
**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 629.7

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ
НА УПРАВЛЯЮЩИЕ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ**

© 2021 г. М. В. Левский

*Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова – филиал Государственного
космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, Королев, Россия*

e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 12.02.2020 г.

После доработки 02.08.2020 г.

Принята к публикации 26.10.2020 г.

Аналитическим путем решается задача оптимального управления переориентацией космического аппарата из произвольного начального углового положения в заданное конечное угловое положение при наличии эллипсоидальных ограничений на фазовые переменные и управляющие функции (ограничены угловая скорость и силовой момент). Минимизируется время разворота. Рассматривается случай, когда существенным ограничением является максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Построение оптимального управления разворотом основано на кватернионных переменных и моделях. Показано, что во время оптимального разворота момент сил параллелен прямой, неподвижной в инерциальном пространстве, и при вращении космического аппарата направление кинетического момента постоянно относительно инерциальной системы координат. Выписаны аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимальной программы управления. Даны расчетные формулы для определения временных характеристик маневра и вычисления длительности разгона и торможения. Для осесимметричного космического аппарата поставленная задача оптимального управления решается до конца – получены зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета ключевых параметров закона управления. Приводятся численный пример и результаты математического моделирования движения космического аппарата при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338821030100

Введение. В статье решается задача приведения космического аппарата (КА) в положение заданной ориентации оптимальным образом. Пространственное движение КА относительно центра масс задается кватернионом [1]. Построение оптимальной программы вращения основано на кватернионных моделях, принципе максимума и универсальных переменных [2].

Вопросы управляемого движения твердого тела вокруг центра масс исследовались многими авторами неоднократно [1–25]. Наиболее детально задача оптимального управления угловым движением КА решена только для плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции [3] и пространственных вращений сферически-симметричного тела [1]. Для построения программы управления ориентацией КА используются различные методы и алгоритмы (в том числе на основе нечеткой логики [4], концепции обратных задач динамики [5, 6] и др.). Также хорошо известны проблемы оптимального управления движением КА [1, 2, 7–19], в том числе с неограниченным управлением [8, 9] (как с фиксированным [8], так и с нефиксированным временем окончания маневра [9]). Наиболее популярны задачи оптимального по времени разворота [1, 10–16, 18]. Несомненно, практический интерес представляют аналитические решения задачи оптимального разворота, так как они позволяют применять на борту КА готовые законы программно управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Некоторые решения получены для осесимметричных КА [14–17]. В частности, авторы работы [17] для решения краевой задачи принципа максимума сделали замену переменных и свели исходную задачу к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела. Для КА с произвольным рас-

пределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА аналитическое решение задачи пространственного разворота не найдено, кроме некоторых особых случаев (например, [1, 18]). Управление ориентацией КА с инерционными исполнительными органами (гиродинами) имеет свои особенности [11, 20–23], и для таких КА ранее был разработан запатентованный метод [26]. Проблема создания высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня.

Ниже исследуется динамическая задача оптимального по времени управления разворотом КА, когда ограничения накладываются как на управляющие функции, так и на фазовые переменные (ограничен не только силовой момент, но и угловая скорость). Найденное решение позволяет разворачивать КА с ограниченной кинетической энергией вращения за минимальное время, что крайне важно для практики космических полетов. Вопросы быстродействия маневров при экономном управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая в статье задача является практически важной.

1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления. Динамика углового движения КА как твердого тела описывается динамическими уравнениями Эйлера [3]:

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 = M_2, \quad J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3, \quad (1.1)$$

где J_i , $i = \overline{1,3}$, – главные центральные моменты инерции аппарата, M_i – проекции главного момента \mathbf{M} сил на главные центральные оси эллипсоида инерции аппарата, ω_i – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса \mathbf{E} , образованного главными центральными осями эллипсоида инерции аппарата.

Для описания пространственного движения КА воспользуемся математическим аппаратом кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона). Движение связанного базиса \mathbf{E} относительно опорного базиса \mathbf{I} будем задавать кватернионом Λ [1]. Для определенности базис \mathbf{I} считается инерциальным. Поэтому справедливо следующее кинематическое уравнение [1]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}, \quad (1.2)$$

где символ “ \circ ” – знак умножения кватернионов [1, с. 11–20]. Для удобства кватернион Λ , отражающий текущую ориентацию КА, полагаем нормированным $\|\Lambda\| = 1$ [1]. Здесь и далее операция кватернионного умножения на вектор понимается как умножение на кватернион с нулевой скалярной частью; в частности $\Lambda \circ \boldsymbol{\omega} = \Lambda \circ \Omega$, где Ω – кватернион, у которого $\text{sqal } \Omega = 0$, $\text{vect } \Omega = \boldsymbol{\omega}$.

Управление движением КА относительно центра масс осуществляется путем изменения момента сил \mathbf{M} . Предположим, что область возможных значений вектора \mathbf{M} подобна эллипсоиду инерции КА и описывается неравенством [14]

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2, \quad (1.3)$$

где $u_0 > 0$ – некоторая положительная величина, характеризующая мощность исполнительных органов системы ориентации КА. Рассматривается задача разворота с закрепленными левым и правым концами траектории движения, причем начальная и конечная угловые скорости полагаются равными нулю (относительно опорного базиса \mathbf{I}); такие задачи встречаются достаточно часто и имеют большое практическое значение. Для исследуемого управления разворотом из положения покоя в положение покоя граничные условия для динамической системы (1.1), (1.2) представляются в виде равенств:

$$\Lambda(0) = \Lambda_n, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = 0, \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_k, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0, \quad (1.5)$$

где T – время окончания поворотного маневра. Кватернионы Λ_n и Λ_k , задающие ориентацию связанных с КА осей в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию $\|\Lambda_n\| = \|\Lambda_k\| = 1$ (считается, что $\Lambda_k \neq \pm\Lambda_n$). Далее полагаем, что для допустимых движений кинетическая энергия вращения КА не должна превышать некоторой положительной величины $E_{\text{доп}}$. Т.е. управление ограничено условием

$$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 \leq 2E_{\text{доп}}, \quad (1.6)$$

где $E_{\text{доп}}$ – максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Задача оптимального управления пространственным разворотом КА формулируется следующим образом: необходи-

мо перевести КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) и ограничениями (1.3), (1.6) за минимальное время T . Оптимальное решение $\mathbf{M}(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций.

Сформулированная динамическая задача управления КА отличается от рассматриваемых ранее задач максимального быстродействия тем, что оптимальная траектория вращения определяется при наличии ограничений не только на управляющий момент, но и на фазовые переменные (на угловую скорость КА), в этом состоит ее принципиальное отличие. Поскольку время окончания маневра T не задано, разворот КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) всегда можно осуществить (решение $\mathbf{M}(t)$ задачи (1.1)–(1.6) существует для любых сочетаний значений $\Lambda_n, \Lambda_k, J_1, J_2, J_3, u_0$). Оптимальное управление пространственной переориентацией КА обладает важными полезными свойствами. В частности, для управления, ограниченного условием (1.6), остановка вращения (при необходимости прекращения маневра в критической или нештатной ситуации) занимает время, не превышающее заранее известной величины.

2. Решение задачи оптимального управления разворотом. Поставленная задача управления (1.1)–(1.6) есть динамическая задача оптимального разворота твердого тела [1], в которой управляющими переменными являются моменты $M_i, i = \overline{1,3}$. Будем решать указанную задачу, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина [27]. Пусть φ_i – сопряженные переменные, соответствующие переменным $\omega_i, i = \overline{1,3}$. Вместо сопряженных переменных ψ_j , соответствующих компонентам λ_j кватерниона $\Lambda, j = \overline{0,3}$, используем универсальные переменные $r_i, i = \overline{1,3}$ [2], поскольку критерий оптимальности не включает позиционных координат (элементов кватерниона ориентации Λ). Ограничение на фазовые переменные λ_j (и соответственно Λ) несущественно, так как оно выполняется при любых движениях КА вокруг центра масс; $\|\Lambda(t)\| = \text{const}$ в силу уравнения (1.2) [1]; мы полагали $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_n\| = 1$, поэтому $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$.

2.1. Функция Гамильтона и сопряженная система уравнений. Для динамической задачи оптимального управления (1.1)–(1.6) гамильтониан H равен [2]

$$H = -1 + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3,$$

где

$$r_1 = (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2; \quad r_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2; \\ r_3 = (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2.$$

Оптимальные функции r_i как компоненты вектора \mathbf{r} и вектор \mathbf{r} удовлетворяют уравнениям [2]

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \\ \dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2, \quad (2.1)$$

где символ \times обозначает операцию векторного произведения векторов. Уравнения для сопряженных функций φ_i имеют вид [27]

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \quad i = \overline{1,3},$$

или в развернутой форме:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_3\varphi_2(J_1 - J_3)/J_2 + \omega_2\varphi_3(J_2 - J_1)/J_3 - r_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_3\varphi_1(J_3 - J_2)/J_1 + \omega_1\varphi_3(J_2 - J_1)/J_3 - r_2, \\ \dot{\varphi}_3 = \omega_2\varphi_1(J_3 - J_2)/J_1 + \omega_1\varphi_2(J_1 - J_3)/J_2 - r_3. \quad (2.2)$$

Гамильтониан H составлен без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем говорилось выше. Вектор \mathbf{r} неподвижен относительно инерциального базиса \mathbf{I} и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (постоянство модуля $|\mathbf{r}|$ следует из свойств уравнений (2.1)). Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (2.1) определяется начальным Λ_n и конечным Λ_k положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 2]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_n \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n$$

(составляющие вектора \mathbf{c}_E – проекции вектора \mathbf{g} на оси инерциального базиса \mathbf{L}); $\tilde{\Lambda}$ – кватернион, сопряженный кватерниону Λ [1, с. 11–20]. Считается, что $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (в противном случае $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Направление вектора \mathbf{c}_E зависит от начального и конечного положений КА. Для того, чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце $\Lambda(T) = \Lambda_k$, необходимо определить вектор \mathbf{c}_E (или значение вектора \mathbf{g} в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений системы (1.2).

