ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 5, с. 120–127

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.86

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО НАБОРА РЕСУРСОВ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ МНОГОПРОЦЕССОРНОГО РАСПИСАНИЯ

М. Г. Фуругян

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

e-mail:rtsccas@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.12.2020 г.
После доработки 08.02.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается задача составления многопроцессорного расписания для комплекса работ при наличии ресурсов двух видов – возобновляемых (процессоров) и невозобновляемых. Доступные объемы ресурсов могут изменяться во времени. Работы характеризуются объемами и директивными интервалами. Допускается параллельное выполнение работы несколькими процессорами. Решаются следующие задачи: существования и построения допустимого расписания при заданных объемах ресурсов; минимизации стоимости ресурсов, при наличии которых существует допустимое расписание.

DOI: 10.31857/S0002338821050085

Введение. Задачи планирования выполнения работ и составления расписаний возникают во многих областях деятельности человека: при создании, возведении и сопровождении сложных технических объектов (летательные аппараты, атомные реакторы), проведении различных испытаний в реальном масштабе времени, проектировании систем противовоздушной и противоракетной обороны, при обработке больших массивов информации технического, экономического и экологического характера, в других областях. В середине прошлого века американскими исследователями были разработаны системы ПЕРТ (program evaluation and review technique – метод оценки и пересмотра планов) и МКП (critical path method – метод критического пути) [1, 2], которые успешно применялись при создании вооружений для военно-морских сил США и строительстве военных и гражданских объектов. При этом решались задачи распределения невозобновляемых ресурсов (финансы, топливо, электроэнергия, различные материалы, оперативная память электронно-вычислительной машины, закрепленная за определенными программными модулями). Предполагалось, что длительности работ линейно зависят от величины выделенного им ресурса.

Возобновляемые ресурсы (процессоры, машины, исполнительные механизмы, приборы, рабочие), в отличие от невозобновляемых, могут использоваться многократно. Проблемам распределения возобновляемых ресурсов посвящено большое количество публикаций. Отметим такие фундаментальные работы, как [3–5], в которых исследованы различные задачи теории расписаний (планирование прерываемых и непрерываемых заданий, решение задач с директивными сроками и задач на быстродействие, составление однопроцессорных и многопроцессорных расписаний). В [6] рассмотрены задачи распределения возобновляемых ресурсов с нефиксированными параметрами. В некоторых случаях задачи планирования работ могут быть сведены к сетевому планированию [2, 7] и минимаксным задачам [8–11].

В настоящей статье рассматривается задача планирования комплекса работ (заданий), использующих как возобновляемые, так и невозобновляемые ресурсы. Доступные объемы ресурсов могут изменяться во времени. Каждая работа характеризуется объемом и директивным интервалом. Исследуются следующие случаи:

– все работы допускают прерывания и переключения с одного процессора на другой;

– комплекс содержит как прерываемые, так и непрерываемые задания;

– в фиксированный момент времени работа может выполняться не более чем одним процессором;

– допускается параллельное выполнение работы несколькими процессорами.

Для указанных случаев решаются задачи поиска допустимого расписания и минимизации стоимости используемых ресурсов. Методика решения указанных задач основана на сведении их к потоковым задачам в сетях специального вида.

1. Постановка задачи. Имеется комплекс работ (заданий) $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, подлежащих выполнению во временном интервале планирования $[0; T]$ с применением двух видов ресурсов — возобновляемых (процессоров) и невозобновляемых. Интервал $[0; T]$ разбивается на p непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \dots, I_p$ ($I_j = [\tau_j, \ \tau_{j+1}]$, $j = \overline{1, p}$, $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < \tau_{p+1} = T$), пусть $\delta_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ — длина интервала I_j. Доступные объемы ресурсов в каждый момент времени определяются следующим образом. В интервале I_j для выполнения работ имеется m_j процессоров, производительности которых $s_{j1} \le s_{j2} \le \dots \le s_{jm_j}$ ($S_j = s_{j1} + s_{j2} + \dots + s_{jm_j}$ — их суммарная производительность), и K типов невозобновляемых ресурсов. Доступный объем невозобновляемого ресурса k-го типа в интервале I_j составляет R_{jk}, $j = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, K}$.

