

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.977.58:539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИЕМ
УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНЫХ СИЛ¹

© 2021 г. А. А. Гавриков^а, Г. В. Костин^{а,*}

^а ИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: kostin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 17.02.2021 г.

После доработки 02.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Работа посвящена вопросам управляемости и оптимизации колебательных движений динамических систем с распределенными параметрами. Исследуются продольные перемещения тонкого прямолинейного упругого стержня. На основе предложенного авторами метода интегриродифференциальных соотношений дана обобщенная формулировка начально-краевой задачи, решение которой ищется относительно кинематической и динамической переменных в энергетическом пространстве Соболева. Для случая однородного стержня, управляемого с помощью приложенных с обоих концов внешних сил, определено критическое время, за которое система может быть приведена в состояние покоя и показана невозможность для произвольных начальных условий приведения точек стержня в нулевое состояние. Для фиксированных интервалов времени, больших критического, ставится задача оптимального приведения системы в нулевое состояние. При этом минимизируемым функционалом является средняя механическая энергия, запасаемая стержнем во время движения. Показано, что с помощью представления Даламбера (в виде бегущих волн) с учетом свойств обобщенного решения поставленная двумерная по пространству и времени задача управления сводится к классической одномерной квадратичной вариационной задаче с фиксированными концами, которая задается относительно двух неизвестных функций Даламбера. С помощью методов вариационного исчисления оптимальное управление и соответствующие движения стержня найдены в явном виде. Исследована зависимость средней энергии, запасаемой в системе, от времени управления.

DOI: 10.31857/S0002338821050097

Введение. Важным направлением в теории управления является развитие методов оптимизации движения систем с распределенными параметрами. В случае выпуклых функционалов математическое обоснование для задач оптимального управления динамическими системами, определяемыми линейными дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП), заложено во многом научной школой Лионса [1]. Вопросы управляемости систем с УЧП гиперболического типа рассматривались и другими авторами [2, 3]. Вводный обзор теории управления распределенными колебаниями дан в [4]. Управляемые колебания в сетевых моделях исследуются, в частности, в [5–7]. Актуальность достоверного математического моделирования динамических систем с распределенными параметрами ускорило развитие новых подходов к решению прямых и обратных задач механики.

Можно указать на два важных направления изучения задач оптимального управления для распределенных процессов. Для первого из них в иностранной литературе распространен термин “поздняя дискретизация” (late lumping). Согласно этому подходу, законы оптимального управления строятся непосредственно для исходной динамической системы, описываемой УЧП. Только на последнем этапе управляющие функции и само решение могут аппроксимироваться с применением подходящего конечномерного пространства. В этом случае оптимизация может опираться, например, на спектральную теорию линейных операторов [8, 9]. Иногда для относительно простых систем используют [10] метод разделения переменных и декомпозиции на основе метода Фурье, что позволяет находить квазиоптимальные ограниченные воздействия, за

¹ Работа выполнена по теме государственного задания (номер государственной регистрации АААА-А20-120011690138-6) и частично финансово поддержана РФФИ (гранты № 19-01-00173 и 21-51-12004).

конечное время приводящие систему в заданное состояние. Альтернативный метод в решении задач оптимального управления с УЧП связан с методом выбора [11]. В общем случае даже для несложных систем, описывающих, скажем, движения замкнутой струны, получение управления в явном виде и последующее доказательство его оптимальности невозможно без привлечения развитых математических подходов [12]. Важный вопрос в обратных задачах динамики для систем с распределенными параметрами — это управляемость и, как следствие, возможность или невозможность точного приведения изучаемой системы в заданное состояние за конечное время и дальнейшего удержания в этом состоянии с помощью ограниченных воздействий [13, 14].

Второе развитое направление в изучении динамики и управления распределенными системами называется “ранней дискретизацией” (early lumping) и широко используется для построения численных решений. В этом случае начально-краевая задача уже на начальном этапе дискретизируется и сводится к системе либо алгебраических, либо обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этой цели развиваются метод конечных элементов (МКЭ), методы конечного объема и конечных разностей [16, 15]. В случае МКЭ алгоритмы решения могут основываться на методе коллокации, методе Бубнова–Галеркина [18], подходе Петрова–Галеркина [19], методе наименьших квадратов [20] и т.д. В этом ряду численных подходов при рассмотрении задач управления динамикой системы спектральный анализ обеспечивает важные преимущества [9] в случае, когда собственные функции системы находятся в явном виде. Для неоднородных систем могут применяться численные методы нахождения собственных функций [21].

На основе метода интегродифференциальных соотношений (МИДС) для описания и оптимизации колебаний в упругих и вязкоупругих системах предложены и проанализированы различные вариационные и проекционные формулировки задач оптимального управления [22]. Одна из этих формулировок используется в работе для определения необходимых свойств гладкости (непрерывности) решения. Эффективный алгоритм численного построения решения в задачах оптимального управления линейной упругости на основе метода Ритца и МКЭ был предложен в [23] и развит в [24] для случая продольных движений однородных и неоднородных упругих стержней с различными типами краевых условий.

В циклах статей авторов [25, 26] и др. исследуются задачи управления, близкие по постановке к рассмотренной далее задаче. В отличие от упомянутых публикаций, в этой статье предложена оригинальная обобщенная формулировка начально-краевой задачи, основанная на минимизации функционала невязки уравнений состояния. В этой постановке решение ищется в более широком классе и не требуются явные предположения о гладкости следов решения на границах пространственно-временной области (начальных, терминальных и краевых условий). Другой особенностью данного исследования является сама задача оптимального управления при условии минимизации энергетического функционала, который естественным образом соответствует требованиям к гладкости решения обобщенной задачи. Еще одна отличительная черта этой работы — нахождение оптимального решения как вариации бегущих волн в представлении Даламбера, что позволяет представить управление и состояние системы в единой компактной форме на всей области определения искомых функций. Проблема гладкости следов решения часто встречается при постановке обобщенной задачи в энергетических пространствах [27, 28]. В настоящей работе она решена за счет введения так называемой динамической функции (потенциала), дополнительной к функции перемещений точек упругой системы, и определения решения как пары неизвестных: упругих перемещений и динамического потенциала.

В этой работе, по сравнению с [24], хотя и рассматривается случай однородного упругого стержня с достаточно простыми краевыми условиями второго рода, получено точное оптимальное решение для важного случая минимизации средней механической энергии системы. На основе предложенного метода декомпозиции решения и представления Даламбера задачу управления удалось свести к классической вариационной задаче с фиксированными концами и построить в явном виде как оптимальный закон программного управления, так и соответствующие движения точек стержня. Более того, как показывают наши исследования, данная методика распространяется и на более широкий класс целевых функционалов, а также может быть обобщена на случай ограниченных управляющих воздействий. В статье обсуждается важный с теоретической точки зрения факт существования критического значения времени управления, за которое система может быть приведена в состояние покоя, но в общем случае не может прийти в нулевое состояние. Как будет показано ниже, это обуславливает как строго монотонное убывание средней энергии стержня при увеличении времени управления, так и стремление значения механической энергии к бесконечности при приближении времени управления к критической величине.