2.2. Условия максимума гамильтониана и структура оптимального решения. Определим условия максимума для функции H . Перепишем гамильтониан в следующем виде:

$$H = M_1\varphi_1/J_1 + M_2\varphi_2/J_2 + M_3\varphi_3/J_3 + H_{\text{inv}},$$

где H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i , $i = \overline{1,3}$. Введем вспомогательные переменные

$$g_i = \varphi_i/\sqrt{J_i}, \quad u_i = M_i/\sqrt{J_i}.$$

После замены переменных гамильтониан H принимает вид $H = g_1u_1 + g_2u_2 + g_3u_3 + H_{\text{inv}}$, а ограничение (1.3) запишется так: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq u_0^2$. Функция H максимальна, когда

$$u_i = u_0g_i/\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}.$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \neq 0$, максимум функции H для управлений $M_i(t)$ при ограничении (1.3) достигается, если

$$M_i = \frac{u_0\varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$E(t) = (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)/2.$$

В начале и в конце разворота ограничение (1.6) несущественно, оно переходит в строгое неравенство, так как угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю: $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Поэтому в интервалах движения, когда $E(t) < E_{\text{доп}}$, оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) с учетом требований (1.4), (1.5). Системе (1.1), (2.1)–(2.3) удовлетворяют функции φ_i , пропорциональные r_i . С учетом условий разворота $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ система уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) имеет единственное решение, в котором φ_i и угловые скорости ω_i связаны с переменными r_i выражениями

$$\varphi_i = a(t)r_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.4}$$

$$\omega_i = b(t)r_i/J_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.5}$$

где $a(t)$, $b(t)$ – скалярные функции времени. Подстановка равенств (2.4), (2.5) в систему (2.2) с учетом уравнений (1.1), (2.1), (2.3) превращает все три уравнения (2.2) в тождества, если $\dot{a} = -1$, что доказывает истинность решения (2.4), (2.5). Оптимальная функция $a(t)$ описывается зависимостью $a(t) = a(0) - t$. Значение $a(0)$ определяется временными параметрами разворота. Значение $\mathbf{r}(0)$ такое, чтобы в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.5) с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_n$ для траектории движения $\Lambda(t)$ выполнялось равенство $\Lambda(T) = \Lambda_k$.

Разворот КА совершается максимально быстро, если в каждый момент времени t угловая скорость максимальна, насколько это позволяют ограничения (1.3) и (1.6). Выше было показано, что если $E(t) < E_{\text{доп}}$, то оптимальным является управление (2.3) и $\mathbf{M} \neq 0$, если $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ (компонентами вектора $\boldsymbol{\varphi}$ являются сопряженные переменные φ_i , а u_i – компоненты вектора \mathbf{u}). При условии $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ область возможных значений \mathbf{u} сокращается из шара $|\mathbf{u}| \leq u_0$ до плоского круга, ограниченного окружностью, образованной пересечением сферы с плоскостью, перпендикулярной вектору, компонентами которого являются $\omega_i\sqrt{J_i}$ (так как для выполнения $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ должно быть $\dot{E} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$); знак умножения “ \cdot ” означает скалярное произведение векторов. Оптимальный момент \mathbf{M} обязан находиться внутри сечения эллипсоида (1.3)

плоскостью, перпендикулярной угловой скорости ω с тем, чтобы $\dot{E} = 0$, пока не наступит момент начала остановки вращения (а он существует, поскольку $\omega(T) = 0$).

На участке разгона (начиная с момента $t = 0$), когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и кинетическая энергия вращения $E(t)$ возрастает, оптимальным является $\mathbf{M} \neq 0$ и $a(t) > 0$, и как следствие

$$M_i = \frac{u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_3 \omega_3^2 + J_3 \omega_3^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (2.6)$$

(заметим, что управляющий момент (2.6) делает раскрутку максимально быстрой [24] и значение $E(t) = E_{\text{доп}}$ достигается за минимальное время при ограничении (1.3)). На участке торможения (в интервале времени слева от момента $t = T$), когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и кинетическая энергия вращения $E(t)$ уменьшается, оптимальным является $\mathbf{M} \neq 0$ и $a(t) < 0$, чтобы $\dot{E} < 0$, и поэтому

$$M_i = \frac{-u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_3 \omega_3^2 + J_3 \omega_3^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (2.7)$$

(слева от момента $t = T$ управляющий момент \mathbf{M} и кинетический момент \mathbf{L} имеют противоположные направления и длительность остановки вращения минимальна [24]). На участках разгона и торможения, когда $E(t) < E_{\text{доп}}$, кинетическая энергия вращения изменяется в соответствии с уравнением $\dot{E} = \pm u_0 \sqrt{2E}$ (“+” соответствует разгону, “–” – торможению). Поэтому для участка разгона $E(t) = u_0^2 t^2 / 2$, а для участка торможения $E(t) = u_0^2 (T - t)^2 / 2$. Поскольку в момент окончания разгона и в момент начала торможения кинетическая энергия одна и та же, то длительности разгона и торможения одинаковы и равны $\tau = t_p = \sqrt{2E_{\text{max}}} / u_0$, где $E_{\text{max}} = E(T/2)$ – максимальная энергия вращения.

В зависимости от условий разворота (сочетания значений Λ_n, Λ_k и J_1, J_2, J_3, u_0) в оптимальном движении из начального положения Λ_n в конечное положение Λ_k максимальная кинетическая энергия вращения может быть меньше $E_{\text{доп}}$, а может возникнуть необходимость вращения какое-то время с выполнением равенства $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$. Сформулируем условия, когда оптимальное управление исключает наличие моментов времени, в которые КА вращается с постоянной кинетической энергией. Для того, чтобы $\dot{E} \neq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, время разворота T должно быть меньше, чем $2\sqrt{2E_{\text{доп}}} / u_0$. Чтобы рассчитать время оптимального разворота T , воспользуемся понятием “функционал пути” [19]:

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2} dt, \quad (2.8)$$

который не зависит от характера изменения скалярной функции $b(t)$, если движение КА удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5) [19]. Исходя из соотношений $T\sqrt{2E_{\text{max}}} = 2S$, $E_{\text{max}} = u_0^2 \tau^2 / 2$ и $T = 2\tau$, получаем $T = 2\sqrt{S} / u_0 = T_{\text{fast}}$ – минимально возможное время разворота в условиях ограничения (1.3) даже без учета требования (1.6) к кинетической энергии вращения. Значение T_{fast} соответствует развороту, во время которого отсутствует участок движения с $E(t) = \text{const}$. Для оптимального управления с одной точкой переключения в момент времени $t = T/2$ необходимо выполнение условия $T_{\text{fast}} \leq 2\sqrt{2E_{\text{доп}}} / u_0$. Если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то во время максимально быстрого разворота вращение КА в режиме $E(t) = \text{const}$ невозможно.

Если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то неизбежно вращение КА с постоянной кинетической энергией вращения (при этом $a(t) \geq 0$). Разница $S - 2E_{\text{доп}} / u_0$ определяет продолжительность участка движения, когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$. Найдём, каким должно быть оптимальное управление \mathbf{M} , чтобы удовлетворялось условие $\dot{E} = 0$ с одновременной максимизацией гамильтониана H .

При выполнении соотношений (2.4), (2.5) гамильтониан H равен

$$H = -1 + a(M_1 r_1 / J_1 + M_2 r_2 / J_2 + M_3 r_3 / J_3) + b(r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3).$$

В интервале вращения с постоянной кинетической энергией $E(t) = E_{\text{доп}}$ выполняется условие

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3 = 0. \quad (2.9)$$

Для решения (2.4), (2.5) при условии $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ имеем $\varphi_1 M_1/J_1 + \varphi_2 M_2/J_2 + \varphi_3 M_3/J_3 = a(t)(M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3)/b(t) = 0$ и поэтому

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 - 1 \tag{2.10}$$

(очевидно, $b(t) \neq 0$ в интервале времени, когда $E(t) = E_{\text{доп}}$). Угловые скорости ω_i , при которых достигается максимум гамильтониана H (с учетом $E(t) = E_{\text{доп}}$), будут следующими:

$$\omega_i = \frac{r_i \sqrt{2E_{\text{доп}}}}{J_i \sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}}. \tag{2.11}$$

Подставив указанные зависимости для оптимальных угловых скоростей ω_i в динамические уравнения (1.1) с учетом уравнений (2.1) для оптимальных функций r_i , получим оптимальный силовой момент $\mathbf{M} = 0$ для моментов времени, когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ (на участке между разгоном и торможением). Найдем производную \dot{H} с учетом условия $E(t) = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{\omega}_1 r_1 + \dot{\omega}_2 r_2 + \dot{\omega}_3 r_3 + \omega_1 \dot{r}_1 + \omega_2 \dot{r}_2 + \omega_3 \dot{r}_3 = \omega_1 \dot{r}_1 + \omega_2 \dot{r}_2 + \omega_3 \dot{r}_3 + \\ &+ r_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + r_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + r_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 = \\ &= \omega_1 \dot{r}_1 + \omega_2 \dot{r}_2 + \omega_3 \dot{r}_3 = \omega_1(\omega_3 r_2 - \omega_2 r_3) + \omega_2(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1) + \omega_3(\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2) = 0, \end{aligned}$$