Каждая работа $w_i \in W$ может выполняться с использованием обоих видов ресурсов (возобновляемых и невозобновляемых), допускает прерывания и переключения (не требующие временных затрат) с одного процессора на другой и параллельную реализацию несколькими процессорами (при определенных ограничениях). Задание $w_i \in W$ имеет следующие характеристики: Q_i — объем; $[b_i; f_i]$ — директивный интервал, $b_i, f_i \in \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{p+1}\}$ (т.е. задание w_i может исполняться только в этом интервале); q_{ij}^0 — максимально допустимый объем работы процессоров, выполняющих задание w_i в интервале I_j; r_{ijk}^0 — максимальный объем невозобновляемого ресурса k-го типа, который может быть выделен заданию w_i в интервале I_j.

Если процессоры с суммарной производительностью s в интервале I_j выполняют некоторое задание в течение временного отрезка длиной δ, то объем производимый ими работы при этом составляет $a_j \delta s$, а стоимость эксплуатации этих процессоров равна $c_j a_j \delta s$. В фиксированный момент времени каждый процессор может исполнять не более одного задания. Использование в интервале I_j невозобновляемого ресурса k-типа в количестве r_{jk} обеспечивает объем работы, равный $b_{jk} r_{jk}$, а его стоимость равна $d_{jk} b_{jk} r_{jk}$ (здесь a_j, c_j, b_{jk}, d_{jk} — заданные положительные величины).

Ресурсы каждого вида могут быть выделены работе w_i в интервале I_j только в том случае, когда $I_j \subseteq [b_i; f_i]$. Если в интервале I_j суммарный объем работы процессоров по выполнению задания w_i составляет q_{ij}, то должны быть верны следующие соотношения:

$$q_{ij} \le q_{ij}^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} \le a_j S_j \delta_j, \quad j = \overline{1, p}. \tag{1.2}$$

Если в интервале I_j заданию w_i выделен невозобновляемый ресурс k-го типа в объеме r_{ijk}, то должны удовлетворяться следующие соотношения:

$$r_{ijk} \le r_{ijk}^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ijk} \le R_{jk}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{1.4}$$

Распределение ресурсов указывает для каждой работы $w_i \in W$ и каждого момента времени $t \in [0; T]$, какие процессоры ее исполняют. А для каждого интервала I_j, $j = \overline{1, p}$, определяет, какие невозобновляемые ресурсы и в каком количестве выделены этой работе. При этом должны быть верны соотношения (1.1)–(1.4). То же определяет и расписание работ W. Поэтому в дальнейшем, говоря о распределении ресурсов, будем иметь в виду также и расписание. Допустимым распределением ресурсов называется такое распределение, при котором каждая работа полностью выполняется в своем директивном интервале. Задача заключается в том, чтобы определить, существует ли допустимое распределение ресурсов, и в случае положительного ответа найти это