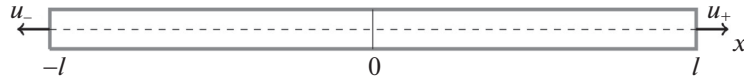


Рис. 1. Стержень под воздействием управляющих сил $u_{\pm}(t)$

1. Постановка начально-краевой задачи. Рассмотрим продольные движения тонкого прямолинейного упругого стержня, схематически изображенного на рис. 1. Уравнение движения выражается через функцию $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую на пространственно-временной области $\Omega = (0, T) \times (-\ell, \ell)$, согласно [30], уравнением

$$\rho(x)v_{tt}(t, x) - (\kappa(x)v_x(t, x))_x = 0, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.1)$$

Здесь T – время окончания рассматриваемого процесса, ℓ – полудлина стержня, нижние индексы t и x обозначают соответственно частные производные по времени и пространству, $\rho : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ – линейная плотность, а $\kappa : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ – продольная жесткость стержня.

В классической постановке, рассмотренной в работе, начальные условия накладываются на положения и скорости точек стержня в момент времени $t = 0$:

$$v(0, x) = v_0(x), \quad v_t(0, x) = \dot{v}_0(x), \quad x \in [-\ell, \ell], \quad (1.2)$$

где v_0 и \dot{v}_0 – известные достаточно гладкие функции [30, 31]. На концах $x = \pm\ell$ заданы нормальные силы в поперечном сечении как неизвестные входные управляющие воздействия $u_{\pm}(t)$ в форме

$$\kappa(-\ell)v_x(t, -\ell) = u_-(t), \quad \kappa(\ell)v_x(t, \ell) = u_+(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Для того чтобы перейти, согласно МИДС [22], к обобщенной формулировке начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), введем на пространственно-временной области Ω неизвестные функции линейной плотности импульса $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ и нормальной силы в поперечном сечении $s : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Закон изменения импульса (второй закон Ньютона) выразится через эти переменные как

$$p_t(t, x) = s_x(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.4)$$

Потребуется также два закона состояния, которые связывают плотность импульса p и скорости точек стержня v_t , а также нормальную силу s с продольной деформацией v_x :

$$p(t, x) = \rho(x)v_t(t, x), \quad s(t, x) = \kappa(x)v_x(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}. \quad (1.5)$$

Замыкают систему начально-краевые условия, заданные на $t \in [0, T]$, $x \in [-\ell, \ell]$ и выраженные через переменные v , p , s как

$$\begin{aligned} v(0, x) &= v_0(x), & p(0, x) &= p_0(x), & p_0(x) &= \rho(x)\dot{v}_0(x); \\ s(t, -\ell) &= u_-(t), & s(t, \ell) &= u_+(t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для необходимого нам в дальнейшем упрощения представления системы с распределенными параметрами введем специальную функцию $r : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, назовем ее динамическим “потенциалом” или динамической переменной в отличие от кинематической переменной v . Эта новая переменная заменяет функции импульса и силы:

$$p = r_x, \quad s = r_t. \quad (1.7)$$

Непосредственной подстановкой (1.7) в (1.4) можно показать, что при такой замене второй закон Ньютона выполняется тождественно:

$$p_t(t, x) \equiv s_x(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.8)$$

Также необходимо переписать в новых терминах уравнения состояния (1.5), заданные на $(t, x) \in \bar{\Omega}$ как

$$r_t(t, x) - \kappa(x)v_x(t, x) = 0, \quad r_x(t, x) - \rho(x)v_t(t, x) = 0. \quad (1.9)$$

Через кинематическую и динамическую переменные выражаются и начально-краевые соотношения (1.6), а именно

$$\begin{aligned} v(0, x) = v_0(x), \quad r(0, x) = r_0(x), \quad r_0(x) = \int_{-\ell}^x p_0(\chi) d\chi + c_0; \\ r(t, \pm\ell) = U_{\pm}(t), \quad U_{\pm}(t) = \int_0^t u_{\pm}(\tau) d\tau + r_0(\pm\ell). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отметим важную деталь такого представления состояния системы: динамическая переменная r определена с точностью до произвольной константы c_0 , значение которой не влияет на форму движения упругого тела. В (1.10) вводятся две новые функции времени U_{\pm} как интегралы от функций управления u_{\pm} . Две константы управления $r_0(\pm\ell)$ выбираются так, чтобы обеспечить необходимую, как будет показано далее, непрерывность решения обобщенной задачи. Другими словами, эти константы обеспечивают совместность начальных и краевых условий при $t = 0$ и $x = \pm\ell$.

2. Вариационная формулировка задачи. Согласно МИДС, локальные законы состояния (1.9), выраженные в УЧП и требующие C^2 -гладкости решения [31], заменяются одним интегральным соотношением, который, как показано в [22], может быть сведен к минимизации энергетического функционала:

$$\begin{aligned} \Phi[v_*, r_*] = \min_{v, r} \Phi[v, r] = 0, \\ \Phi = \frac{1}{T} \int_{\Omega} \frac{g^2 + h^2}{4} d\Omega, \quad g = \sqrt{\kappa} v_x - \frac{r_t}{\sqrt{\kappa}}, \quad h = \sqrt{\rho} v_t - \frac{r_x}{\sqrt{\rho}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

при выполнении существенных ограничений

$$v(0, x) = v_0(x), \quad r(0, x) = r_0(x), \quad r(t, \pm\ell) = U_{\pm}(t) \quad (2.2)$$

и фиксированных управляющих функциях U_{\pm} . В (2.1) $d\Omega = dt dx$ для выбранной системы координат t и x . Там же введены вспомогательные функции состояния g, h , квадраты которых имеют размерность линейной плотности энергии. При этом сам функционал Φ имеет размерность энергии и его значение определяет близость аппроксимации к точному решению v_*, r_* , на котором достигается абсолютный минимум Φ по переменным v и r .

Если обратить внимание на структуру подынтегрального выражения, то можно отметить, что в него входят квадраты частных производных по t и x неизвестных v и r . Это означает, что с учетом достаточной гладкости и отделимости от нуля параметров ρ, κ эти производные должны существовать в обобщенном смысле как функции, интегрируемые в квадратах. Из этого факта следует [29], что решение v_*, r_* вариационной задачи (2.1), (2.2) в случае его существования принадлежит гильбертову пространству H^1 :

$$(v, r) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (v, r) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2). \quad (2.3)$$

Таким образом, введение функционала (2.1) позволяет существенно ослабить требования к гладкости решения, оставаясь при этом, как будет показано далее, в рамках непрерывных функций при выбранных достаточно гладких начальных и терминальных условиях, что имеет важное значение для конструктивного решения задачи управления.

3. Задача оптимального управления. В дальнейшем рассматривается частный случай однородного упругого стержня, механические параметры которого $\rho(x) = \text{const}$ и $\kappa(x) = \text{const}$ не зависят от пространственной координаты. В этом случае для упрощения описания системы лучше перейти к безразмерным переменным:

$$v = \ell v^*, \quad r = \kappa \tau_* r^*, \quad x = \ell x^*, \quad t = \tau_0 t^*, \quad \tau_*^2 = \frac{\ell^2 \rho}{\kappa}. \quad (3.1)$$

Далее индекс $*$ опускается.