так как на этапе разгона оптимальный момент \mathbf{M} и вектор $\boldsymbol{\varphi}$ имеют одинаковое направление и в момент окончания разгона $r_i = J_i \omega_i / b$. Покажем, что $r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3 = \text{const}$. Возьмем производную от левой части указанного равенства с учетом (2.5):

$$\begin{aligned} r_1 \dot{r}_1/J_1 + r_2 \dot{r}_2/J_2 + r_3 \dot{r}_3/J_3 &= r_1(\omega_3 r_2 - \omega_2 r_3)/J_1 + r_2(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1)/J_2 + r_3(\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2)/J_3 = \\ &= br_1 r_2 r_3 (J_2 - J_3 + J_3 - J_1 + J_1 - J_2)/(J_1 J_2 J_3) \equiv 0. \end{aligned}$$

Поскольку $|\mathbf{r}| \neq 0$ и $H = \text{const}$ внутри отрезка времени, на котором $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ (так как $\dot{H} = 0$), то $b = \text{const} = (1 + H)/(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)$. Это означает, что в оптимальном развороте в интервале времени, когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, будет $|\mathbf{L}| = \text{const}$. Этот факт только подтверждает вывод об оптимальности значения $\mathbf{M} = 0$ в моменты времени, когда $E(t) = \text{const}$. Вращение по инерции есть частный случай закономерности (2.5) с учетом (2.1). На момент достижения равенства $E(t) = E_{\text{доп}}$ направления оптимального вектора $\boldsymbol{\varphi}$ и кинетического момента \mathbf{L} совпадают, поэтому единственным решением системы (1.1), (2.1), (2.2) в интервале времени, когда $E(t) = \text{const}$, являются зависимости (2.4), в которых $\dot{a} = -1$. Из свойства непрерывности функции $a(t)$ следует, что $a(t) = a(0) - t$ для любого момента времени t , пока $a(t) \geq 0$. Как только $a(t) < 0$, так управление (2.3) становится оптимальным, потому что $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ и силовой момент (2.3) (а значит, и (2.7)) не нарушает требования (1.6), поскольку при таком управлении будет $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} < 0$ и $\dot{E} < 0$. Следовательно, решение (2.4), (2.5), в котором $a(t) = a(0) - t$, справедливо для всего интервала времени $t \in [0, T]$ (в оптимальном решении $a(0) > 0, a(T) < 0$).

Таким образом, в зависимости от значения “функционала пути” (2.8), вычисленного для движения в соответствии с уравнениями (2.1), (2.5), реализуется один из двух вариантов оптимального управления: если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения, при котором $a(T) = -a(0)$, а если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором $a(0) > -a(T)$. Рисунок 1 отражает второй вариант оптимального управления, при котором существует отрезок времени с $E(t) = \text{const}$ (при выполнении условия $S > 2E_{\text{доп}}/u_0$ для значения (2.8)); t_1 – ближайший к началу разворота момент достижения равенства $E(t) = E_{\text{доп}}$; t_2 – момент смены знака скалярной функции $a(t)$ (начиная с момента времени $t = t_2$ для функции $a(t)$ верно условие $a(t) < 0$). На временах $t > t_2$ имеем $a(t) < 0$ и оптимальным является управление (2.3), потому что при таком силовом моменте будет $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{E} < 0$ и ограничение (1.6) становится несущественным (его можно не учитывать при дальнейшем приближении к $t = T$). В интервалах $t < t_1$ и $t > t_2$ оптимальным управлением является (2.3), при котором соответственно будет $|\mathbf{M}| = \text{const} = u_0/C$. Здесь обозначено $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}, p_i = r_i/r_0, r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$.

На участке вращения с максимально допустимой кинетической энергией оптимальный момент \mathbf{M} определяется из трех условий: ограничения (1.3), требования (2.9) и условия, что в каждый текущий момент времени t , пока $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, гамильтониан H принимает

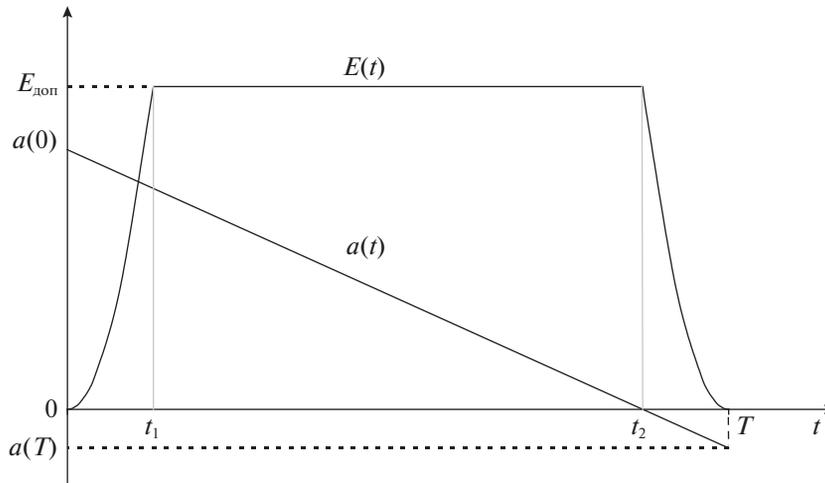


Рис. 1

максимальное значение. Учитывая структуру гамильтониана (2.10), приходим к выводу, что во время вращения КА с постоянной максимально допустимой кинетической энергией оптимальным является такое управление \mathbf{M} , при котором в каждый текущий момент времени t , пока $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет соотношениям (2.11). Требование (2.9) привело к структуре (2.10), при которой гамильтониан H не зависит явным образом от силового момента \mathbf{M} . Справедливость утверждения, что движение с угловой скоростью (2.11) соответствует максимуму гамильтониана H , легко доказать после замены переменных

$$y_i = \omega_i \sqrt{J_i}, \quad z_i = r_i / \sqrt{J_i},$$

записав

$$H = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 - 1$$

с учетом равенств $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2E_{\text{доп}}$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2E_{\text{доп}}$ для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Оптимальное значение момента \mathbf{M} вычисляем путем подстановки оптимальных угловых скоростей (2.11) в динамические уравнения (1.1) с учетом зависимостей (2.1) для универсальных переменных r_i и проверки выполнения условий (1.3), (2.9) (т.е. чтобы управляющий момент \mathbf{M} находился внутри области допустимых значений). В результате получили $\mathbf{M} = 0$. Очевидно, что найденное управление \mathbf{M} удовлетворяет неравенству (1.3) и равенству (2.9).

Таким образом, структура оптимального управления полностью определена:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}} \mathbf{r}, & \text{если } E(t) < E_{\text{доп}} \text{ или } a(t) < 0; \\ 0, & \text{если } a(t) > 0 \text{ и } E(t) = E_{\text{доп}}. \end{cases}$$

Заметим, что вращение по инерции полностью соответствует решению (2.4), (2.5) (угловые скорости (2.11) есть частный случай (2.5) и не противоречат соотношениям (2.4)). Поэтому найденное оптимальное решение (2.4), (2.5) справедливо на всем интервале управления $t \in [0, T]$.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении такого значения вектора $\mathbf{r}(0)$, при котором решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с одновременным выполнением условия (2.3), если $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{r} < 0$ или $E(t) < E_{\text{доп}}$, или $\mathbf{M} = 0$, если $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{r} > 0$ и $E(t) = E_{\text{доп}}$, удовлетворяло условиям разворота (1.4), (1.5). Константа r_0 определяется из уравнения $H(T) = 0$ (так как время окончания оптимального процесса не фиксировано). Вычислим $H(T)$ с учетом зависимостей (2.4):

$$H(T) = -1 + a(T)(-u_0 \sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}) = -1 - u_0 a(T) r_0 C$$

(угловые скорости в конечный момент $t = T$ равны нулю); $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$, где p_{10}, p_{20}, p_{30} — компоненты вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ ($\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ — орт вектора \mathbf{r}). Значение $a(T)$ оптимальной

функции $a(t)$ в конечный момент времени равно $a(T) = -1/(u_0 r_0 C)$. При любом типе оптимального управления (с одной или двумя точками переключения) $a(T) = -\tau$ (напомним, τ – длительность разгона и торможения). Поэтому $r_0 = 1/(u_0 \tau C)$. Отсюда оптимальное значение r_0 равно $r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}})$, если присутствует участок вращения с постоянной максимально допустимой кинетической энергией $E_{\text{доп}}$ (так как $a(T) = -\sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0$). Для оптимального управления с одной точкой переключения $a(T) = -T/2 = -\sqrt{S/u_0}$, поэтому $r_0 = 1/(C\sqrt{u_0 S})$. В результате

$$r_0 = \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{\text{доп}}})/C.$$

Время оптимального разворота T рассчитывается на основании “функционала пути” (2.8). Поскольку оптимальное движение КА удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5), то значение S не зависит от характера изменения скалярной функции $b(t)$ и является минимально возможным [19]. Если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то имеет место участок вращения КА с $E(t) = \text{const}$ и длительность оптимального разворота T вычисляется по формуле

$$T = S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0. \tag{2.12}$$

При этом время разгона τ составляет

$$\tau = \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0,$$

а длительность неуправляемого вращения будет

$$t_{\text{св}} = S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} - \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0.$$

Если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то в оптимальном движении не существует моментов времени, когда $E(t) = \text{const}$ ($t_{\text{св}} = 0$) и длительность оптимального разворота T равна $T = 2\sqrt{S/u_0} = T_{\text{fast}}$.