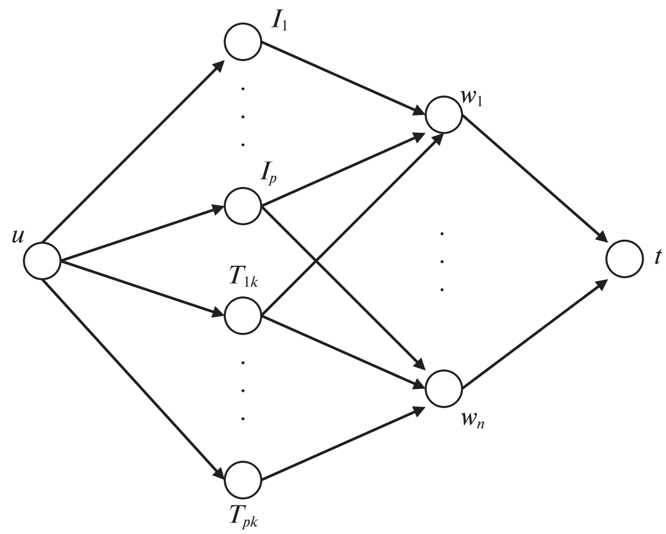

Рис. 1. Потоковая сеть G_1 $(k = \overline{1, K})$

распределение и определить допустимое распределение ресурсов с минимальной стоимостью их эксплуатации.

2. Построение сетевой модели. Для решения поставленной задачи построим потоковую сеть $G_1 = (V_1, A_1)$ (рис. 1), где $V_1 = \{u, t, I_j, T_{jk}, w_i, j = \overline{1, p}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, n}\}$ — множество узлов, u — источник, t — сток, $A_1 = \{(u, I_j), (u, T_{jk}), (I_j, w_i), (T_{jk}, w_i), (w_i, t), j = \overline{1, p}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, n}\}$ — множество ориентированных дуг. Дуги (I_j, w_i) и (T_{jk}, w_i) вводятся в сеть G_1 только в том случае, когда $I_j \subseteq [b_i; f_i]$, т.е. если работа w_i может выполняться в интервале I_j. Пропускные способности $U(x, y)$ дуг $(x, y) \in A_1$ сети G_1 указаны в табл. 1. Их физический смысл следующий. Величина $a_j S_j \delta_j$ равна максимальному объему работы процессоров, доступному в интервале I_j; $b_{jk} R_{jk}$ — максимальный объем работы, который может быть выполнен в интервале I_j с помощью невозобновляемого ресурса k-го типа; $b_{jk} r^0_{ijk}$ — максимальный объем работы, который может быть предоставлен заданию w_i в интервале I_j с помощью невозобновляемого ресурса k-го типа. Величины q^0_{ij} и Q_i были определены выше.

Лемма 1. Для существования допустимого распределения ресурсов необходимо и достаточно существование потока g в сети G_1, для которого

$$g(w_i, t) = Q_i \tag{2.1}$$

при всех $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. 1. Необходимость. Предположим, что существует допустимое распределение ресурсов (как было отмечено выше, оно определяет допустимое расписание), которое

Таблица 1. Пропускные способности дуг сети G_1

Дуга	Пропускная способность
(u, I_j)	$a_j S_j \delta_j$
(u, T_{jk})	$b_{jk} R_{jk}$
(I_j, w_i)	q^0_{ij}
(T_{jk}, w_i)	$b_{jk} r^0_{ijk}$
(w_i, t)	Q_i

для каждого задания w_i и каждого интервала I_j указывает, какие процессоры и в какие моменты времени его выполняют и объем невозобновляемого ресурса каждого типа, выделенный ему. Пусть q_{ij} – это суммарный объем работы процессоров при выполнении задания w_i в интервале I_j, а r_{ijk} – величина невозобновляемого ресурса k-го типа, выделенная заданию w_i в интервале I_j. Определим поток g в сети G_1 следующим образом:

$$g(I_j, w_i) = q_{ij}, \quad g(T_{jk}, w_i) = b_{jk} r_{ijk}, \tag{2.2}$$

$$g(u, I_j) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}, \quad g(u, T_{jk}) = \sum_{i=1}^{n} b_{jk} r_{ijk}, \tag{2.3}$$

$$g(w_i, t) = \sum_{j=1}^{p} (q_{ij} + \sum_{k=1}^{K} b_{jk} r_{ijk}). \tag{2.4}$$

Тогда в силу (2.2)–(2.4) в каждом внутреннем узле сети G_1 (т.е. в узлах I_j, T_{jk} и w_i, $j = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, n}$) не нарушается условие сохранения потока. Кроме того, в силу неравенств (1.1)–(1.4) потоки по дугам (u, I_j), (u, T_{jk}), (I_j, w_i) и (T_{jk}, w_i) не превосходят их пропускных способностей. И наконец, поскольку при допустимом распределении ресурсов каждая работа выполняется полностью, то в силу (2.4) $g(w_i, t) = Q_i$ при всех $i = \overline{1, n}$, т.е. верно условие (2.1) леммы 1.

2. Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим теперь, что в сети G_1 существует поток g, для которого справедливы равенства (2.1) при всех $i = \overline{1, n}$. Определим $q_{ij} = g(I_j, w_i)$. Тогда верно неравенство (1.1), а в силу сохранения потока в узле I_j выполнены соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = g(u, I_j) \le a_j S_j \delta_j,$$

т.е. имеет место (1.2). А поскольку величина $a_j S_j \delta_j$ равна максимальному объему работы процессоров в интервале I_j, то с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму упаковки [3], работы w_i, $i = \overline{1, n}$, могут быть распределены по процессорам в интервале I_j. При работе этого алгоритма задания назначаются на процессоры поочередно, начиная с первого. К выбранному заданию w_i процессоры приписываются последовательно, начиная с первого не полностью загруженного, до тех пор, пока не будет обеспечен объем работы, равный q_{ij}.

Далее, определим $r_{ijk} = g(T_{jk}, w_i) / b_{jk}$. Тогда справедливо неравенство (1.3), а в силу сохранения потока в узле T_{jk} выполнены соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ijk} = \left(\sum_{i=1}^{n} g(T_{jk}, w_i) \right) / b_{jk} = g(u, T_{jk}) / b_{jk} \le b_{jk} R_{jk} / b_{jk} = R_{jk}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = \overline{1, n},$$

т.е. верно (1.4).

Кроме того, в силу (2.1) и сохранения потока в узле w_i суммарный объем работы по реализации задания w_i равен

$$\sum_{j=1}^{p} \left(q_{ij} + \sum_{k=1}^{K} b_{jk} r_{ijk} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(g(I_j, w_i) + \sum_{k=1}^{K} g(T_{jk}, w_i) \right) = g(w_i, t) = Q_i,$$

т.е. работа w_i выполняется полностью. И наконец, структура сети G_1 такова, что каждое задание исполняется в своем директивном интервале, т.е. допустимое распределение ресурсов существует. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает следующий алгоритм решения задачи существования и нахождения допустимого распределения ресурсов.

1. Построить сеть G_1.

2. Найти в сети G_1 максимальный поток g (например, с помощью полиномиального алгоритма А. Карзанова [12]).

Таблица 2. Значения параметров дуг сети G_2

Дуга	L	U	C
(u, I_j)	0	$a_j S_j \delta_j$	0
(u, T_{jk})	0	$b_{jk} R_{jk}$	0
(I_j, w_i)	0	q_{ij}^0	c_j
(T_{jk}, w_i)	0	$b_{jk} r_{ijk}^0$	d_{jk}
(w_i, t)	Q_i	Q_i	0

3. Если для найденного потока g верны равенства (2.1) при всех $i = \overline{1, n}$, то допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание для W) существует и может быть построено в каждом интервале I_j, $j = \overline{1, p}$, с помощью леммы 1. Если же условие (2.1) не выполнено хотя бы при одном i, $1 \le i \le n$, то допустимого распределения ресурсов (и допустимого расписания) не существует.

Оценим вычислительную сложность каждого шага алгоритма. Шаг 1 – $O((Kp + n)^2)$, шаг 2 – $O((Kp + n)^3)$, шаг 3 – $O(p(n + K))$. Таким образом, вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет $O((Kp + n)^3)$, т.е. алгоритм является полиномиальным.

