

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 531.6: 531.391.5: 681.513.1

МЕХАТРОННАЯ СХЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

© 2022 г. В. Н. Тхай

ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

e-mail: tkhaivn@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.06.2021 г.

После доработки 19.08.2021 г.

Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается связанная система, содержащая осциллятор Ван дер Поля и консервативную систему, допускающую семейство одночастотных колебаний: осциллятор одной слабой связью — управлением действует на консервативную систему. Находится управление, посредством которого в замкнутой системе реализуется орбитально асимптотически устойчивый (в большом) цикл. При этом в управляемой консервативной системе стабилизируемое колебание становится проекцией цикла на фазовое пространство лагранжевой системы.

DOI: 10.31857/S0002338822010103

Введение. При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предлагается выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебания связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации решается естественным образом, т.е. без привлечения других управлений. Связь может быть односторонней. В этом случае одна система действует на другую, не испытывая действия последней системы. Первая система генерирует управление, вторая система становится управляемой.

Рассматривается консервативная система, допускающая периодическое движение. Используются уравнения Лагранжа второго рода. Фазовое пространство консервативной системы симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$: q — обобщенная координата. В силу этого обстоятельства одночастотные колебания системы реализуются как симметричные периодические движения (СПД).

В рамках самой консервативной модели СПД не стабилизируется: необходимо приложить силу, нарушающую симметрию фазового пространства. Для ε -малой силы колебание ε -скорректированной системы будет ε -близким к колебанию консервативной системы.

Примечательным примером ε -скорректированной системы является уравнение Ван дер Поля. В нем действие ε -малой силы на линейный осциллятор приводит к существованию орбитально асимптотически глобально устойчивого цикла. Само управление дается нелинейной диссипацией, линейной по скорости и приложенной в текущей точке траектории осциллятора Ван дер Поля. Как результат через обратную связь системе навязывается режим цикла. Диссипация реализуется в электронной схеме для осциллятора Ван дер Поля на основе триода (см., например, [2, с. 26]).

Возникает идея использовать осциллятор Ван дер Поля как подсистему МССП для стабилизации (в большом) колебания консервативной системы. Идею предлагается реализовать в рамках слабо связанных систем: в связанной системе осциллятор Ван дер Поля действует через одностороннюю ε -связь на консервативную систему. При этом связь — управление действует как вынуждающая сила в теории колебаний.

В теории управления, как и в теории вынужденных колебаний, динамика системы, генерирующей управляющий сигнал (СГУС), обычно оказывается за рамками рассмотрения системы управления: она дается только действием на управляемый объект. В рамках связанной системы такой “дискриминации” не происходит. Знание о динамике СГУС можно применить для построения гибкой системы управления. Односторонняя связь естественным образом выделяет СГУС в связанной системе. В работе предлагается внести в систему управления генератор колебаний с настраиваемой частотой, служащий для формирования стабилизирующего управляемого

сигнала. При этом “излагается общий принцип стабилизации колебаний консервативных систем произвольной природы за счет управляющих воздействий...”¹.

В статье для решения задачи стабилизации применяется свойство осциллятора Ван дер Поля обладать орбитально асимптотически глобально устойчивым циклом. Учитывается свобода в выборе частоты (параметр ω), амплитуды цикла (параметр K), а также возможность различной реализации (непрерывной, дискретной). Система, колебания которой стабилизируются, рассматривается, как механическая, а осциллятор Ван дер Поля – как электронная система. В этом смысле предлагается мехатронная схема стабилизации колебаний.

Уравнение Ван дер Поля широко используется в составе связанных систем (например, [3–5]) при моделировании нелинейных колебаний. Однако этот осциллятор не приводится в качестве регулятора в системе управления.

1. Постановка задачи. Предлагаемая схема стабилизации колебаний описывается связанной системой

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} &= \varepsilon k(1 - Kx^2)u_s(q, \dot{q}), \quad s = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

содержащей уравнение Ван дер Поля и управляемую консервативную систему с функцией Лагранжа L . Консервативная система и функции u_s в управлении принимаются гладкими.