С учетом того, что уравнения (2.1), (2.5) удовлетворяются на всем интервале управления $t \in [0, T]$, оптимальное движение определяют зависимости:

$$M_i = 0.5m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_m - t)]p_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.13}$$

$$J_i \omega_i = 0.5m_0(t_p + t_\tau - |t - t_p| - |t - t_\tau|)p_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.14}$$

где p_i – компоненты вектора \mathbf{p} , t_p – время окончания разгона, t_τ – момент начала торможения,

$$t_p = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0), \quad t_\tau = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{доп}}}),$$

$$\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{н}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{н}} \circ \Lambda, \quad m_0 = u_0/C.$$

Закон вращения (2.14) удовлетворяет граничным условиям $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$, так как $t_p + t_\tau = T$, и выражение в скобках обнуляется при $t = 0$ и $t = T$. Зависимости (2.1), (2.13), (2.14) с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$ – единственное решение задачи оптимального управления (1.1)–(1.6). Из (2.1), (2.13) и соотношений $r_i = r_0 p_i$ явно видно, что при оптимальном управлении момент сил \mathbf{M} действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Уравнения (2.14) отчетливо показывают, что в геометрическом представлении вектор \mathbf{p} интерпретируется как орт оптимального кинетического момента КА \mathbf{L} в связанной с КА системе координат. Оптимальным (в смысле минимума времени T) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы \mathbf{M} и \mathbf{L} коллинеарны). Еще одним основным свойством оптимального разворота КА является тот факт, что во все время движения (на всем отрезке времени $[0, T]$) отношение кинетической энергии вращения E к квадрату модуля кинетического момента КА постоянно:

$$E/|\mathbf{L}|^2 = 0.5(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/|\mathbf{r}|^2 = \text{const} = (p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3)/2.$$

Для вращений в соответствии с (2.1), (2.5) значение “функционала пути” (2.8) минимально.

2.3. Об обоснование единственности оптимального решения. Покажем, что найденное решение (2.4), (2.5) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3).

Введем единичный вектор \mathbf{q} для вектора $\boldsymbol{\varphi}$, такой, что $\mathbf{q}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) > 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = \chi \mathbf{q}$, где χ – скалярная функция с начальным значением $\chi(0) > 0$; $|\mathbf{q}| = 1$. Тогда оптимальный момент \mathbf{M} будет равен

$$\mathbf{M} = \frac{u_0 \text{sign} \chi}{\sqrt{q_1^2/J_1 + q_2^2/J_2 + q_3^2/J_3}} \mathbf{q}.$$

Так как $\chi(0) > 0$, то в окрестности точки $t = 0$ имеем $\mathbf{M} = h\mathbf{q}$ и $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$, $\mathbf{L} = K\mathbf{q}$, где h – скалярная величина (на участке разгона $h > 0$); $\mathbf{L} = J_{\text{КА}}\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент КА; $J_{\text{КА}} = \text{diag} \{J_1, J_2, J_3\}$ – тензор инерции КА. Подставим формулы (2.3) с учетом зависимости $\boldsymbol{\varphi} = \chi(t)\mathbf{q}$ в уравнения (1.1) при наличии равенств $J_i\boldsymbol{\omega}_i = Kq_i$:

$$\dot{K}\mathbf{q} + K\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}K = h\mathbf{q}. \quad (2.15)$$

Сумма $K\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}K$ ортогональна орту \mathbf{q} или равна нулю (всегда $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$, так как $|\mathbf{q}| = 1$). Поэтому уравнение (2.15) выполняется в единственном случае, если $\dot{K} = h$ и $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ (т.е. когда направление вектора \mathbf{q} остается неизменным относительно инерциального базиса \mathbf{L}). Теперь подставим равенства $\varphi_i = \chi q_i$ и $\omega_i = Kq_i/J_i$ в уравнения (2.2), которые представим в виде

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = (J_{\text{КА}}\boldsymbol{\omega}) \times (J_{\text{КА}}^{-1}\boldsymbol{\varphi}) - J_{\text{КА}}(\boldsymbol{\omega} \times (J_{\text{КА}}^{-1}\boldsymbol{\varphi})) - \mathbf{r}. \quad (2.16)$$

Левая часть уравнения (2.16) для вектора сопряженных переменных равна

$$\dot{\chi}\mathbf{q} + \chi\dot{\mathbf{q}} = \dot{\chi}\mathbf{q} - \chi\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$$

(уравнения (1.1), (2.2) должны выполняться одновременно, поэтому свойство $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ взято из (2.15)). Правая часть уравнения (2.16) будет такой:

$$K\mathbf{q} \times (J_{\text{КА}}^{-1}\chi\mathbf{q}) - cJ_{\text{КА}}((J_{\text{КА}}^{-1}K\mathbf{q}) \times (J_{\text{КА}}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r} = -\chi(KJ_{\text{КА}}^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q} - \mathbf{r} = -\chi\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - \mathbf{r}.$$

Приравнявая левую и правую части уравнения (2.16), получим уравнение для вектора \mathbf{q} :

$$\dot{\chi}\mathbf{q} - \chi\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = -\chi\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - \mathbf{r}.$$

Отсюда следует необходимое условие оптимальности $\mathbf{r} = -\dot{\chi}\mathbf{q}$, из которого неизбежны равенства (2.4), в которых $a(0) > 0$, так как $\dot{a}(t) = -1$, причем $\dot{\chi} = \text{const}$ и $\mathbf{q} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, откуда имеем следующие свойства: $\dot{\chi} = -r_0$, $\chi(t) = r_0 a(t)$, $K = |\mathbf{L}| = r_0 b(t)$, где $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}(0)|$ (так как $\chi(0) > 0$ и $\chi(T) < 0$, а поэтому $\dot{\chi} < 0$). В итоге заключаем, что если в какой-нибудь момент времени t кинетический момент \mathbf{L} и вектор $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны, то они коллинеарны на всем интервале времени $0 < t < T$. В силу наличия граничных условий $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны как минимум 2 раза – в самом начале разворота ($\mathbf{L} = ht\mathbf{q}$ при $t \rightarrow 0$) и в самом конце маневра ($\mathbf{L} = h(t - T)\mathbf{q}$ при $t \rightarrow T$); во время остановки вращения $h < 0$.

На участке разгона существует как минимум один момент времени, когда векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны, и на участке торможения существует как минимум один момент времени, когда векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны, а между разгоном и торможением (если существует интервал движения с $E(t) = \text{const}$) оптимальным является вращение по инерции и уравнения (2.1), (2.5) выполняются, из-за чего единственным решением уравнений (2.2) будет (2.4). Следовательно, на всем интервале управления $t \in [0, T]$ зависимости (2.4), (2.5) – единственное решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности. Значит, никакое отличное от (2.13), (2.14) движение не может быть оптимальным, так как оно не будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности.

На участке разгона (когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и $\dot{E} > 0$) $\mathbf{L}(t) = |\mathbf{L}|\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda$, на участке вращения с $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ будет $\Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const}$, а на участке торможения (когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и $\dot{E} < 0$) $\mathbf{L}(t) = |\mathbf{L}|\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{K}} \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{K}} \circ \Lambda$. Поэтому для характерных моментов времени имеем:

$$\mathbf{L}(t_{\text{p}}) = |\mathbf{L}(t_{\text{p}})|\tilde{\Lambda}(t_{\text{p}}) \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda(t_{\text{p}}),$$

$$\mathbf{L}(t_{\text{T}}) = \tilde{\Lambda}(t_{\text{T}}) \circ \Lambda(t_{\text{T}}) \circ \mathbf{L}(t_{\text{p}}) \circ \tilde{\Lambda}(t_{\text{p}}) \circ \Lambda(t_{\text{T}}) = |\mathbf{L}(t_{\text{p}})|\tilde{\Lambda}(t_{\text{T}}) \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda(t_{\text{T}}),$$

$$\mathbf{L}(t > t_{\text{T}}) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda(t_{\text{T}}) \circ \mathbf{L}(t_{\text{T}}) \circ \tilde{\Lambda}(t_{\text{T}}) \circ \Lambda = |\mathbf{L}|\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda,$$

Подставив $\mathbf{L}(t_{\text{T}})$ в соотношение $\Lambda(t_{\text{T}}) \circ \mathbf{L}(t_{\text{T}}) \circ \tilde{\Lambda}(t_{\text{T}}) = |\mathbf{L}(t_{\text{T}})|\Lambda_{\text{K}} \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{K}}$, получим

$$\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_{\text{K}} \circ \Lambda(t_{\text{T}}) \circ \mathbf{L}(t_{\text{T}}) \circ \tilde{\Lambda}(t_{\text{T}}) \circ \Lambda_{\text{K}}/|\mathbf{L}(t_{\text{T}})| = \tilde{\Lambda}_{\text{K}} \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda_{\text{K}}.$$

Установлено, что все три участка движения принадлежат одной траектории, определяемой системой уравнений (1.2), (2.1), (2.5); при этом $b(t)$ – кусочно-линейная функция времени с точками излома t_p и t_T , у которой $\dot{b} > 0$ для $t \leq t_p$, $\dot{b} = 0$ для $t_p < t \leq t_T$ и $\dot{b} < 0$ для $t > t_T$, а $b(0) = b(T) = 0$. Кроме того, $|\dot{b}| = \text{const} = u_0/(r_0 C)$, если $t \leq t_p$ и $t > t_T$; и в моменты перехода с одного участка траектории на другой участок выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \Lambda(t_p) \circ \mathbf{L}(t_p) \circ \tilde{\Lambda}(t_p) &= |\mathbf{L}(t_p)| \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H, & \Lambda(t_T) \circ \mathbf{L}(t_T) \circ \tilde{\Lambda}(t_T) &= \Lambda(t_p) \circ \mathbf{L}(t_p) \circ \tilde{\Lambda}(t_p), \\ \Lambda(t_T) \circ \mathbf{L}(t_T) \circ \tilde{\Lambda}(t_T) &= |\mathbf{L}(t_T)| \Lambda_K \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_K, & |\mathbf{L}(t_T)| &= |\mathbf{L}(t_p)|, \\ \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H &= \Lambda(t_p) \circ \mathbf{p}(t_p) \circ \tilde{\Lambda}(t_p) = \Lambda(t_T) \circ \mathbf{p}(t_T) \circ \tilde{\Lambda}(t_T) = \Lambda_K \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_K, \\ \mathbf{p}(t) &= \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_H \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda. \end{aligned}$$

Функции $\Lambda(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ непрерывны внутри всего отрезка времени $t \in [0, T]$ и $\Lambda \circ \mathbf{p}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const}$.

