информационная база делится на три основных массива: условно-постоянный (данные о маршрутной сети и о составе ТС), нормативный (экономические показатели) и переменный (данные о пассажиропотоках и на их основе определяемые количественные и качественные показатели работы транспортной системы) [5]. При этом отмечено, что основной проблемой при координированном управлении всей транспортной системой крупного города выступает знание информации о маршрутных корреспонденциях пассажиропотоков (МКП), которые различны по мощности на всех маршрутах города и меняются в течение суток на каждом из них, и потому требуется автоматизация и механизация ее получения.

Известно, что в целях автоматизации и механизации получения информации о МКП наиболее эффективным способом считается обработка данных входа a_i, $i = \overline{1,n}$, и выхода b_j, $j = \overline{1,n}$, пассажиров на каждом остановочном пункте (ОП) маршрута (где n – число ОП на маршруте) [6]. При этом к числу малоисследованных задач относится задача расчета информации о распределении пассажиропотоков по маршруту x_{ij}, $i \le j$, т.е. необходимо определить, сколько пассажиров проехало между двумя любыми остановками i и j по маршруту в течение одного рейса.

1. Постановка задачи. Для эффективного управления и организации пассажирских перевозок по маршрутам крупного города большое значение имеет наличие информации о МКП. Отсутствие такой информации практически заставило разработчиков найти способ ее определения в результате обработки данных входа и выхода пассажиров, фиксируемых во время пассажирообмена на каждом ОП маршрута.

Заметим, что когда происходит фиксация общих данных входа и выхода на каждом ОП маршрута, то для любого пассажира в отдельности информация о его пути следования никак не фиксируется. При этом остаются неизвестными и его мотивы выбора именно пути передвижения от i до j по маршруту, а значит, остаются неизвестными его ОП входа и выхода. Более того, его передвижение по маршруту никак не зависит от выбора пути следования другими пассажирами. Это позволяет считать, что поездка любого пассажира по маршруту есть процесс случайный и не зависит от выбора другими пассажирами своего пути следования. И так как для каждого пассажира в салоне ТС его ОП входа i и выхода j считаются неизвестными, то допустимо следующее предположение: для любого из них событие выйти на этом ОП или поехать дальше равновероятно.

Таким образом, решение задачи определения элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков по данным входа-выхода требует вероятностной интерпретации.

Во время стоянки ТС на j-м ОП происходит пассажирообмен: из всех подъехавших с предыдущего ОП, которых обозначим через Q_{j-1}, вначале из салона выходит группа в количестве b_j пассажиров, а затем входит в салон группа из a_j пассажиров. При отправлении ТС от j-го ОП в салоне будет находиться Q_j пассажиров, число которых определяется по формуле

$$Q_j = (Q_{j-1} - b_j) + a_j = \sum_{r=1}^{j}(a_r - b_r).$$

Так как во время стоянки ТС на i-м ОП в салон вошло a_i пассажиров, то не исключено, что некоторые из них могут выйти на $(i+1)$-м ОП, что соответствует числу пассажиров, совершивших поездку от i-го до $(i+1)$-го ОП – $x_{i,i+1}$. И если это число вычесть из всех вошедших на i-м ОП, то получим оставшихся из a_i пассажиров, которые и продолжат свои поездки дальше по маршруту. Обозначим это число через $a_{i,i+1}$, которое вычисляется следующим образом: $a_{i,i+1} = a_i - x_{i,\,i+1}$.

По прибытии ТС на ОП $(i+2)$ вместе с вышедшими (b_{i+2}) могут выйти и те, которые вошли на i-м ОП, что соответствует числу пассажиров, совершивших поездки от i-го до $(i+2)$-го ОП на маршруте $x_{i,i+2}$. И если теперь это значение вычесть из $a_{i,i+1}$, то получим число пассажиров, которые вошли на i-м ОП и продолжили свой путь и после $(i+2)$ ОП:

$$a_{i,i+2} = a_{i,i+1} - x_{i,i+2} = a_i - x_{i,i+1} - x_{i,i+2} = a_i - \sum_{r=i+1}^{i+2} x_{ir}$$

и т.д.

И в целом, для любых i и j данная величина вычисляется по формуле

$$a_{ij} = a_i - \sum_{r=i+1}^{j} x_{ir}.$$

Другими словами, a_{ij} – это число оставшихся пассажиров из всех вошедших на i-м ОП, которые продолжат свой путь по маршруту и после j-го ОП, и определяется вычитанием из a_i всех тех, которые уже проехали отрезки на маршруте от i до $(i+1)$ ОП – $x_{i,i+1}$, от i до $(i+2)$ ОП – $x_{i,i+2}$, ..., от i до $(j-1)$ ОП – $x_{i,j-1}$.