В системе (1.1) применяются следующие обозначения: ω – частота линейного осциллятора, K – постоянная, амплитуда автоколебаний осциллятора Ван дер Поля в первом приближении метода усреднения равна $2/\sqrt{K}$; ε – малый параметр в уравнении Ван дер Поля и одновременно коэффициент усиления регулятора; число k имеет смысл переключателя и принимает значение 1 или (-1) . Стандартный вид уравнения Ван дер Поля, где $\omega = 1$ и $K = 1$, содержащий один только параметр ε , получается путем перехода к безразмерным переменным и времени.

В системе (1.1) динамика осциллятора Ван дер Поля через одностороннюю связь навязывается консервативной системе: осциллятор Ван дер Поля становится регулятором.

На СПД консервативной системы траектория пересекает множество M в двух различных точках. Поэтому необходимые и достаточные условия существования СПД периода T записываются в виде

$$\dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2, \quad s = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

где через $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, $q^0 \in M$, обозначается начальная точка для СПД в момент времени $t = 0$.

При $\tau = 0$ система (1.2) совместна. При $\tau = T/2$ получается система из n уравнений с $n + 1$ неизвестными. Следовательно, СПД всегда образуют семейство Σ , например по параметру T .

О п р е д е л е н и е. Случай

$$\text{rank} A = n, \quad A = \left[\frac{\partial \dot{q}_s(q^0, T/2)}{\partial q_j^0} \right]$$

называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

Согласно определению, колебания математического маятника являются невырожденными, а колебания линейного осциллятора – вырожденными.

Невырожденные СПД образуют семейство Σ , на котором период T монотонно зависит от одного параметра. Такая ситуация типична для семейства невырожденных СПД [6]. В консервативной системе за параметр обычно выбирается постоянная интеграла энергии: на Σ период $T(h_q)$ является монотонной функцией постоянной энергии h_q . Траектории на семействе Σ описываются формулой $q = \varphi(h_q, t + \gamma)$, где $q = (q_1, \dots, q_n)$ – вектор обобщенных координат лагранже-

¹ Замечание рецензента.

вой системы, γ — временной сдвиг на траектории. При $\gamma = 0$ координаты $q_s, s = \overline{1, n}$, даются четными функциями t .

В фазовом пространстве семейство Σ заполняет инвариантное двумерное многообразие $\tilde{\Sigma}$. Условия (1.2) выполняются на $\tilde{\Sigma}$ тождественно по паре (h_q, T) . Семейство Σ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

В самом деле, из условий (1.2) при $\tau = T/2$ следуют линейные равенства

$$\xi_s \equiv a_{s1}(q^0, \tau)dq_1^0 + \dots + a_{sn}(q^0, \tau)dq_n^0 + b_s(q^0, \tau)d\tau = 0, \\ a_{sj}(q^0, \tau) = \partial \dot{q}_s(q^0, \tau)/\partial q_j^0, \quad b_s = \partial \dot{q}_s(q^0, \tau)/\partial \tau; \quad s, j = \overline{1, n},$$

которые выполняются тождественно на $\tilde{\Sigma}$. Для семейства Σ справедливо условие $\text{rank } A = n$, поэтому линейным преобразованием $\eta = P\xi$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с постоянной матрицей P в векторной форме η выделяется форма a_1 : формы $\eta_2, \dots, \eta_n$ не содержат $d\tau$. Преобразование справедливо для любой точки (q^0, τ) , поэтому выделение происходит на всем $\tilde{\Sigma}$. В результате семейство Σ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Предполагается, что консервативная система в (1.1) допускает семейство Σ невырожденных СПД. Функция $T(h_q)$ может быть возрастающей или убывающей.

П р и м е р 1. Период колебаний математического маятника возрастает с ростом отклонения маятника от вертикали. Решения консервативной системы $\ddot{y} + y^3 = 0$ образуют семейство с убывающим периодом.