На участке разгона $\Lambda \circ \mathbf{I}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const}$ и $\mathbf{I}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda$, между разгоном и торможением КА вращается по инерции и $\Lambda \circ \mathbf{I}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const} = \Lambda(t_p) \circ \mathbf{I}(t_p) \circ \tilde{\Lambda}(t_p) = \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H$ (так как $\mathbf{I}(t_p) = \tilde{\Lambda}(t_p) \circ \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda(t_p)$), а $\mathbf{I}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda(t_p) \circ \mathbf{I}(t_p) \circ \tilde{\Lambda}(t_p) \circ \Lambda = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda$; на участке торможения $\Lambda \circ \mathbf{I}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const} = \Lambda(t_T) \circ \mathbf{I}(t_T) \circ \tilde{\Lambda}(t_T) = \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H$ (так как $\mathbf{I}(t_T) = \tilde{\Lambda}(t_T) \circ \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda(t_T)$) и $\mathbf{I}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_K \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_K \circ \Lambda$, откуда $\mathbf{I}(t) = \mathbf{p}(t)$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, где $\mathbf{I} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ – орт кинетического момента КА.

Для функций $a(t)$, $b(t)$ оптимального решения справедливы следующие соотношения:

$$a(0) = T - 1/(u_0 r_0 C), \quad a(T) = -1/(u_0 r_0 C), \quad b(t) = 0.5u_0(T - |t - t_p| - |t - t_m|)/(r_0 C).$$

Время разворота T и оптимальное значение r_0 равны:

$$T = \max(2\sqrt{S/u_0}; S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0), \quad r_0 = \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{\text{доп}}})/C. \quad (2.17)$$

Максимальная энергия вращения за время оптимального разворота $E_{\text{max}} = \min(u_0 S/2, E_{\text{доп}})$. Максимальный модуль кинетического момента $L_{\text{max}} = \sqrt{\min(u_0 S, 2E_{\text{доп}})}/C$.

Покажем, что найденное управление (2.13) действительно оптимально (ему соответствует значение T , определяемое первой формулой (2.17), которое обозначим T_{opt}). Рассмотрим функцию $f_0 = \sqrt{2E(t)}$. Соответственно $f_{\text{max}} = \sqrt{2E_{\text{max}}}$. При ограничении (1.3) максимально быстрая раскрутка КА происходит при управлении (2.6) [24], при котором $\ddot{E} = u_0^2$, а силовой момент \mathbf{M} и кинетический момент \mathbf{L} одинаково направлены (причем $|\mathbf{M}| = \text{const}$ и $\dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$), что соответствует управлению (2.13). Для наискорейшей остановки вращения при ограничении (1.3) необходимо управление (2.7), при котором управляющий момент \mathbf{M} и кинетический момент \mathbf{L} имеют противоположные направления, $|\mathbf{M}| = \text{const}$ и $\dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$, что находится в рамках управления (2.13). Если $u_0 \rightarrow \infty$, то время разгона и торможения $\tau \rightarrow 0$ и в течение всего разворота $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$. Для любого управления, удовлетворяющего ограничению (1.3), выполняются два условия: $f_0(t) \leq u_0 t$, если $t \leq T/2$, и $f_0(t) \leq u_0(T - t)$, если $t > T/2$ (так как $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$). При одном и том же значении “функционала пути” S величина T минимальна, если интервал времени, когда $E_k(t) = \text{const} = E_{\text{max}}$, является максимально длительным, а интервалы времени, когда $E_k(t) < E_{\text{max}}$, максимально короткие. Управление (2.13) удовлетворяет обоим требованиям. Кроме того, для движения (2.13), (2.14) значение S минимально возможное, из-за чего T_{opt} – абсолютно минимальное время разворота при наличии ограничений (1.3) и (1.6).

Если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то в законах (2.13), (2.14) $t_T = t_p = T/2 = \sqrt{S/u_0}$ (оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения); при этом $E_{\text{max}} = u_0 S/2$ и ограничение (1.6) несущественно. Время оптимального разворота составляет $T_{\text{opt}} = 2\sqrt{S/u_0}$.

Если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то $t_T > t_p$ ($t_p = \tau$, $t_T = T - \tau$), в оптимальном по времени развороте имеется участок вращения с постоянной кинетической энергией (реализуется релейное управление с двумя точками переключения). В этом случае при оптимальном управлении (2.13) время разворота T_{opt}

равно (2.12). Каким бы ни было движение, удовлетворяющее условиям разворота (1.4), (1.5) и ограничениям (1.3), (1.6), время разворота T удовлетворяет неравенству

$$T \geq S/\sqrt{2E_{\max}} + \sqrt{2E_{\max}}/u_0. \quad (2.18)$$

Правая часть указанного неравенства – монотонно убывающая функция аргумента E_{\max} на всем отрезке $[0, u_0 S/2]$ (E_{\max} не может быть больше $u_0 S/2$, так как значение $E_{\max} = u_0 S/2$ соответствует релейному управлению с одной точкой переключения, когда участок вращения КА по инерции отсутствует). При прочих равных условиях время разворота минимально, если “функционал пути” S имеет минимальное значение. Поскольку для всех интересующих нас управлений $E_{\max} \leq E_{\text{доп}}$, то правая часть неравенства (2.18) не может быть меньше (2.12), так как для управления (2.13) “функционал пути” S принимает минимальное значение. В результате всегда время разворота $T \geq T_{\text{опт}}$. Следовательно, $T_{\text{опт}}$ – действительно минимально возможное время разворота при условии $E(t) \leq E_{\text{доп}}$ и ограничении (1.3).

3. Построение типовой программы оптимального разворота КА. Выше было продемонстрировано, что функции $M_i(t)$, $p_i(t)$, $\omega_i(t)$ будут оптимальными тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.13), (2.14) (с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) и краевым условиям (1.4), (1.5) для решения $\Lambda(t)$ уравнения (1.2). Задача построения оптимального управления $\mathbf{M}(t)$ состоит главным образом в нахождении такого вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ (и значения S), чтобы в результате движения в соответствии с уравнениями (1.2), (2.1), (2.14) и начальными условиями (1.4) выполнялись равенства $\Lambda(T) = \Lambda_k$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Для получения функциональной зависимости управлений от фазовых координат необходимо вычислить оптимальное значение r_0 и решить уравнения (2.1). Если $J_1, J_2, J_3, u_0, E_{\text{доп}}$ не меняются, то для всех сочетаний Λ_n, Λ_k с одинаковым кватернионом $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_k$ решение $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{M}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ будет одним и тем же.

Так как оптимальное решение описывается уравнениями (2.1), (2.5), а для любых движений, удовлетворяющих зависимостям (2.1), (2.5) значение \mathbf{p}_0 и интеграл (2.8) не зависят от характера изменения скалярной функции $b(t)$, то при поиске расчетных значений \mathbf{p}_0 и S , удовлетворяющих заданным условиям разворота, принимаем $b(t) = \text{const} > 0$ (такой прием применяется для упрощения решения краевой задачи принципа максимума). В этом случае (когда $b(t) = \text{const}$) система уравнений (2.1), (2.5) преобразуется в уравнения

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3)/J_1, \quad \dot{\omega}_2 = \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1)/J_2, \quad \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2)/J_3. \quad (3.1)$$

Отметим, что значения \mathbf{p}_0 и S определяют время разворота T , наличие или отсутствие интервала вращения по инерции, максимальный управляющий момент, который равен

$$m_0 = u_0 / \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3},$$

а также длительности разгона и торможения, участка неуправляемого движения и максимальную энергию вращения E_{\max} (и максимальную величину кинетического момента L_{\max}).

Управляющие переменные рассчитываются в соответствии с законом (2.13), для реализации которого необходимо в каждый момент времени t знать все три переменные p_1, p_2, p_3 . Общее решение системы уравнений (1.2), (2.1), (2.14) (с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) получить практически невозможно; трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны между собой выражением

$$\Lambda_k \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_k = \Lambda_n \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n \quad \text{или} \quad \mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_p \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_p,$$

где $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_k$ – кватернион разворота.

Указанная система имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел. Для сферически-симметричного КА ($J_1 = J_2 = J_3$) система (2.1), (2.14) принимает вид $\dot{p}_i = 0$, и решение системы уравнений (1.2), (1.4), (1.5), (2.1), (2.13), (2.14) такое:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}; \quad M_i(t) = 0.5 m_0 [\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_r - t)] p_{i0}, \quad i = \bar{1,3},$$

$$\omega_i(t) = 0.5 m_0 (T - |t - t_p| - |t - t_r|) p_{i0} / J_i,$$

$$\Lambda(t) = \Lambda_n \circ e^{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\theta} / 2}, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{m_0}{2J_2} \int_0^t (t_p + t_r - |t - t_p| - |t - t_r|) dt,$$

где v_1, v_2, v_3 – компоненты векторной части кватерниона разворота Λ_p ; $m_0 = u_0\sqrt{J_1}$; $T = t_p + t_t$; $t_p = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{дон}}/u_0})$, $t_t = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{дон}}})$, в которых $S = 2J_1 C \arccos(\text{sqal}\Lambda_p)$.