В перевозочном процессе по маршруту, когда на j-м ОП стояло ТС, то внутри салона находилось Q_{j-1} пассажиров, среди которых имелись и вошедшие на i-м ОП – a_{ij}. В результате пассажирообмена на ОП вместе с b_j могли выйти и те пассажиры, которые вошли в салон ТС на i-м ОП, т.е. из группы a_{ij}. В этом случае число x_{ij}, которое одновременно будет принадлежать a_{ij} и b_j, и является искомой величиной.

Если таким образом определить все поездки пассажиров между двумя любыми ОП на маршруте, то их можно отобразить в виде таблицы элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков (табл. 1). При этом считается, что $x_{ii} = 0$, так как нет таких пассажиров, которые начинают и заканчивают свою поездку на i-м ОП, где n – число ОП на маршруте; a_i – число пассажиров, вошедших в ТС на i-м ОП; b_j – число пассажиров, вышедших из ТС на j-м ОП; x_{ij} – число корреспондирующих пассажиров от i-го до j-го ОП, $i \le j$.

Таблица 1. Матрица элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков

Номера ОП входа	Номера ОП выхода							Вошло в ТС
	1	2	3	4	5	…	n	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	…	x_{1n}	a_1
2		x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	…	x_{2n}	a_2
3			x_{33}	x_{34}	x_{35}	…	x_{3n}	a_3
4				x_{44}	x_{45}	…	x_{4n}	a_4
5					x_{55}	…	x_{5n}	a_5
.						…	.	.
.						…	.	.
.						…	.	.
n							x_{nn}	a_n
Вышло	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	…	b_n	

Из табл. 1 видно, что математическая формализация постановки задачи определения x_{ij} по данным a_i и b_j заключается в следующем. Задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^{j} x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\text{или } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{ij} \right). \tag{1.2}$$

Так как система (1.1) состоит из $2n$ уравнений с $n(n+1)/2$ неизвестными, то единственное решение существует, когда $2n = n(n+1)/2$. Следовательно, единственное решение возможно при $n \leq 3$, в то время как для $n > 3$ существует, в принципе, бесчисленное множество решений. Потому без дополнительного предположения относительно распределения пассажирских потоков между ОП маршрута нельзя получить однозначного решения данной задачи.

2. Вероятностный метод решения задачи. Когда ТС стояло на j-м ОП, то в салоне находилось Q_{j-1} пассажиров, из которых вышло b_j человек. С учетом принятого предположения о том, что для каждого пассажира в салоне ТС событие выйти на этом ОП или поехать дальше считается равновероятным, то выход любой группы пассажиров из ТС в количестве b_j человек из всех подъехавших – равновозможное и несовместное событие. Общее число таких групп в различных комбинациях равно числу сочетаний из Q_{j-1} по b_j, т.е. $C_{Q_{j-1}}^{b_j}$.

Всех подъехавших пассажиров к j-му ОП (Q_{j-1}) условно можно разбить на две группы: одна группа состоит из тех пассажиров, которые вошли в салон ТС на i-м ОП и не вышли ранее j-го ОП (a_{ij}), а вторая группа – все остальные ($Q_{j-1} - a_{ij}$). Так как на j-м ОП вышло b_j человек, то среди них могут оказаться и те, которые принадлежат группе a_{ij}. Обозначим их через λ_{ij}. Очевидно, что λ_{ij} – случайная величина, которая принимает целочисленные значения. И группу λ_{ij} человек из a_{ij} можно выбрать $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}}$ способами в различных комбинациях. Но для каждой определенной группы λ_{ij} остальных пассажиров ($b_j - \lambda_{ij}$) при этом также можно выбрать $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$ различными способами. И тогда общее число благоприятствующих случаев будет равно $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$.

Таблица 2. Соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями

Значения λ_{ij}	0	1	2	...	k
Вероятности	p_0	p_1	p_2	...	p_k

Согласно классической формуле определения вероятности события, что между остановками i и j совершат поездки λ_{ij} человек, на основании выше изложенного нетрудно вычислить вероятность того, что среди вышедших b_j пассажиров группе a_{ij} будет принадлежать ровно λ_{ij} человек [7]:

$$P_{b_j}\left(\lambda_{ij}\right) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}. \tag{2.1}$$

При данном описании задачи возможны два случая: $a_{ij} \geq b_j$ и $a_{ij} \leq b_j$.