В безразмерных переменных

$$g = v_x - r_t, \quad h = v_t - r_x, \quad (3.2)$$

следовательно, обобщенная начально-краевая задача (2.1), (2.2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{T} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0, \quad \varphi = \frac{1}{4}(v_x - r_t)^2 + \frac{1}{4}(v_t - r_x)^2, \\ v(0, x) &= v_0(x), \quad r(0, x) = r_0(x), \quad r(t, \pm 1) = U_{\pm}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ставится следующая задача оптимального управления. Найти такие функции U_{\pm}^* , которые задаются на фиксированном интервале времени $t \in [0, T]$, минимизируют с учетом ограничений (3.3) среднюю запасенную механическую энергию стержня, определяемую как

$$\begin{aligned} E[U_+^*, U_-^*] &= \min_{U_+, U_- \in C[0, T]} E[U_+, U_-], \\ E &= \frac{1}{T} \int_{\Omega} e d\Omega, \quad e = \frac{1}{4}(v_t^2 + r_x^2 + v_x^2 + r_t^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

и приводят систему в терминальное состояние

$$v(T, x) = v_1, \quad r(T, x) = r_1 + p_1 x. \quad (3.5)$$

Решение (3.3)–(3.5) – это вектор-функция (v, r) , поэтому в выражение для энергии E , которая является частью квадрата нормы упорядоченной пары (v, r) в $H^1(\Omega)$, входят все частные производные v и r .

В (3.4) введена функция линейной плотности энергии $e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Условия существования допустимого управления $(U_-(t), U_+(t))$, приводящего систему в терминальное состояние (3.5), изучаются ниже. Обсудим сами терминальные условия.

Первое, оптимальное движение зависит от константы r_1 лишь неявно, влияя на значение целевого функционала E . При этом механический смысл терминальных условий не меняется при изменении величины r_1 . Поэтому этот параметр необходимо рассматривать как свободный параметр оптимизации.

Второе, если константа p_1 не равна нулю ($p_1 \neq 0$), а v_1 – произвольна, это означает, что стержень приводится в состояние движения как жесткого целого без упругих колебаний. Если при этом терминальные значения плотности импульса p_1 и положения v_1 не важны для задачи управления, возникают еще два свободных параметра оптимизации.

Третье, если зафиксировать нулевой импульс ($p_1 = 0$), а положение v_1 задать или оставить свободным параметром, то целью управления является приведение системы в состояние покоя с нулевой внутренней энергией.

Наконец последний случай, когда $p_1 = 0$ и $v_1 = 0$, означает, что целью процесса управления является приведение механической системы в нулевое состояние. Этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем.

Следует еще раз подчеркнуть, что в зависимости от того, какие из трех терминальных констант зафиксированы или свободны, будут изменяться значение функционала, оптимальное управление $(U_-^*(t), U_+^*(t))$ и соответствующее решение $(v^*(t, x), r^*(t, x))$.

Отметим сходство структуры двух функционалов цены E и состояния Φ , последний из которых представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{T} \int_{\Omega} \varphi d\Omega, \\ \varphi &= \frac{1}{4}(v_x^2 - 2v_x r_t + r_t^2 + v_t^2 - 2v_t r_x + r_x^2) = e - \frac{v_t r_x + v_x r_t}{2}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где функция $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ представляет собой квадрат плотности невязки уравнений состояния

$$g(t, x) = 0, \quad h(t, x) = 0, \quad (3.7)$$

в которых переменные g и h определены в (2.1).

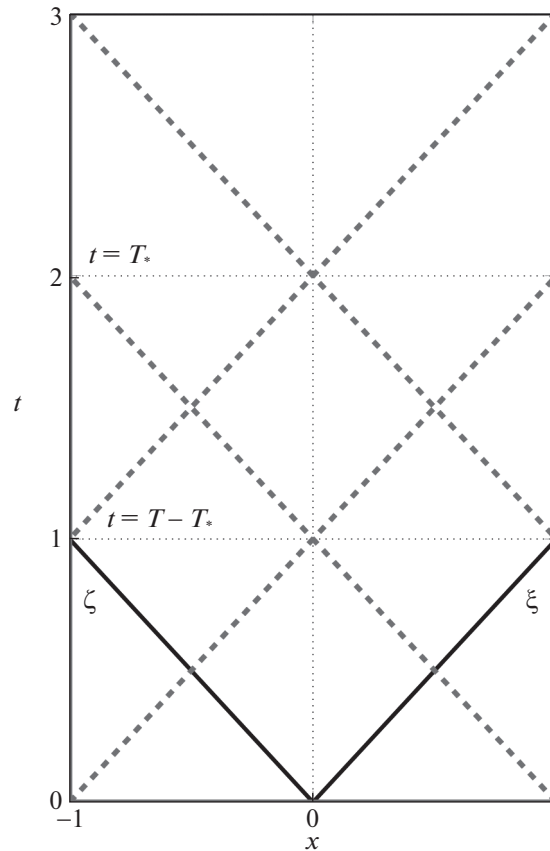


Рис. 2. Пространственно-временная область определения решения $\Omega = (0, T) \times (-1, 1)$ при $T > T_*$

4. Решение прямой задачи динамики. Будем искать решение (v, r) задачи (3.3) в представлении Даламбера (в виде бегущих волн). Для этого вводятся две одномерные функции

$$w_{\pm} : (-1, T + 1) \rightarrow \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

такие, что

$$\begin{aligned} v(t, x) &= w_+(t + x) + w_-(t - x), \\ r(t, x) &= w_+(t + x) - w_-(t - x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Чтобы представить геометрически, как две одномерные функции определяют решение на области Ω , обратимся к рис. 2. Непосредственной подстановкой показывается, что функционал состояния Φ равен нулю при выполнении соотношений (4.2), так как $r_x = v_t, r_t = v_x$.

Для большей компактности окончательных результатов вводятся новые координаты, связанные с характеристическими линиями решения, т.е. отрезками в области Ω , на которых не меняются значения функций $w_{\pm}(t \pm x)$. Новые и старые координаты связаны друг с другом следующими линейными преобразованиями:

$$\xi = t + x, \quad \zeta = t - x; \quad t = \frac{\xi + \zeta}{2}, \quad x = \frac{\xi - \zeta}{2}. \tag{4.3}$$

В новых координатах решение примет вид

$$v(\xi, \zeta) = w_+(\xi) + w_-(\zeta), \quad r(\xi, \zeta) = w_+(\xi) - w_-(\zeta). \tag{4.4}$$

Можно непосредственно убедиться, что переменные $\xi(t, x)$ и $\zeta(t, x)$ пробегает в области $\Omega = (0, T) \times (-1, 1)$ все допустимые значения интервала $(-1, T + 1)$.