Оптимальные развороты вокруг оси, неподвижной относительно инерциальной системы координат, подробно рассмотрены в [1].

Для динамически-симметричного КА (например, когда $J_2 = J_3$) задача оптимального управления разворотом решается до конца (не умаляя общности рассуждений, за ось симметрии принята ось OX КА). Оптимальное движение в этом частном, но достаточно распространенном случае представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси OX и вокруг некоторого направления η , неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол ϑ . Угловые скорости относительно осей OX и η изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому справедливо соотношение [14]

$$\Lambda_k = \Lambda_H \circ e^{p_0\beta/2} \circ e^{e_1\alpha/2},$$

где вектор в показателе степени кватернионной экспоненты понимается как кватернион с нулевой скалярной частью; $p_0 = p(0)$; e_1 – орт продольной оси КА; α, β – углы поворота КА вокруг продольной оси OX и вокруг вектора p соответственно (считается $|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$). Решение $p(t)$ системы уравнений (1.1), (2.1), (2.14) представим в следующей форме:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa, \quad \kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt, \quad (3.2)$$

где $p_{i0} = p_i(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная угловая скорость $\omega_1(t)$ вычисляется из равенств (2.14) с учетом $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Зависимость p_{i0}, α, β от Λ_H и Λ_k определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10}\beta; \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0; \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1; \\ p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2; \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где v_0, v_1, v_2, v_3 – компоненты кватерниона разворота Λ_p ; $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$. Существование решения системы (3.3) для любых значений кватерниона разворота Λ_p доказано в [14]. Оптимальное значение управляющего момента M удовлетворяет соотношениям (2.13). Программные значения функций ω_i (проекции требуемой угловой скорости ω^* на связанные оси) рассчитываются по формулам (2.14) и (3.2). В явном виде оптимальное решение $M_i(t), \omega_i(t)$ запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0.5m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_t - t)]p_{10}; \\ M_2 &= 0.5m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_t - t)]\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma); \\ M_3 &= 0.5m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_t - t)]\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma); \\ \omega_1 &= 0.5m_0(T - |t - t_p| - |t - t_t|)p_{10}/J_1; \\ \omega_2 &= 0.5m_0(T - |t - t_p| - |t - t_t|)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)/J_2; \\ \omega_3 &= 0.5m_0(T - |t - t_p| - |t - t_t|)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)/J_3, \end{aligned}$$

где $t_p = \min(\sqrt{J_2\beta/m_0}, \sqrt{2E_{\text{дон}}/u_0})$; $t_t = \max(\sqrt{J_2\beta/m_0}, J_2\beta C/\sqrt{2E_{\text{дон}}})$; $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} < 0$ ($|p_{10}| \neq 1$; а случай $|p_{10}| = 1$ не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси OX); $T = t_1 + t_2$. В любой текущий момент времени t кватернион ориентации Λ описывается функцией

$$\Lambda(t) = \Lambda_H \circ e^{p_0\theta/2} \circ e^{e_1\rho/2},$$

где $\rho = (J - J_1)p_{10}\theta/J_1$; значение вектора \mathbf{p}_0 определяется из системы (3.3); угол θ равен

$$\theta = \frac{1}{J} \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt, \quad \text{или} \quad \theta = \frac{m_0}{2J} \int_0^t (t_p + t_T - |t - t_p| - |t - t_T|) dt.$$

Для несимметричного КА ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (1.2), (2.1), (2.14) в квадратурах не представляется возможным и находится исключительно численными методами (например, методом последовательных приближений). Определение вектора \mathbf{p}_0 производится путем решения краевой задачи $\Lambda(0) = \Lambda_n$, $\Lambda(T) = \Lambda_k$ с учетом накладываемых на движение связей (1.2), (3.1) и нахождения начальной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(0)$ для вращения по инерции.

Для построения оптимального управления при развороте КА необходимо знать не только программу изменения координат $p_i(t)$, но и величину максимального момента m_0 , определяющего темп приближения к требуемому конечному состоянию (1.5), а также моменты выключения и включения управления t_p и t_T . Конкретные значения параметров m_0 , t_p , t_T , $r_0 = |\mathbf{r}|$ и длительность разворота T зависят от вектора \mathbf{p}_0 и характеристики S . Для динамически симметричного КА значение S вычисляется значительно проще (расчет величин r_0 , t_p , t_T и E_{\max} также упрощается). В этом частном случае $|\mathbf{L}| = J_2\dot{\beta}$ и $S = J_2\beta C$, где J_2 – момент инерции относительно поперечной оси ($J_2 = J_3$); $\dot{\beta}$ – скорость вращения вокруг кинетического момента \mathbf{L} ; β – угол поворота КА вокруг кинетического момента \mathbf{L} (из физического смысла $\beta \geq 0$). Значения r_0 , t_p , t_T , T , E_{\max} , L_{\max} зависят от угла β поворота КА вокруг кинетического момента \mathbf{L} . Чтобы время T было минимальным, необходимо выполнить условие $\beta \leq \pi$, при котором S минимально (именно поэтому система (3.3) включает неравенство $0 \leq \beta \leq \pi$).

Решение задачи оптимального по времени разворота с ограничением на фазовые переменные (1.6) подчиняется уравнениям (2.1), (2.4), (2.5), а управляющие переменные M_i и угловые скорости ω_i изменяются в соответствии с законами (2.13), (2.14). Решение (2.13), (2.14) оптимально, потому что оно – единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Любое отличное от (2.13), (2.14) движение будет заведомо хуже (в смысле минимума времени разворота T при ограничениях (1.3), (1.6)), поскольку не будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности. Значение m_0 в законах движения (2.13), (2.14) определяет максимальную величину управляющего момента, максимальный модуль кинетического момента и длительность участка свободного вращения. Оптимальный вектор \mathbf{p}_0 рассчитывается в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы S , C , m_0 полностью определяют программу движения при оптимальном законе управления пространственным разворотом КА. Программное изменение силового момента \mathbf{M} описывается зависимостью

$$\mathbf{M} = 0.5m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_T - t)]\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda,$$

где $\mathbf{c}_p = \text{const} = \Lambda_n \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_n$. Для оптимальной программы управления $\mathbf{M}(t)$ движение КА относительно центра масс обладает следующими оригинальными свойствами и соотношениями:

$$\Lambda \circ M(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}; \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}; \quad \int_0^{T/2} |\mathbf{L}(t)| dt = \int_{T/2}^T |\mathbf{L}(t)| dt,$$

$$E_{\max} = |E(T/2)|, \quad L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|.$$

Раскрутка КА в начале разворота продолжается до тех пор, пока его кинетический момент \mathbf{L} не станет равен заданному значению \mathbf{L}_{pr} , который рассчитывается по формуле

$$\mathbf{L}_{pr} = m_0 \tau \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda.$$

Гашение кинетического момента в конце оптимального разворота осуществляется по закону (2.7). В момент времени $t = T$, когда $\omega = 0$, управление выключается и $\mathbf{M} = 0$, разворот завершен. Если $2E_{\text{доп}} \ll u_0 S$, то торможение КА можем начать с момента выполнения равенства

$$4\arcsin \frac{K\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2}}{\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}} = \frac{K^2\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{m_0\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}}, \quad \text{если } \omega_2^2 + \omega_3^2 \neq 0,$$

$$\text{или } 4\arccos \delta_0 = \omega_1 K/m_0, \quad \text{если } \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0,$$

где δ_j – компоненты кватерниона рассогласования $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_k, j = \overline{0, 3}$; $K = |J_{\text{КА}} \omega|$ – величина кинетического момента КА. Указанное условие позволяет повысить точность приведения КА в требуемое конечное состояние $\Lambda(T) = \Lambda_k, \omega(T) = 0$ за счет возможности в бортовой системе управления формировать сигнал на гашение кинетического момента по информации о текущей ориентации КА и измерениям его угловой скорости.

4. Результаты математического моделирования. Приведем численный пример решения задачи управления КА во время программного разворота и построения оптимальной программы вращения. Рассмотрим разворот КА на 180° из начального положения Λ_n , при котором оси КА совмещены (совпадают по направлению) с осями опорного базиса \mathbf{I} , в заданное конечное положение $\Lambda_k = \Lambda_{\text{зад}}$. При этом считается, что начальная и конечная угловые скорости нулевые: $\omega(0) = \omega(T) = 0$. Значения элементов кватерниона $\Lambda_{\text{зад}}$, характеризующего требуемое угловое положение КА, были равны: $\lambda_0 = 0; \lambda_1 = 0.707; \lambda_2 = 0.39; \lambda_3 = 0.59$. Будем полагать, что инерционные характеристики КА имеют следующие значения, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$: $J_1 = 25603, J_2 = 91495, J_3 = 80662$, а мощность исполнительных органов характеризуется величиной $u_0 = 0.07077 \text{ Н} \cdot \text{кг}^{-1/2}$. Во время разворота кинетическая энергия вращения не должна быть больше $E_{\text{доп}} = 5 \text{ Дж}$.