3. Нахождение допустимого распределения ресурсов минимальной стоимости. Для нахождения допустимого распределения ресурсов минимальной стоимости построим сеть G_2 с такой же структурой, как у сети G_1, и припишем каждой дуге $(x, y) \in A_1$ три параметра: нижнюю границу $L(x, y)$ потока по дуге (x, y), верхнюю границу $U(x, y)$ потока по дуге (x, y) и стоимость $C(x, y)$ единицы потока по дуге (x, y). Значения этих параметров приведены в табл. 2. В этом случае стоимость потока в сети G_2 определяется стоимостью потока по дугам (I_j, w_i) и (T_{jk}, w_i), $j = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому поток минимальной стоимости в сети G_2 определяет распределение ресурсов минимальной стоимости, а структура сети и параметры дуг (w_i, t), $i = \overline{1, n}$, таковы, что это распределение является допустимым. Таким образом, с учетом леммы 1 справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. 1. Для существования допустимого распределения ресурсов необходимо и достаточно существование потока в сети G_2.

2. Поток минимальной стоимости в сети G_2 определяет распределение ресурсов минимальной стоимости.

Из леммы 2 вытекает следующий алгоритм решения поставленной задачи.

1. Построить сеть G_2.

2. Найти в сети G_2 поток g минимальной стоимости (например, с помощью псевдополиномиального алгоритма дефекта [12]).

3. Если поток g в сети G_2 существует, то допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание для W) существует, может быть построено в каждом интервале I_j, $j = \overline{1, p}$, с помощью леммы 1 и оно будет допустимым распределением ресурсов минимальной стоимости. Если же потока в сети G_2 не существует, то допустимого распределения ресурсов (и допустимого расписания) не существует.

Оценим вычислительную сложность каждого шага алгоритма. Шаг 1 – $O((Kp + n)^2)$, шаг 2 – $O((Kpn)^2 U)$, где U – это максимальная верхняя граница потока по дугам сети G_2, шаг 3 – $O(p(n + K))$. Таким образом, вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет $O((Kpn)^2 U)$, т.е. алгоритм является псевдополиномиальным.

Рассмотрим теперь задачу построения допустимого распределения ресурсов, при котором минимален суммарный объем работы, выполняемой возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами в заданной совокупности интервалов I_j. Для этого определенным образом корректируются некоторые параметры дуг сети G_2 и определяется поток минимальной стоимости, с помощью которого можно построить искомое распределение ресурсов, как это указано в лемме 1.

Пусть $J \subseteq \{1, 2, \ldots, p\}$ и требуется минимизировать суммарный объем работы, выполняемый процессорами в интервалах I_j, $j \in J$. Для этого стоимости единицы потока по дугам сети G_2 определим следующим образом: положим $C(u, I_j) = 1$ при всех $j \in J$, $C(x, y) = 0$ для всех остальных дуг сети G_2. Значения нижних и верхних границ потока по дугам сети G_2 оставим без изменения. Тогда поток минимальной стоимости в сети G_2 будет обладать таким свойством, что суммарный поток по дугам (u, I_j), $j \in J$, будет минимальным. Следовательно, минимальным будет и суммарный объем работы, выполняемый процессорами в интервалах I_j, $j \in J$.

Рассмотрим частный случай, когда $J = \{j_0\}$ (т.е. множество J состоит из одного элемента j_0), все процессоры в интервале I_{j_0} идентичные. Тогда поток минимальной стоимости в сети G_2 будет обладать таким свойством, что поток по дуге (u, I_{j_0}) будет минимальным. Следовательно, после применения алгоритма упаковки число процессоров, выполняющих задания в интервале I_{j_0}, также будет минимальным.