Краевые условия $r(t, \pm 1) = U_{\pm}(t)$ из (3.3) выполняются, если выбрать интегралы управления в виде

$$U_{-}(t) = w_{+}(t-1) - w_{-}(t+1), \quad U_{+}(t) = w_{+}(t+1) - w_{-}(t-1). \quad (4.5)$$

Начальные и терминальные условия частично определяют функции w_{\pm} . Из начальных условий в (3.3) и из (4.3), (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} w_{-}(\zeta) &= \frac{1}{2}v_0(-\zeta) - \frac{1}{2}r_0(-\zeta), \quad \zeta \in (-1, 1); \\ w_{+}(\xi) &= \frac{1}{2}v_0(\xi) + \frac{1}{2}r_0(\xi), \quad \xi \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

В свою очередь терминальные условия из (3.3) задают функции Даламбера w_{\pm} на другом подынтервале области определения:

$$\begin{aligned} w_{-}(\zeta) &= \frac{1}{2}(p_1(\zeta - T) + v_1 - r_1), \quad \zeta \in (T-1, T+1); \\ w_{+}(\xi) &= \frac{1}{2}(p_1(\xi - T) + v_1 + r_1), \quad \xi \in (T-1, T+1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Важно отметить, что, как видно из (4.3), (4.4), функции w_{\pm} свободны на открытых интервалах области определения $\zeta \in (1, T-1)$ и $\xi \in (1, T-1)$.

Из (4.6), (4.7) следует, что для полной совместности краевых условий при $t = 0$ и $t = T$ достаточно, чтобы суммарное время управления было больше критического: $T > T_* = 2$. Этот временной интервал необходим, чтобы сигнал управления от одного конца стержня достиг другого конца, отразился и вернулся обратно. При $T \leq T_*$ начальные и терминальные условия пересекаются и в общем случае произвольных v_0, r_0 и p_1, v_1, r_1 несовместны.

При выборе некоторых допустимых значений функций $w_{+}(\xi), w_{-}(\zeta)$ на участке $(1, T-1)$ полностью доопределяются, согласно (4.5), допустимые внешние воздействия U_{\pm} при $t \in [0, T]$, а также решение (v, r) в области Ω в соответствии с (4.2) или (4.4) в зависимости от выбора координат.

Таким образом, получено решение прямой задачи динамики (3.3), (3.5) при некотором допустимом законе управления. Произвол в выборе этого закона используется далее для минимизации целевого функционала средней энергии E .

5. Декомпозиция средней энергии. Обращая внимание на структуру функции плотности энергии e , определенной в (3.4), и замечая, что $r_t = v_x$ и $r_x = v_t$ на решении (4.4), получим

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_x^2 \Rightarrow \\ e &= \frac{1}{2}(w'_+(\xi) + w'_-(\zeta))^2 + \frac{1}{2}(w'_+(\xi) - w'_-(\zeta))^2 \Rightarrow \\ e &= (w'_+(\xi))^2 + (w'_-(\zeta))^2 = e_+(\xi) + e_-(\zeta), \\ e_+(\xi) &= (w'_+(\xi))^2, \quad e_-(\zeta) = (w'_-(\zeta))^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь штрихом обозначены производные функций w_{\pm} по своим аргументам. В итоге, слагаемые e_{\pm} в функции плотности энергии e зависят от одного из двух аргументов. Так как функционал средней энергии E строится из функции e через линейное преобразование (интегрированием), то и он в свою очередь распадается на две независимые части:

$$E = \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_+(\xi) d\Omega + \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_-(\zeta) d\Omega = E_+ + E_-. \quad (5.2)$$

Здесь величина E_+ определена, если задана функция $w_+(\xi)$, а значение E_- известно, если заданы значения $w_-(\zeta)$.

Подставляя выражение для e_+ из (5.1) в E_+ , получаем

$$E_+ = \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_+(\xi) d\Omega = \frac{1}{T} \int_{-1}^{T+1} w_+^{\prime 2}(\xi) \Delta \zeta(\xi) d\xi, \tag{5.3}$$

$$\Delta \zeta = \zeta_{\max} - \zeta_{\min} = \begin{cases} 2\xi + 2, & \xi \in [-1, 1), \\ 4, & \xi \in [1, T - 1], \\ 2(1 + T - \xi), & \xi \in (T - 1, T + 1], \end{cases}$$

где кусочно-линейная функция $\Delta \zeta$ возникает в результате первичного интегрирования по координате ζ :

$$\int_{\Omega} e_+(\xi) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-\xi}^{2+\xi} e_+(\xi) d\zeta d\xi + \int_1^{T-1} \int_{-2+\xi}^{2+\xi} e_+(\xi) d\zeta d\xi + \int_{T-1}^{T+1} \int_{T-1-2+\xi}^{T+1-2T-\xi} e_+(\xi) d\zeta d\xi. \tag{5.4}$$

Ее значения проверяются геометрически (см. рис. 2), если учесть разбиение области Ω угловыми характеристиками $\xi = 1, \xi = T - 1, \zeta = 1, \zeta = T - 1$ (штриховые линии) и определить длины отрезков интегрирования по переменной ζ .

Принимая во внимание заданные участки функций w_{\pm} , согласно (4.6) и (4.7), приходим к формуле для одной из частей декомпозированной средней энергии:

$$E_+ = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 (w_0'(\xi) + r_0'(\xi))^2 (\xi + 1) d\xi + \frac{2p_1^2}{T} + \frac{4}{T} \int_1^{T-1} w_+^{\prime 2}(\xi) d\xi. \tag{5.5}$$

Для второго слагаемого E_- аналогично выводим

$$E_- = \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_-(\zeta) d\Omega = \frac{1}{T} \int_{-1}^{T+1} w_-^{\prime 2}(\zeta) \Delta \xi(\zeta) d\zeta, \tag{5.6}$$

$$\Delta \xi = \xi_{\max} - \xi_{\min} = \begin{cases} 2\zeta + 2, & \zeta \in [-1, 1), \\ 4, & \zeta \in [1, T - 1], \\ 2(1 + T - \zeta), & \zeta \in (T - 1, T + 1]. \end{cases}$$

Подобным же образом получаем симметрично относительно замены аргумента ξ на ζ и функции w_+ на w_- окончательное выражение для второго слагаемого целевого функционала:

$$E_- = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 (v_0'(-\zeta) - r_0'(-\zeta))^2 (\zeta + 1) d\zeta + \frac{2p_1^2}{T} + \frac{4}{T} \int_1^{T-1} w_-^{\prime 2}(\zeta) d\zeta. \tag{5.7}$$

Как видно, оба слагаемых E_{\pm} зависят соответственно от начальных, терминальных и свободных значений функций Даламбера w_{\pm} .

Согласно последней строке (5.1), после декомпозиции в выражение для средней энергии (5.2) входят квадраты первых производных по ξ и ζ функций бегущих волн $w_+(\xi)$ и $w_-(\zeta)$. Существование интегралов E_{\pm} означает, что должны существовать обобщенные производные этих функций, т.е.

$$w_{\pm} \in H^1(-1, T + 1). \tag{5.8}$$

Как следует из вида зависимости w_{\pm} от начальных функций v_0, r_0 , требование принадлежности w_{\pm} пространству Соболева H^1 влечет за собой ограничение на начальные условия, а именно $v_0, r_0 \in H^1(-1, 1)$. Вложенность одномерных функций из гильбертова пространства H^1 в пространство непрерывных функций

$$H^1(-1, T + 1) \subset C(-1, T + 1), \tag{5.9}$$

согласно лемме Соболева [32], означает, что функции w_+ или w_- могут быть продолжены на замыкание $[-1, T + 1]$ и их значения, заданные на различных участках, должны непрерывно стыковаться в точках $\xi = 1, \xi = T - 1$ и $\zeta = 1, \zeta = T - 1$ соответственно.