В работе ставится задача нахождения в связанной системе (1.1) при выбранных функциях u_s закона переключения по k , обеспечивающего существование притягивающего (в большом) цикла.

Для определенности излагается случай возрастающего периода $T(h_q)$. В конце статьи отмечается, как изменяются доказательства для убывающего периода.

2. Порождающие движения. При $\varepsilon = 0$ система (1.1) становится порождающей и распадается на линейный осциллятор и консервативную систему. Колебания линейного осциллятора описываются функцией $x = A \cos \omega(t + \beta)$, где A — амплитуда колебания, β — начальный сдвиг по траектории.

На периодических решениях порождающей системы выполняется условие $T(h_q) = 2\pi/\omega$. В силу монотонности функции $T(h_q)$ для линейного осциллятора с частотой ω находится единственное значение h_q энергии консервативной системы. Следовательно, уравнению Ван дер Поля в (1.1) из-за единственности его цикла будет соответствовать единственный цикл связанной системы. При этом энергия h_l линейного осциллятора, соответствующего циклу Ван дер Поля, равна $2\omega^2/K$, а период цикла связанной системы (1.1) совпадает с периодом цикла осциллятора Ван дер Поля.

Решение автономной системы (1.1) содержит только один начальный сдвиг, поэтому $\gamma = \beta + v$, где v — некоторое фиксированное число. Значит, все порождающие периодические решения даются формулами

$$x = A \cos \omega(t + \beta), \quad q = \varphi(h_q, t + \beta + v), \quad T(h_q) = 2\pi/\omega, \\ (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2 = h_l, \quad E_q(\varphi, \dot{\varphi}) = h_q, \quad (2.1)$$

где через $E_q(q, \dot{q})$ обозначена полная механическая энергия консервативной системы; h_q — постоянная энергии.

В случае $v = 0$ из (2.1) получается семейство $\Xi(h)$ СПД консервативной системы, содержащей линейный осциллятор и консервативную систему с координатой q , с интегралом энергии

$$\frac{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}{2} + E_q(q, \dot{q}) = h(\text{const}).$$

В ней $h = h_l + h_q$; период на семействе $\Xi(h)$ дается функцией $T = T(h)$.

Изучение вопроса о существовании периодического решения системы (1.1) при малых значениях ε сводится [1] к анализу амплитудного (бифуркационного) уравнения. Оно получается при

записи условия существования T^* -периодического решения системы (1.1) в первом по ε приближении: $T^* = T(h^*)$. Для семейства $\Xi(h)$ амплитудное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} I(h) &= I_x(h) + I_y(h) = 0, \\ I_x &\equiv \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)x^2(h, t)]\dot{x}^2(h, t)dt, \\ I_q &\equiv k \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)x^2(h, t)] \sum_{s=1}^n u_s(q, \dot{q})\dot{q}_s dt, \end{aligned}$$

где вместо функций $x(h, t)$ и $q(h, t)$ подставляются их выражения из (2.1).

Равенство $I_x(h) = 0$ выводится из уравнения Ван дер Поля и рассматривается отдельно. Оно допускает корень при любом $K(h^*)$: получается решение с амплитудой $A = 2/\sqrt{K(h^*)}$.

Изучается уравнение $I_q(h) = 0$. В силу возможности выбора $K(h^*)$ в уравнении Ван дер Поля это число берется таким, чтобы уравнение $I_q(h) = 0$ имело бы корнем число $h = h^*$. Тогда $K(h^*)$ вычисляется из равенства $I_q(h) = 0$ при подстановке вместо h значения h^* . Отсюда следует, что корень h^* существует. Далее вычисляется производная $dI_q(h^*)/dh$ и показывается, что она отлична от нуля. Тем самым доказывается рождение цикла в точке $h = h^*$ семейства $\Xi(h)$.