Пусть теперь требуется минимизировать суммарный объем работы, выполняемый невозобновляемыми ресурсами k_0-го типа, $1 \le k_0 \le K$, в интервалах I_j, $j \in J$. Для этого стоимости единицы потока по дугам сети G_2 определим следующим образом: положим $C(u, T_{jk_0}) = 1$ при всех $j \in J$, $C(x, y) = 0$ для всех остальных дуг сети G_2. Значения нижних и верхних границ потока по дугам сети G_2 оставим без изменения. Тогда поток минимальной стоимости в сети G_2 будет обладать таким свойством, что суммарный поток по дугам (u, T_{jk_0}), $j \in J$, будет минимальным. Следовательно, минимальным будет и суммарный объем работы, выполняемый невозобновляемыми ресурсами k_0-го типа в интервалах I_j, $j \in J$.

Аналогично решается задача построения допустимого распределения ресурсов, при котором суммарный объем работы, выполняемой возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами определенных типов в заданной совокупности интервалов I_j, минимален.

4. Составление допустимого расписания для смешанного набора работ. Предполагается, что помимо основных работ W в каждом интервале I_j требуется выполнить совокупность дополнительных заданий $V_j = \{v_{j1}, v_{j2,} \ldots, v_{jH_j}\}$, $j = \overline{1, p}$. Каждая работа v_{jh_j} реализуется с помощью какого-либо одного процессора без прерываний и переключений, не может использовать невозобновляемые ресурсы, а ее объем составляет P_{jh_j}, $h_j = \overline{1, H_j}$, $j = \overline{1, p}$. Как и в разд. 2, будем искать допустимое распределение ресурсов. Задачи подобного рода возникают при испытаниях сложных технических объектов (самолеты, ядерные реакторы), когда помимо основных работ W имеются более срочные дополнительные задания V_j, $j = \overline{1, p}$, не допускающие прерываний и переключений. Отметим, что эта задача является NP-трудной даже в том случае, когда множество заданий W пусто [13]. Сначала построим допустимое расписание для работ W. Затем в каждом интервале I_j задания V_j распределяются по свободным и не полностью занятым процессорам с использованием, например, точного метода “ветвей и границ” [6], точного псевдополиномиального алгоритма или приближенного “жадного” алгоритма [13].

Расписание для W будем строить таким образом, чтобы для выполнения заданий V_j оставался максимальный объем процессорного времени. Построим сеть G_3, имеющую такую же структуру, как и сеть G_1, а значения параметров дуг приведены в табл. 3.

Поскольку стоимость единицы потока по дугам (u, T_{jk}) равна минус единице, а для всех остальных дуг – нулю, то стоимость потока в сети G_3 определяется только величиной потока по дугам (u, T_{jk}), $j = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, K}$. Следовательно, для потока минимальной стоимости в сети G_3 суммарный поток по дугам (u, T_{jk}), $j = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, K}$, будет максимальным. Это обеспечит максимальное использование невозобновляемого ресурса при выполнении работ W, и, следовательно, максимальный объем процессорного времени для реализации заданий V_j. Расписание работ W

Таблица 3. Значения параметров дуг сети G_3

Дуга	L	U	C
(u, I_j)	0	$a_j S_j \delta_j$	0
(u, T_{jk})	0	$b_{jk} R_{jk}$	−1
(I_j, w_i)	0	q_{ij}^0	0
(T_{jk}, w_i)	0	$b_{jk} r_{ijk}^0$	0
(w_i, t)	Q_i	Q_i	0

строится с помощью найденного потока минимальной стоимости в сети G_3 так, как это было описано в разд. 2.

5. Минимизация числа процессоров при жестких временных ограничениях. Допустим, что помимо процессоров (т.е. возобновляемых ресурсов) других ресурсов в системе нет, причем все процессоры идентичные. Каждая работа w_i, $i = \overline{1,n}$, полностью выполняется каким-либо одним процессором в течение всего директивного интервала $[b_i, f_i]$. После этого процессор может переключиться на другую работу w_j. Время, требуемое процессору для такого переключения, равно σ_{ij}. Каждый процессор одновременно может исполнять не более одной работы. Требуется определить минимальное число процессоров для реализации всей совокупности работ W.