6. Вывод оптимального решения. Из вида функционалов E_{\pm} следует, что для их независимой минимизации необходимо проварьировать свободные значения функции $w_+(\xi)$ или $w_-(\zeta)$ на интервалах аргумента $\zeta \in (1, T-1)$ или $\xi \in (1, T-1)$. Таким образом возникает классическая задача вариационного исчисления [33]. При этом надо учесть краевые условия, вытекающие из свойства непрерывности w_{\pm} в точках $\xi, \zeta = 1, T-1$:

$$\begin{aligned} w_+(1) &= v_0(1) + r_0(1), & w_+(T-1) &= v_1 + r_1 - p_1, \\ w_-(1) &= v_0(-1) - r_0(-1), & w_-(T-1) &= v_1 - r_1 - p_1. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Необходимые условия существования минимума независимых функционалов E_{\pm} — это соответствующие линейные уравнения Эйлера второго порядка:

$$\begin{aligned} w_+''(\xi) &= 0, & \xi &\in (1, T-1); \\ w_-''(\zeta) &= 0, & \zeta &\in (1, T-1). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Эта система интегрируема, и общее решение выражается как линейный многочлен соответствующих аргументов. Из граничных условий (6.1) получаем выражения для экстремалей

$$\begin{aligned} w_+(\xi) &= (v_0(1) + r_0(1)) \frac{T-1-\xi}{T-2} + (v_1 + r_1 - p_1) \frac{\xi-1}{T-2}, \\ w_-(\zeta) &= (v_0(-1) - r_0(-1)) \frac{T-1-\zeta}{T-2} + (v_1 - r_1 - p_1) \frac{\zeta-1}{T-2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

на участках $\xi \in (1, T-1)$ и $\zeta \in (1, T-1)$ соответственно. Из линейности системы уравнений следуют достаточные условия оптимальности и единственность решения.

Итак, все требуемые оптимальные выражения получаются следующим образом. Сперва восстанавливаются значения функций $w_+(\xi)$ и $w_-(\zeta)$ на областях определения $\xi \in [-1, T+1]$, $\zeta \in [-1, T+1]$ с использованием выражений (4.6) и (4.7) и (6.3). Затем с помощью формул (4.5) находятся интегралы управления $U_-^*(t)$ и $U_+^*(t)$ на временном интервале $t \in [0, T]$. Производные этих функций дают значения оптимальных внешних сил $u_-^*(t) = (U_-^*)'(t)$ и $u_+^*(t) = (U_+^*)'(t)$. По формулам (4.2) получаем оптимальные кинематическую (v^*) и динамическую (r^*) функции состояния системы и по (1.7) восстанавливаем плотность импульса $p^* = r_x^*$ и нормальные силы $s^* = r_t^*$.

7. Допустимое решение на критическом интервале времени. Рассмотрим особый случай, когда время управления равно критическому значению $T = T_* = 2$. Область определения задается как $\Omega_* = (0, 2) \times (-1, 1)$. Как видно из рис. 3, варьированные области исчезают и решение (4.2) терминальной задачи (3.3) определяется однозначно, с точностью до терминальных констант v_1, r_1, p_1 из (3.5).

Функции Даламбера выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} w_+(\xi) &= \frac{v_0(\xi) + r_0(\xi)}{2}, & \xi &\leq 1; \\ w_-(\zeta) &= \frac{v_0(-\zeta) - r_0(-\zeta)}{2}, & \zeta &\leq 1; \\ w_+(\xi) &= \frac{p_1(\xi - 2) + v_1 + r_1}{2}, & \xi &\geq 1; \\ w_-(\zeta) &= \frac{p_1(\zeta - 2) + v_1 - r_1}{2}, & \zeta &\geq 1. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Точкой пересечения областей определения этих функций являются значения координат характеристик $\xi = 1, \zeta = 1$ с заданными в них условиями непрерывности:

$$w_+(1+0) = w_+(1-0), \quad w_-(1+0) = w_-(1-0). \quad (7.2)$$

Из (7.2) получаем, что

$$\begin{aligned} v_0(1) + r_0(1) &= v_1 + r_1 - p_1, \\ v_0(-1) - r_0(-1) &= v_1 - r_1 - p_1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

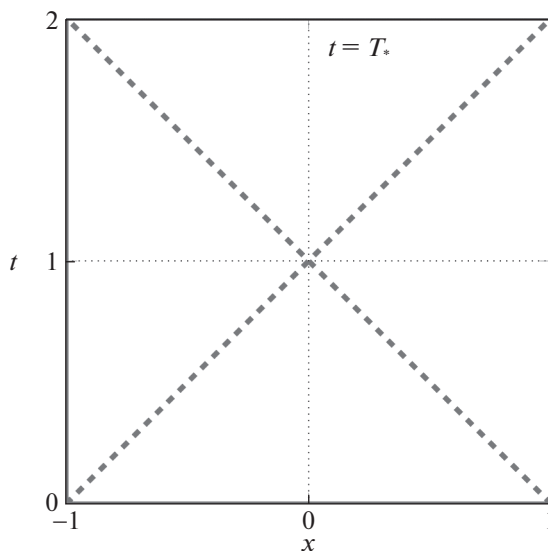


Рис. 3. Пространственно-временная область определения решения $\Omega = (0, T) \times (-1, 1)$ при $T = T_*$

Из этих условий следует два вывода. Во-первых, терминальный параметр r_1 динамической функции определен однозначно из системы (7.3) и равен $r_1 = \frac{1}{2}r_0(1) + \frac{1}{2}r_0(-1)$. Во-вторых, так как $v_1 - p_1 = \frac{1}{2}v_0(1) + \frac{1}{2}v_0(-1)$, нельзя привести систему в нулевое состояние за критическое время T_* , если $v_0(1) \neq -v_0(-1)$. Отметим также, что оптимальный по энергии параметр $p_1 = 0$. Поэтому всегда более выгодное с энергетической точки зрения движение – это приведение системы в терминальное состояние покоя.

Теперь рассмотрим конкретный пример допустимого движения для начальных условий и терминальных параметров:

$$v_0(x) = \cos(3x) + \sin(3x), \quad r_0(x) = p_1 = 0. \tag{7.4}$$

Из (7.3) и (7.4) следует, что $r_1 = 0$, а $v_1 = \frac{1}{2}v_0(1) + \frac{1}{2}v_0(-1) = \cos(3) \approx -0.99$. На рис. 4 показан график функции перемещений $v(t, x)$. Как видно, в конечный момент времени система прибывает в состояние покоя (ненулевое положение). Вследствие постановки вариационной задачи найденная функция v непрерывна, что следует из явных линейных выражений (4.2) для v в терминах w_{\pm} и соответствует гипотезе непрерывности упругой среды.

Значения динамической функции (потенциала) $r(t, x)$ представлены на рис. 5. Эти функции равны нулю при $t = 0, t = T$ для выбранных начальных и терминальных r_0 и r_1 . Функция r , согласно (4.2), является линейной комбинацией непрерывных функций w_{\pm} , т.е. сама непрерывна, что наглядно иллюстрируется ее графиком. При этом порожденные ею механические поля импульса и силы могут иметь разрывы значений. Это подтверждается наличием угловых точек на линиях характеристик $\xi = 1, \zeta = 1$, обозначенных на рис. 3 пунктирными линиями. Угловые точки распространяются по этим характеристикам и на графике функции v (см. рис. 4).