Нахождение расчетного значения вектора \mathbf{p}_0 начинаем с решения той же краевой задачи для динамически-симметричного КА с моментами инерции J_1 и J , где J – момент инерции относительно поперечной оси, принимаемый равным

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1).$$

В предположении динамической симметричности КА решение \mathbf{p}_0 определяется системой (3.3)

(для симметричного твердого тела искомое значение следующее: $\mathbf{p}_0^{(0)} = \{0.4652435; -0.3714789; 0.8034625\}$). Полученный из уравнений (3.3) вектор \mathbf{p}_0 и угол β являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе уравнений (1.2), (3.1) с учетом накладываемых на движение КА ограничений $\Lambda(0) = \Lambda_n, \Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_k$, а начальные угловые скорости ω_n определяются по формулам:

$$\omega_{1n} = \frac{J\beta}{J_1 T} p_{10}, \quad \omega_{2n} = \frac{J\beta}{J_2 T} p_{20}, \quad \omega_{3n} = \frac{J\beta}{J_3 T} p_{30}, \quad (4.1)$$

где T – время разворота (при уточнении вектора \mathbf{p}_0 было принято значение $T = 300 \text{ с}$). Прогнозирование “свободного” движения осуществляется интегрированием системы уравнений (1.1), (1.2), описывающих вращение КА, при начальных условиях $\Lambda(0) = \Lambda_n, \omega(0) = \omega_n$ и с учетом того, что $\mathbf{M} = 0$. Степень приближения найденного значения \mathbf{p}_0 к искомому решению характеризуется мерой $\varepsilon = \text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{пр}} \circ \Lambda_k)$, где $\Lambda_{\text{пр}}$ – наиболее близкое к Λ_k положение, полученное в ходе моделирования движения КА около центра масс (согласно уравнениям (1.2), (1.1), в которых $M_i = 0$). Вектор \mathbf{p}_0 уточняется до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{\text{пор}}$ ($\varepsilon_{\text{пор}}$ – некоторое близкое к единице пороговое значение, отражающее точность найденного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{пор}}$ достигнуто (прогнозируемая ошибка соответствует требуемой точности), истинное значение \mathbf{p}_0 , удовлетворяющее граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_n, \Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_k$, будет найдено и краевая задача решена. Вектор \mathbf{p}_0 уточняется с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\Lambda_p^{(k+1)} = \Lambda_p^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{\text{пр}},$$

где $\Lambda_p^{(k)}$ – значение кватерниона разворота на k -й итерации, используемое в системе (3.3).

На каждом k -м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота $\Lambda_p^{(k)}$ (правые части

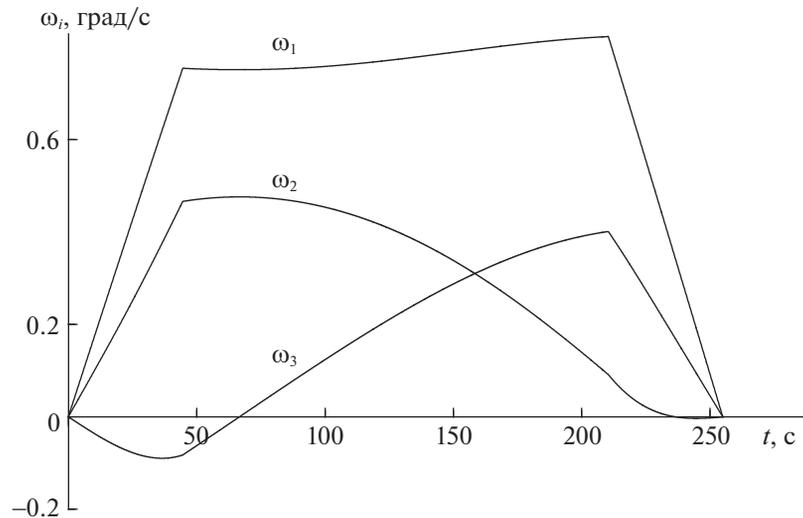


Рис. 2

системы (3.3)), и из уравнений (3.3) мы получаем \mathbf{p}_0 и β , а также соответствующую начальную угловую скорость ω_n (в соответствии с (4.1)) и прогноз $\Lambda_{\text{пр}}$. Если $\varepsilon < \varepsilon_{\text{пор}}$, то вычисляется кватернион разворота $\Lambda_p^{(k+1)}$ для следующего $(k+1)$ -го шага итераций и процесс уточнения вектора \mathbf{p}_0 повторяется. За начальное приближение в правых частях системы (3.3) берутся элементы кватерниона $\Lambda_p^{(0)} = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_k$. Итерационный процесс прекращается, когда $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{пор}}$.

Принятая схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида $x = f(x)$ для скалярной функции $f(x)$ скалярного (одномерного) аргумента x . В нашем случае аргумент — гиперкомплексное число (кватернион) Λ_p . Функцией является кватернионная величина $\Lambda_p \circ \tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{\text{пр}}$, где Λ_k — постоянный (не зависящий от аргумента Λ_p) кватернион; $\Lambda_{\text{пр}}$ зависит от аргумента Λ_p через систему уравнений (3.3), (4.1) посредством модели движения (1.1), (1.2) (в уравнениях (1.1) принимается $M_i = 0$). Изменяя Λ_p , изменяются вектор \mathbf{p}_0 (в соответствии с (3.3)) и угловые скорости $\omega_{\text{ин}}$, а значит, изменится и значение $\Lambda_{\text{пр}}$, что вызовет изменение функции $\Lambda_p \circ \tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{\text{пр}}$. Как только $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{\text{пр}} \circ \Lambda_k) \geq \varepsilon_{\text{пор}}$, итерационный процесс прекращается, а решение \mathbf{p}_0 считается найденным. Так как $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{\text{пр}}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_p^{(k)}|$ для всех k , то итерационный процесс приближения \mathbf{p}_0 к искомому решению сходится. Аналогичный метод определения значения \mathbf{p}_0 в решении краевой задачи принципа максимума использовался в предыдущих работах [8, 18]. Заметим, что это лишь один из возможных (но далеко не единственный) итерационных алгоритмов поиска оптимального вектора \mathbf{p}_0 .

В результате решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_n$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_k$ получили расчетное значение вектора $\mathbf{p}(0) = \{0.4552153; -0.3475442; 0.8197513\}$ и “функционал пути” $S = 665 \text{ м} \cdot \text{кг}^{1/2}$. Исходя из найденного значения \mathbf{p}_0 получили максимальную величину управляющего момента $m_0 = 16.8 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Так как $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то оптимальное управление имеет две точки переключения и между набором и гашением кинетической энергии КА вращается по инерции. Время достижения максимально допустимой кинетической энергии $E_{\text{доп}}$ равно $t_p = \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0 = 44.7 \text{ с}$, а момент начала торможения $t_t = S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} = 210.3 \text{ с}$. Время разворота оказалось равным $T = 255 \text{ с}$. Основные константы оптимального движения такие:

$$a(0) = t_t = 210.3 \text{ с}, \quad a(T) = -\tau = -44.7 \text{ с}, \quad r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}}) = 75 \text{ с},$$

$$\varphi(0) = \{7179.8 \text{ с}^2; -5481.6 \text{ с}^2; 12929.6 \text{ с}^2\}.$$

Результаты математического моделирования динамики оптимального по быстродействию разворота представлены рис. 2–5. На рис. 2 изображены графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ по времени. Максимальная величина