Для решения этой задачи построим потоковую сеть G_4 (рис. 2), где $V_4 = \{u, w_1, \ldots, w_n, z_1, \ldots, z_n, t\}$ — множество узлов, u — источник, t — сток, узлы w_i и z_i соответствуют заданию w_i; $A_4 = \{(u, w_i), (z_i, t), (w_i, z_j), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}$ — множество ориентированных дуг. Дуга (w_i, z_j) вводится в сеть G_4 в том случае, когда $f_i + \sigma_{ij} \le b_j$, т.е. если процессор после выполнения задания w_i успевает переключиться на работу w_j. Пропускные способности всех дуг полагаются равными единице.

Л е м м а 3. Минимальное число процессоров в сформулированной задаче равно $n - F$, где F — величина максимального потока в сети G_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что поскольку пропускные способности всех дуг сети G_4 целочисленные, то, используя алгоритм А. Карзанова [12] для нахождения максимального потока, последний также будет целочисленным. Следовательно, величина потока по каждой дуге (w_i, z_j) равна 0 или 1. Все задания заведомо могут быть выполнены с помощью n процессоров. А каждой единице потока в сети G_4 соответствует некоторая дуга (w_i, z_j), поток по которой также равен 1. Это означает возможность выполнить задания w_i и w_j одним и тем же процессором, что

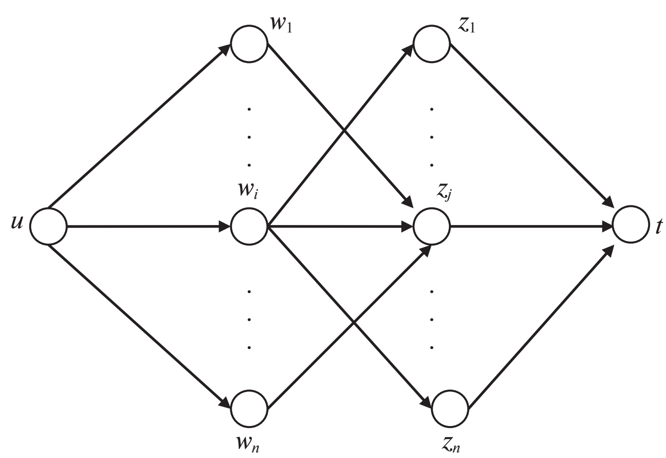

Рис. 2. Потоковая сеть G_4

уменьшает требуемое число процессоров на единицу. Поэтому если величина максимального потока равна F, то минимальное число процессоров, с помощью которых можно выполнить задания W, равно $n - F$.

Заключение. Исследована задача распределения неоднородной и изменяющейся во времени совокупности возобновляемых и невозобновляемых ресурсов при построении допустимого многопроцессорного расписания. Рассмотрены случаи: (1) все процессоры идентичные; (2) процессоры могут различаться своей производительностью; (3) все работы допускают прерывания и переключения с одного процессора на другой; (4) часть работ допускает прерывания и переключения, а часть не допускает. Разработаны алгоритмы минимизации стоимости допустимого распределения ресурсов и числа процессоров при различных ограничениях на параметры задачи. Используемая методика основана на применении теории потоков в сетях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
2. *Давыдов Э.Г.* Исследование операций. М.: Высш. шк., 1990.
3. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
4. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007.
5. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. М.: МФТИ, 2008.
6. *Мищенко А.В., Сушков Б.Г.* Минимизация времени выполнения работ, представленных сетевой моделью, при нефиксированных параметрах сети. М.: ВЦ АН СССР, 1980. С. 3–16.
7. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 2. С. 134–146.
8. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 1994. V. 32. № 6. P. 1–11.
9. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 2 // J. Computer and Systems Sciences International. 1995. V. 33. № 3. P. 107–116.
10. *Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I.* Minimax Estimations of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. V. 8. № 2. P. 216–226.
11. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
12. *Корте Б., Фиген Й.* Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: МЦНМО, 2015.
13. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.