Допустимые интегралы управления $U_-(t)$ и $U_+(t)$ показаны на рис. 6 штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Их тригонометрический характер определен выбранными для примера начальными условиями.

Последние графики на рис. 7 показывают вид исходных управляющих воздействий – внешних сил $u_-(t)$ и $u_+(t)$, которые представляют собой производные от функций $U_-(t)$ и $U_+(t)$. По построению $U_-(0) = U_+(0) = 0$, в то же время на управления $u_-(t)$ и $u_+(t)$ не накладываются какие-либо начальные или терминальные условия.

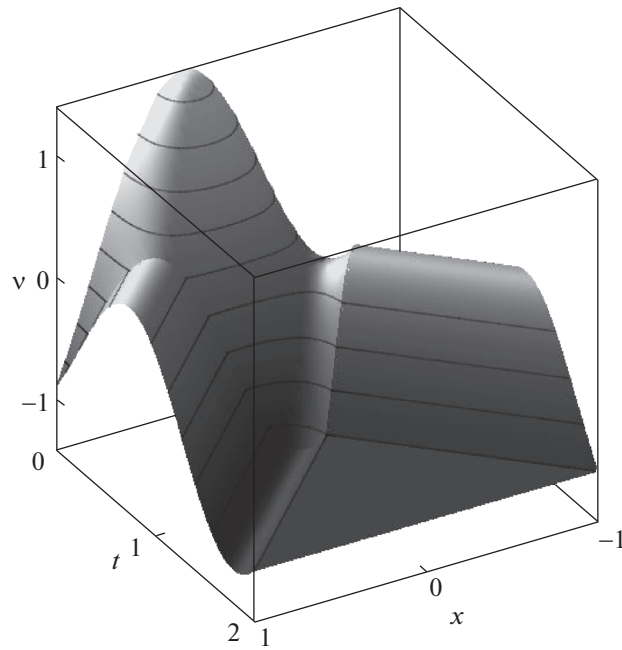


Рис. 4. Распределение в пространстве и времени перемещений точек стержня $v(t, x)$ (кинематическая функция) при $T = T_*$

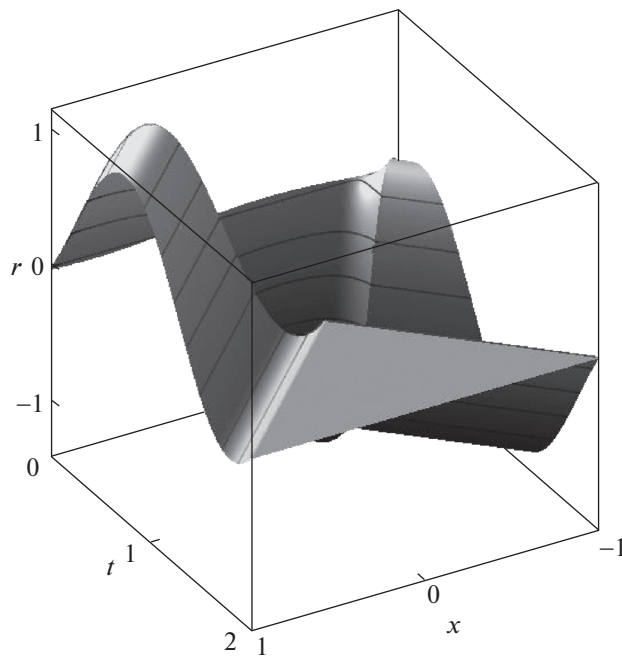


Рис. 5. Распределение в пространстве и времени потенциала $r(t, x)$ (динамическая функция) при $T = T_*$

8. Пример оптимального движения. Для наглядности рассмотрим пример оптимального управления продольными перемещениями упругого стержня при времени управления $T = 3 > T_*$. В качестве начальных значений опять выберем функции из (7.4). Оптимальное распределение перемещений показано на рис. 8. Как видно из графика, к конечному моменту времени стержень приходит в нулевое состояние как по энергии, так и по положению. Видны угловые точки, расположенные по характеристикам, которые изображены на рис. 2 штриховыми линиями.

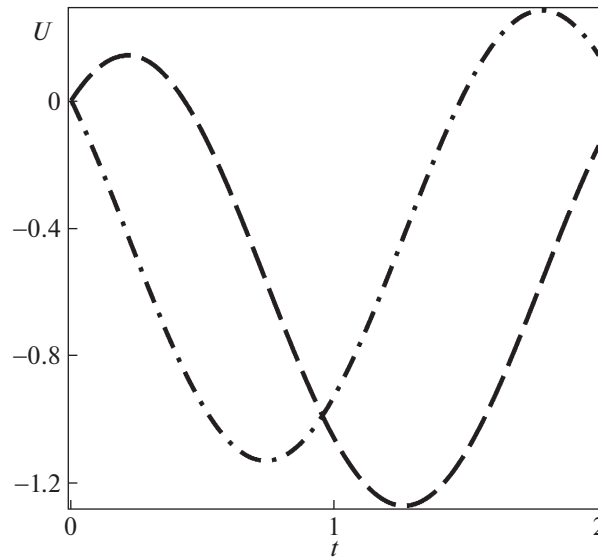


Рис. 6. Допустимые интегралы управления $U_-(t)$ (штриховая кривая) и $U_+(t)$ (штрихпунктирная кривая) при $T = T_*$

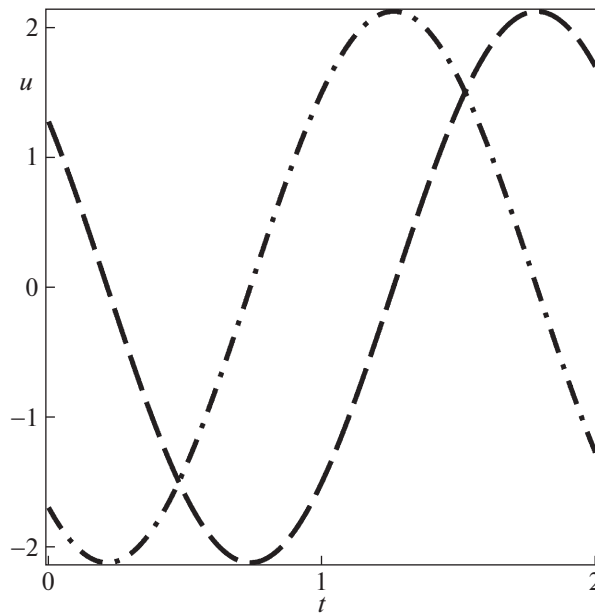


Рис. 7. Допустимые функции управления $u_-(t)$ (штриховая кривая) и $u_+(t)$ (штрихпунктирная кривая) при $T = T_*$

На рис. 9 показаны оптимальные значения динамического потенциала $r(t, x)$. Снова оптимальным терминальным значением для r является нулевое распределение. Напомним, что значение этой функции дается с точностью до начальной константы c_0 , введенной в (1.10). В данном примере ее значение равно нулю. Следует подчеркнуть, что хотя в классической постановке движение полностью определяется функцией перемещения, в обобщенной вариационной постановке, используемой в этой работе, динамическая функция r — неотъемлемая часть решения, которая обязательно представляет вторую позицию в упорядоченной паре (v, r) .