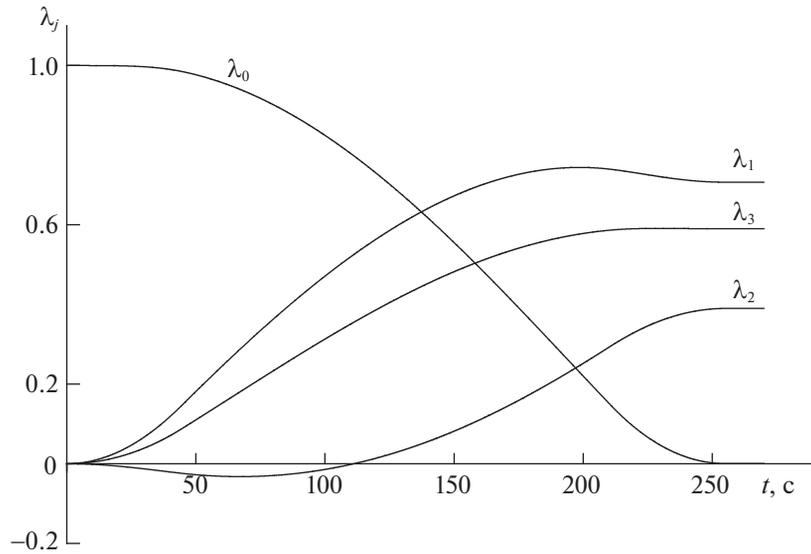


Рис. 3

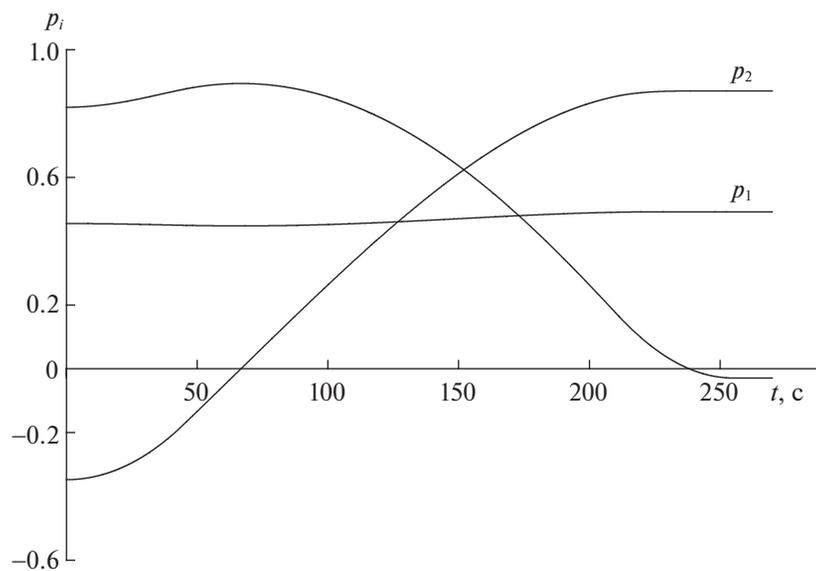


Рис. 4

кинетического момента составила $L_{\max} = 750.7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Из соотношения моментов инерции J_1, J_2, J_3 следует, что OX — продольная ось КА. Отмечаем, что угловая скорость ω_1 , соответствующая продольной оси КА, — знакопостоянна. На рис. 3 отображены графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$, определяющего текущую ориентацию КА в процессе совершаемого поворотного маневра: $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$. Оптимальная траектория движения $\Lambda(t)$ получается из решения уравнений (1.1) с учетом начальных условий $\Lambda(0) = \Lambda_n$ и закона изменения угловой скорости $\omega(t)$, отраженного на рис. 2. Динамика изменения составляющих $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ орта \mathbf{p} по времени приведена на рис. 4. Характерным является незначительное изменение проекции p_1 (угловая скорость ω_1 относительно продольной оси КА на участке между разгоном и торможением также меняется гораздо меньше, чем угловые скорости ω_2 и ω_3 относительно поперечных осей КА). При оптимальном управлении в отличие от переменных ω_i переменные p_i и λ_j — гладкие функции времени. Наконец, рисунок 5 демонстрирует изменение сопряженных переменных φ_i во время оптимального по быстрдействию разворота.

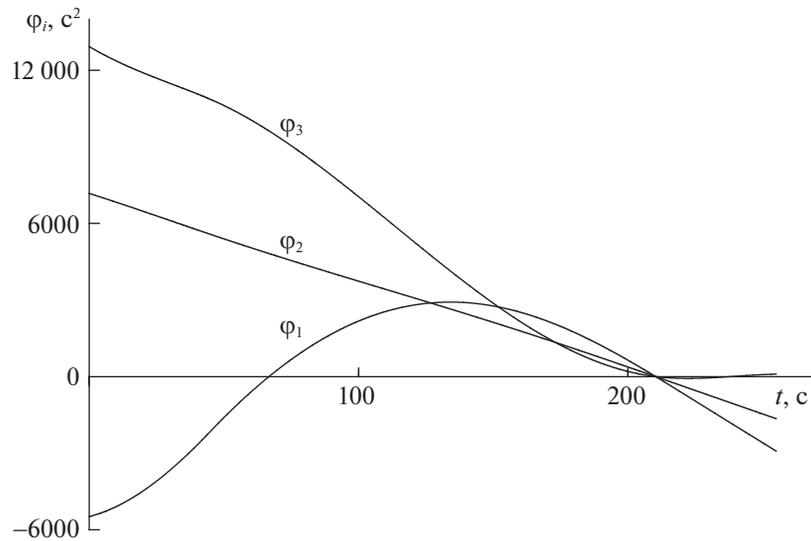


Рис. 5

Заключение. Рассмотрена и решена динамическая задача оптимального по времени управления пространственным разворотом твердого тела (в частности, КА) из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение с учетом ограничений на управляющий момент и кинетическую энергию вращения. Ограниченность максимальной кинетической энергии вращения позволяет в экстренных случаях погасить угловую скорость за время, не превышающее заданного значения (в том числе в нештатной ситуации, когда требуется срочно прекратить маневр и максимально быстро стабилизировать КА). Постановка задачи имеет традиционную форму, в которой управление считается кусочно-непрерывной функцией времени. Нахождение оптимальной по быстродействию программы переориентации КА с кинетической энергией вращения, не превышающей допустимого уровня, весьма актуально.

Представлено аналитическое решение предложенной задачи оптимального разворота и получены формализованные уравнения и расчетные выражения для построения оптимальной программы переориентации КА. Определен тип траектории и изучены ключевые свойства оптимального движения. Найдены условия оптимальности и обоснована структура оптимального управления. Доказано, что в процессе всего разворота отношение кинетической энергии вращения к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Для решения сформулированной задачи управления применялся принцип максимума, основываясь на универсальных переменных r_i [2]. Использование кватернионов значительно упрощает расчетные процедуры и снижает вычислительные затраты алгоритма управления, делая его наиболее удобным для бортовой реализации. Задача оптимального управления разворотом решается до конца; даны выражения для расчета ключевых характеристик маневра переориентации.

Показано, что на всем интервале переориентации момент сил действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. В общем случае оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором весь разворот делится на раскрутку КА с максимально возможным управляющим моментом, вращение по инерции и торможение с максимально возможным управляющим моментом, противоположно направленным кинетическому моменту КА. Модуль управляющего момента при разгоне и торможении не меняется. Длительности участков разгона и торможения одинаковы (так как начальная и конечная угловые скорости равны нулю) и зависят от мощности исполнительных органов u_0 , максимально допустимой кинетической энергии вращения, взаимной ориентации начального и конечного положений КА и его моментов инерции. В случае неограниченного управления (когда $u_0 \rightarrow \infty$) времена разгона и торможения бесконечно малы, и практически на всем интервале движения КА вращается с постоянным отношением инерциальной системы координат кинетическим моментом. Другим предельным случаем является управление с одной точкой переключения, при котором участок неуправляемого движения отсутствует (длительность разгона и торможения максимальна и составляет половину времени разворота).

Важность и значение выполненных исследований состоят в том, что в отличие от предыдущих публикаций искомое управление и соответствующее ему движение ограничено максимально допустимой энергией вращения (задача оптимального разворота включает ограничения на силовой момент и угловую скорость КА). В статье приведена процедура реализации оптимального управления переориентацией КА. Момент начала торможения определяется по фактическим параметрам движения (кватерниону рассогласования и кинетическому моменту), исходя из принципов терминального управления (используются информация об угловом положении КА и измерения угловой скорости). Структура построенного управления сравнительно проста, и оно легко может быть реализовано существующими бортовыми системами управления движением КА. Дается описание конструктивной схемы решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота и моментов инерции КА. Для динамически-симметричного КА представлено законченное решение задачи переориентации в замкнутой форме, что придает практическую значимость проведенным исследованиям, поскольку реальные КА во многих случаях близки к телам с осевой симметрией. Записанная в аналитическом виде система уравнений (3.3) позволяет непосредственно найти решение краевой задачи принципа максимума и вычислить необходимые константы оптимального закона управления; при этом искомые значения параметров закона управления могут быть определены известным устройством [28]. Приводятся результаты математического моделирования, иллюстрирующие характер движения КА во время оптимального разворота.

В отличие от работ [8, 9], где рассматривается неограниченное управление (в тех задачах отсутствуют какие-либо ограничения, кроме краевых условий), мы оптимизируем ограниченное управление, когда ограничены не только управляющие функции (силовой момент \mathbf{M}), но и фазовые переменные (ограничена угловая скорость КА); это существенное отличие. Кроме того, в [8] оптимальным является непрерывное управление, когда все управляющие функции – непрерывные гладкие функции времени и на всем интервале управления $[0, T]$ (кроме единственного момента времени $t = T/2$) управляющий момент \mathbf{M} отличен от нуля, а в приведенном решении оптимально релейное управление (с одной или с двумя точками переключения) и может существовать отрезок времени ненулевой продолжительности, на котором $\mathbf{M} = 0$ и КА вращается по инерции. Кроме того, в оптимальном решении, представленном в [8], отсутствуют участки с постоянным модулем управляющего момента.

Принципиальным отличием предложенной динамической задачи оптимального управления относительно известных работ является наличие ограничений как на управляющие функции, так и на фазовые переменные, что придает полученному решению существенную новизну. Наличие готовых формул для синтеза программы оптимального движения во время маневра переориентации делает выполненное исследование практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Левский М.В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53–59.
3. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. С. 600.
4. Алексеев К.Б., Малявин А.А., Шадян А.В. Экстенсивное управление ориентацией космического аппарата на основе нечеткой логики // Полет. 2009. № 1. С. 47–53.
5. Ермошина О.В., Крищенко А.П. Синтез программных управлений ориентацией КА методом обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 155–162.
6. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
7. Junkins J.L., Turner J.D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
8. Левский М.В. Квадратично оптимальное управление переориентацией космического аппарата за фиксированное время в динамической постановке // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 1. С. 133–149.
9. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
10. Scrivener S., Thompson R. Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.

11. Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh. Time-optimal Reorientation for Rigid Satellite with Reaction Wheels // International Journal of Control. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
12. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
13. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // ДАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
14. Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
15. Shen H., Tsiotras P. Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
16. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
17. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 152–165.
18. Левский М.В. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
19. Левский М.В. Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
20. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Зыков С.Г., Сазонов В.В., Тесленко В.П. Математические модели процессов поддержания ориентации орбитальной станции “Мир” с помощью гиродинов. М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1989. № 10.
21. Левский М.В. Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 3. С. 188–195.
22. Levskii M.V. Special Aspects in Attitude Control of a Spacecraft, Equipped with Inertial Actuators // J. Computer Science Applications and Information Technology. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
23. Quang M. Lam. Robust and Adaptive Reconfigurable Control for Satellite Attitude Control Subject to Under-Actuated Control Condition of Reaction Wheel Assembly // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
24. Левский М.В. К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 147–161.
25. Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 154–173.
26. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2093433 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1997. № 29. Опубликовано 20.10.1997. С. 271.
27. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
28. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликовано 20.03.2000. С. 148.