При $a_{ij} \geq b_j$ случайная величина λ_{ij} может принимать целочисленные значения от 0 до b_j, а при $a_{ij} \leq b_j$ – от 0 до a_{ij}. В общем случае она может принимать значения на отрезке

$$0 \leq \lambda_{ij} \leq \min[a_{ij}, b_j]. \tag{2.2}$$

Итак, при решении задачи (1.1)–(1.2) случайная величина поездок пассажиров (λ_{ij}) между конкретными ОП i и j на маршруте может принимать целые неотрицательные значения только на отрезке (2.2). Любое число вне этого отрезка не может быть принято в качестве решения задачи (1.1)–(1.2).

По сути своей случайная величина λ_{ij} является дискретной величиной, которая может принимать любое целочисленное значение на отрезке (2.2). Для каждого значения ставится в соответствие вероятность, которая определяется по формуле (2.1). Полученное соответствие отобразим в виде табл. 2, где $k = \min\left[a_{ij}, b_j\right]$, а вероятности p_l, $l = \overline{0,k}$, определяются по формуле (2.1) для конкретного значения λ_{ij}.

В этом случае из всех целых чисел λ_{ij} на отрезке (2.2) в качестве единственной искомой величины можно принять то значение, для которой вероятность достигает своего максимального значения по аргументу λ_{ij}:

$$x_{ij} = \operatorname{argmax} P_{b_j}(\lambda_{ij}).$$

Раз x_{ij} является наивероятнейшим значением для случайной величины λ_{ij}, то для двух рядом стоящих чисел $(x_{ij} - 1)$ и $(x_{ij} + 1)$ должны выполняться неравенства [7]:

$$P_{b_j}(x_{ij} - 1)/P_{b_j}(x_{ij}) \leq 1 \quad \text{и} \quad P_{b_j}(x_{ij})/P_{b_j}(x_{ij} + 1) \geq 1.$$

Раскрывая эти неравенства, приходим к выражениям:

$$\frac{P_{b_j}\left(x_{ij} - 1\right)}{P_{b_j}\left(x_{ij}\right)} = \frac{x_{ij}\left(Q_{j-1} - a_{ij} - b_j + x_{ij}\right)}{\left(a_{ij} - x_{ij} + 1\right)\left(b_j - x_{ij} + 1\right)} \leq 1,$$

$$\frac{P_{b_j}\left(x_{ij}\right)}{P_{b_j}\left(x_{ij} + 1\right)} = \frac{\left(x_{ij} + 1\right)\left(Q_{j-1} - a_{ij} - b_j + x_{ij} + 1\right)}{\left(a_{ij} - x_{ij}\right)\left(b_j - x_{ij}\right)} \geq 1.$$

Решение же этих неравенств относительно x_{ij} приводит к результату:

$$\frac{\left(a_{ij} + 1\right)\left(b_j + 1\right)}{Q_{j-1} + 2} - 1 \leq x_{ij} \leq \frac{\left(a_{ij} + 1\right)\left(b_j + 1\right)}{Q_{j-1} + 2}.$$

Так как числа, получаемые при вычислениях по формулам $\left(a_{ij} + 1\right)\left(b_j + 1\right)/\left(Q_{J-1} + 2\right)$ и $a_{ij}b_j/Q_{j-1}$, являются дробными, расположены на числовой оси между одними и теми же целыми числами и разница между ними очень мала, при этом значения x_{ij} в качестве решения округляются до целого числа, то полученное выражение можно записать в виде

$$\frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}} - 1 \le x_{ij} \le \frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}}.$$

Из этого двойного неравенства следует, что формула определения x_{ij} имеет вид

$$x_{ij} = \frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}}.$$

В данной формуле величины a_{ij} и Q_{j-1} имеют единственные значения, b_j является исходной величиной, поэтому для любых i и j значения x_{ij} также будут единственными. Следовательно, данная формула определения x_{ij} позволяет получать единственное решение поставленной задачи, которое можно отобразить в виде табл. 1.

Однако следует заметить, что при вычислении элементов x_{ij} в качестве единственного решения принимаются их округленные значения до целого, а это значит, что в некоторых строчках (или столбцах) таблицы их суммы могут не совпадать с исходными данными входа (или выхода). В целях сохранения баланса в каждой строчке и столбце таблицы предлагается следующий способ расчета. Если $j = i$, то $x_{ij} = 0$, и они в таблице расположены на главной диагонали. Если $j = n$, то элементы расположены в последнем столбце таблицы – $x_{1,n}$, $x_{2,n}$, $x_{3,n}$, ..., $x_{n-1,n}$. Тогда их вычисление осуществляется следующим образом: находят сумму всех элементов, например в i-й строке до искомого, а затем искомый находят как разницу между a_i и полученной суммой:

$$x_{in} = a_i - \sum_{r=i}^{n-1} x_{ir}.$$

Если $j = i + 1$, то элементы расположены первыми над диагональными в каждом столбце таблицы – x_{12}, x_{23}, x_{34}, ..., $x_{n-1,n}$. Тогда их вычисление осуществляется следующим образом: вначале находят сумму элементов, например в j-м столбце до искомого, а затем искомый находят как разницу между b_j и полученной суммой:

$$x_{ij} = b_j - \sum_{r=1}^{j-2} x_{rj}.$$

На основе изложенных уточнений предложена общая формула расчета поездок пассажиров по маршруту при решении задачи (1.1)–(1.2), которая имеет следующий вид:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad i = j; \\ b_j - \sum\limits_{r=1}^{j-2} x_{rj}, \quad \text{если} \quad j = i + 1; \\ a_i - \sum\limits_{r=i}^{j-1} x_{ir}, \quad \text{если} \quad j = n; \\ \dfrac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}} \quad \text{при всех других} \quad i \quad \text{и} \quad j. \end{cases}$$

Заключение. Для проверки вычисления элементов x_{ij} по предложенной формуле использовали существующие таблицы маршрутных корреспонденций пассажиропотоков по рейсам и часам. Брали данные входа-выхода из имеющих таблиц, на их основе получали расчетным способом значения элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков, а затем сравнивали их с табличными.

Анализ результатов сравнения расчетных x_{ij} с имеющимися в таблицах элементами маршрутных корреспонденций пассажиропотоков показал, что отклонение колеблется в среднем: а) для рейсовых элементов x_{ij} в пределах 1.1–5.3 со средним значением 3.2%; б) для часовых элементов x_{ij} в пределах 5.8–11.6 со средним значением 8.7%. Это позволяет сделать следующий вывод:

точность вычисления элементов x_{ij} выше при небольших значениях данных входа и выхода, характеризующих слабые пассажиропотоки.

Важность этого вывода необходимо учитывать при разработке автоматизированной системы моделей и алгоритмов обработки материалов транспортных обследований. Например, технология фиксации данных входа-выхода позволяет вначале находить информацию о поездках пассажиров по каждому рейсу. Однако для решения задач текущего и перспективного планирования в основном необходима информация, детализированная по часам суток и за сутки в целом. В этом случае почасовые элементы x_{ij} можно определять двумя способами:

1) вначале суммировать данные входа-выхода каждого рейса по часовым интервалам, а затем с помощью расчета определять элементы x_{ij};

2) по данным входа-выхода каждого рейса вычислять элементы x_{ij}, а затем суммировать их по часовым интервалам.

Аналогично двумя способами можно получать суточные элементы x_{ij}.

Расчеты первым и вторым способами дают различные результаты, причем более точен второй способ. Это вытекает, во-первых, из вывода, что данные входа-выхода каждого рейса в отдельности характеризуют менее слабые пассажиропотоки в сравнении с почасовыми исходными данными, на основании которых определяются элементы x_{ij}. Во-вторых, второй способ дает наибольшую стабильность результатов в сравнении с первым, когда вычисление осуществляется при допущении о равной вероятности выхода на ОП любого из пассажиров независимо от рейса, которым он следует.

Кроме того, отсутствие баланса между данными входа-выхода в каждом часе (довольно часто случается так, что начало и конец поездки для пассажира попадают в разные часовые интервалы) также указывает на преимущество второго способа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якимов М.Р., Евсеев О.В.* Математические модели в формировании эффективных транспортных систем // Транспорт Российской Федерации. 2019. № 1 (79). С. 56–60.
2. *Андреев К.П., Терентьев В.В.* Пассажирские перевозки и оптимизация городской маршрутной сети // Мир транспорта. 2017. № 2. С. 159–161.
3. *Носов А.Л.* Управление качеством работы городского пассажирского транспорта с использованием транспортной модели // Логистика сегодня. 2015. № 1. С. 38–47.
4. *Фасхиев Х.А.* Эффективный автобус для городских перевозок: как осуществлять выбор? // Логистика сегодня. 2017. № 4. С. 274–288.
5. *Ембулаев В.Н., Дегтярёва О.Г., Белозерцева Н.П.* Системный подход в теории и практике организации городских пассажирских перевозок. Владивосток: ВГУЭС, 2013.
6. *Андреев К.П., Терентьев В.В., Кулик С.Н.* Обследование пассажиропотоков на городских автобусных маршрутах // Новая наука: проблемы и перспективы. 2016. № 2. С. 159–161.
7. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Юрайт, 2016.