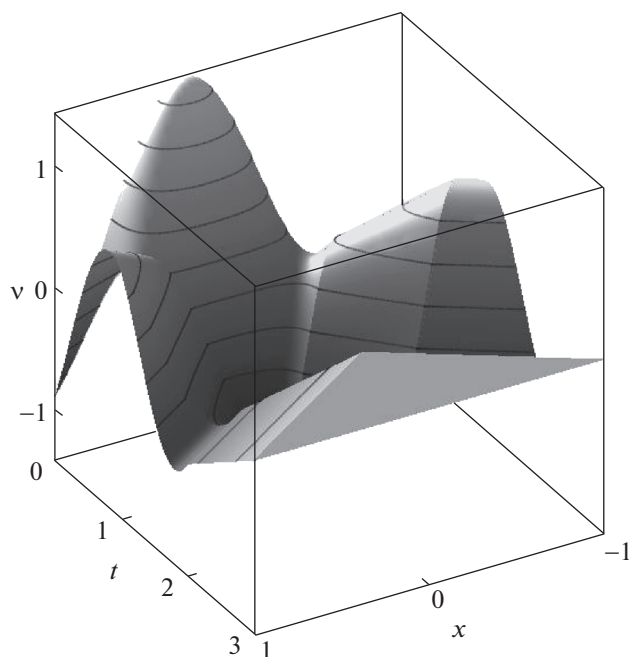


Рис. 8. Оптимальное распределение в пространстве и времени перемещений точек стержня $v(t, x)$ (кинематическая функция) при $T > T_*$

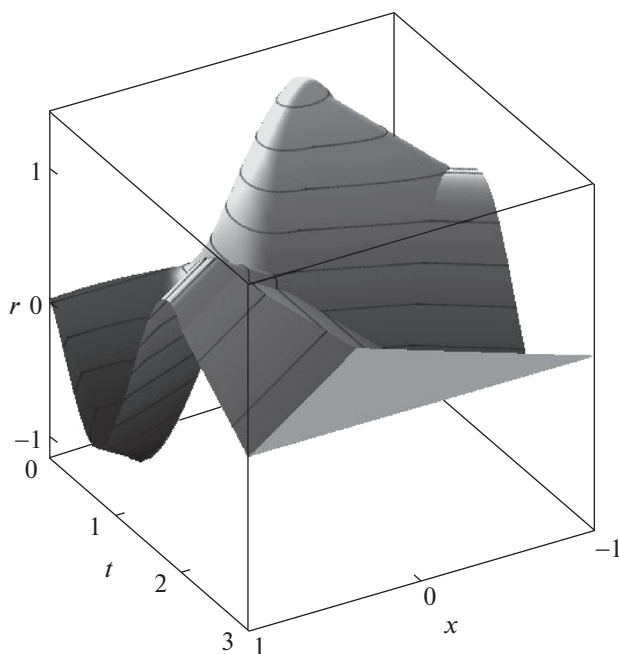


Рис. 9. Оптимальное распределение в пространстве и времени потенциала $r(t, x)$ (динамическая функция) при $T > T_*$

Оптимальные интегралы управления $U_-(t)$ и $U_+(t)$ изображены на рис. 10 штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Это непрерывные функции с нулевыми начальными значениями, что следует из линейности соотношений (4.5). На последнем участке при $t \in [2, 3]$ закон оптимального управления имеет линейный характер, что обусловлено видом оптимальных

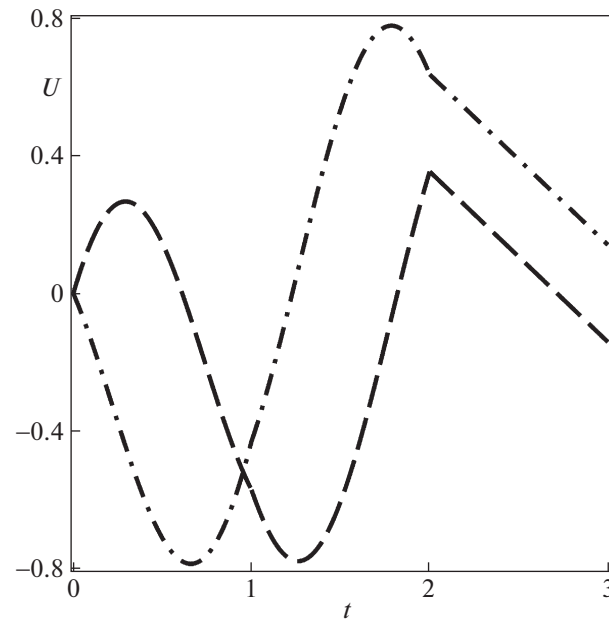


Рис. 10. Оптимальные интегралы управления $U_-(t)$ (штриховая кривая) и $U_+(t)$ (штрихпунктирная кривая) при $T > T_*$

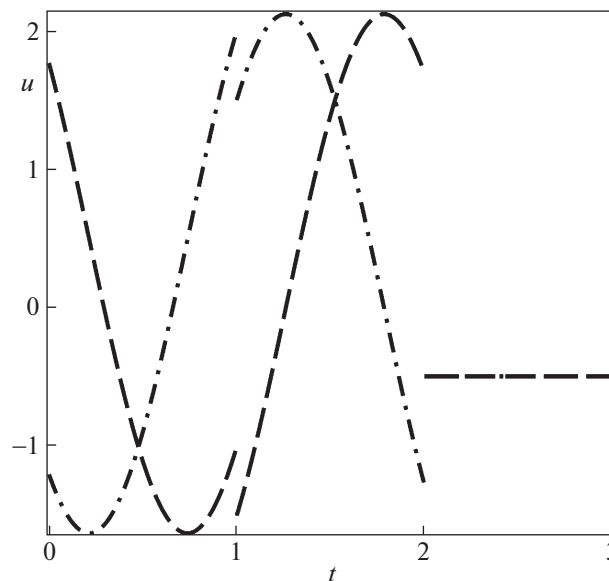


Рис. 11. Оптимальные функции управления $u_-(t)$ (штриховая кривая) и $u_+(t)$ (штрихпунктирная кривая) при $T > T_*$

функций Даламбера (бегущих волн) как линейных многочленов. На остальных участках $t \in [0, 1]$ и $t \in [1, 2]$ интегралы управления представляют собой линейные комбинации тригонометрических и полиномиальных функций, согласно выбранным начальным условиям (7.4).

Завершает этот пункт рисунок 11, на котором показаны оптимальные функции управления $u_-(t)$ и $u_+(t)$ штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. На трех равных по длине интервалах времени $t \in (0, 1)$, $t \in (1, 2)$, $t \in (2, 3)$ управления задаются аналитическими функциями,

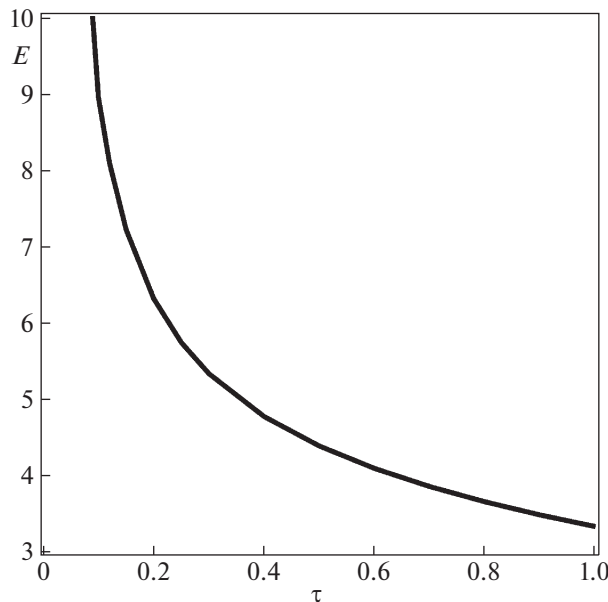


Рис. 12. Оптимальные значения средней механической энергии E в зависимости от превышения критического времени управления $\tau = T - T_*$

причем на третьем этапе оба управления равны одной константе $u_-(t) = u_+(t) = \frac{1}{2} \cos(3)$. В точках $t = 1$ и $t = 2$ видны разрывы функций управления.

9. Анализ поведения средней энергии. Изучим поведение оптимального значения средней механической энергии системы при изменении времени управления T . Для удобства представления вводится вспомогательный параметр $\tau = T - T_*$, который определяет расстояние между временем управления и его критическим значением.

На рис. 12 представлены результаты расчетов оптимальных значений функционала E для различных значений параметра $\tau \in (0, 1]$ при фиксированных начальных условиях (7.4). Как видно из графика, значение целевого функционала убывает строго монотонно и, как показывают проведенные расчеты, стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. С другой стороны, значение средней энергии стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow 0$, т.е. при $T \rightarrow T_*$. Это косвенно подтверждает невозможность с энергетической точки зрения приведения при выбранных начальных условиях упругого стержня в нулевое состояние для заданного класса гладкости обобщенного решения при $T = T_*$, как это и было показано в разд. 7.

Заключение. В работе исследованы продольные перемещения тонкого прямолинейного упругого стержня. Дана обобщенная формулировка начально-краевой задачи, решение которой ищется относительно кинематической и динамической переменных в энергетическом пространстве. Для случая однородного стержня, управляемого с помощью приложенных с обоих концов внешних сил, определено критическое время, за которое система может быть приведена в состояние покоя и в общем случае показана невозможность для произвольных начальных условий приведения точек стержня в нулевое состояние. Для фиксированных интервалов времени, больших критического, решена задача оптимального управления о приведении системы в нулевое состояние. Целевой функционал – средняя механическая энергия, запасаемая стержнем во время движения. Поставленная двумерная по пространству и времени задача управления сведена к классической одномерной квадратичной вариационной задаче с фиксированными концами. Оптимальное управление и соответствующие движения стержня найдены в явном виде как комбинации бегущих волн. Исследована зависимость средней энергии, запасаемой в системе, от времени управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1971.
2. *Butkovsky A.G.* Distributed Control Systems. N.Y.: Elsevier, 1969.
3. *Ahmed N.U., Teo K.L.* Optimal Control of Distributed Parameter Systems. N.Y.: North Holland, 1981.
4. *Krabs W.* Optimal Control of Undamped Linear Vibrations. Lemgo: Heldermann, 1995.
5. *Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G.* Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures. Boston: Birkhäuser, 1984.
6. *Leugering G.* A Domain Decomposition of Optimal Control Problems for Dynamic Networks of Elastic Strings // Computational Optimization and Applications. 2000. V. 16. P. 5–29.
7. *Gugat M.* Optimal Control of Networked Hyperbolic Systems: Evaluation of Derivatives // Advanced Modelling and Optimization. 2005. V. 7. P. 9–37.
8. *Banks S.P.* State-Space and Frequency-Domain Methods in the Control of Distributed Parameter Systems. London: Peregrinus, 1983.
9. *Curtain R.F., Zwart H.J.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
10. *Chernousko F.L.* Control of Elastic Systems by Bounded Distributed Forces // Applied Mathematics and Computation. 1996. V. 78. P. 103–110.
11. *Gerdtz M., Greif G., Pesch H.J.* Numerical Optimal Control of the Wave Equation: Optimal Boundary Control of a String to Rest in Finite Time // Mathematics and Computers in Simulation. 2008. V. 79. № 4. P. 1020–1032.
12. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Асимптотически оптимальное управление простейшей распределенной системой // ДАН. 2017. Т. 473. № 5. С. 525–528.
13. *Романов И.В., Шамаев А.С.* О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием // АИТ. 2013. Вып. 11. С. 38–50.
14. *Романов И.В., Шамаев А.С.* О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТИСУ. 2019. № 1. С. 109–116.
15. *Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N.* Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. Chichester: Wiley, 2004.
16. *Balas M.J.* Finite-Dimensional Control of Distributed Parameter Systems by Galerkin Approximation of Infinite Dimensional Controllers // J. Mathematical Analysis and Applications. 1986. V. 114. P. 17–36.
17. *Christofides P.D.* Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes. Boston: Birkhäuser, 2001.
18. *Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.* Element-Free Galerkin Method // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. 1994. V. 37. P. 229–256.
19. *Atluri S.N., Zhu T.* A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics // Computational Mechanics. 1998. V. 22. P. 117–127.
20. *Bochev P.B., Gunzburger M.D.* Least-Squares Finite Element Methods. N.Y.: Springer, 2009.
21. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А.* Управление одномерными движениями гибридных колебательных систем стержневого типа // Изв. РАН. ТИСУ. 2018. № 3. С. 5–14.
22. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
23. *Kostin G.V.* Modelling and Optimization of Controlled Longitudinal Motions for an Elastic Rod Based on the Ritz Method // 14th Intern. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). Moscow: IEEE, 2018. P. 1–4.
<https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408369>.
24. *Kostin G.* Verified Solution to Optimal Control Problems of Elastic Rod Motion Based on the Ritz Method // Acta Cybernetica. 2020. V. 24. P. 393–408.
<https://doi.org/10.14232/actacyb.24.3.2020.7>
25. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. № 6. С. 89–114.
26. *Моисеев Е.И., Фролов А.А.* Граничное управление процессом колебаний струны при условии сопротивления среды на правом конце за время, меньшее критического // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 555–566.
27. *Gugat M.* Optimal Boundary Control and Boundary Stabilization of Hyperbolic Systems. Berlin: Springer, 2015, 148 p.

28. *Gugat M., Trélat E., Zuazua E.* Optimal Neumann Control for the 1D Wave Equation: Finite Horizon, Infinite Horizon, Boundary Tracking Terms and the Turnpike Property // *Systems & Control Letters*. 2016. V. 90. P. 61–70.
29. *Schwab C.* P- and hp- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics. *Numerical Mathematics and Scientific Computation*. N.Y.: Oxford University Press, 1998.
30. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
31. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
32. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.
33. *Giaquinta M., Hildebrandt S.* *Calculus of Variations*. I. Berlin: Springer-Verlag, 2004.