При $v \neq 0$ периодическое решение порождающего уравнения будет несимметричным. В этом случае анализ проводится подстановкой решения $x = x_c(h_q^*, t + \beta)$, $h_q^* = 2\omega^2/K(h^*)$, описывающего цикл Ван дер Поля, во второе уравнение системы (1.1). Тогда получается задача для неавтономного периодического уравнения, содержащего произвольный параметр β . Существование цикла в (1.1) устанавливается с помощью амплитудного уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} (1 - Kx_c^2(h_q^*, t)) \sum_{s=1}^n \tilde{u}_s(t + v) \dot{\phi}_s(h_q^*, t + v) dt &= 0, \\ \tilde{u}_s(t + v) &= u_s(q(h_q^*, t + v), \dot{q}(h_q^*, t + v)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

При этом каждому простому корню $v = v^*$ уравнения (2.2) будет отвечать цикл связанной системы (1.1).

Условия существования цикла не зависят от знака k . Поэтому цикл существует как при $k = 1$, так и при $k = -1$. Порождающие решения находятся для одного и того же (единственного) цикла Ван дер Поля. Следовательно, независимо от того или иного приведенного локального сценария рождения получается единственный цикл связанной системы. Сама реализация конкретного сценария зависит от свойств семейства Σ .

Доказательство существования цикла, свободное от выбора порождающего периодического решения, дается сначала для случая консервативной системы с одной степенью свободы. Эти результаты обобщаются на случай консервативной системы с произвольным числом степеней свободы.

3. Цикл связанной системы. В случае консервативной системы с одной степенью свободы, подверженной действию силы $(-f)$, второе уравнение системы (1.1) описывается скалярной переменной y . Функция $u(y, \dot{y})$ выбирается таким образом, чтобы в текущей точке траектории на плоскости $\Pi_y = (y, \dot{y})$, соответствующей точке осциллятора Ван дер Поля на плоскости $\Pi_x = (x, \dot{x})$, реализовалась бы диссипация: $u(y, \dot{y}) = \dot{y}$. Тогда связанная система (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}, \\ \ddot{y} + f(y) &= \varepsilon k(1 - Kx^2)\dot{y}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В уравнении Ван дер Поля энергия осциллятора E_x меняется по следующему закону:

$$\frac{dE_x}{dt} \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}^2, \quad E_x = (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2. \quad (3.2)$$

Закон изменения полной механической энергии E_y для второго уравнения системы (3.1) записывается в виде

$$\frac{dE_y}{dt} \varepsilon k(1 - Kx^2)\dot{y}^2, \quad E_y = \frac{\dot{y}^2}{2} + \int f(y)dt. \quad (3.3)$$

Любая траектория уравнения Ван дер Поля, исключая равновесие на плоскости Π_x , притягивается к циклу — кривой C_x . На цикле $E_x(t)$ становится $T^* = (2\pi/\omega)$ -периодической функцией, среднее значение которой определяется энергией h_y^* линейного осциллятора для цикла. Кривая C_x ограничивает область Ω_x , содержащую начало координат. Приращение энергии ΔE_x на отрезке $t \in [0, T^*]$ положительно в Ω_x и отрицательно вне Ω_x . На цикле $\Delta E_x = 0$, поэтому притяжение траектории к циклу сопровождается предельным переходом $\Delta E_x \rightarrow 0$. Многообразие $\tilde{\Sigma}$ принадлежит плоскости Π_y .

Для взаимного изменения энергий E_x и E_y из законов (3.2) и (3.3) выводится равенство

$$k\dot{y}^2 dE_x = \dot{x}^2 dE_y \quad (dE_x = \dot{x}^2 d\sigma, \quad dE_y = k\dot{y}^2 d\sigma, \quad d\sigma = \varepsilon(1 - Kx^2)dt), \quad (3.4)$$

справедливое при $(1 - Kx^2) \neq 0$.

При $k = 1$ равенство (3.4) выражает одновременное возрастание (убывание) энергии осциллятора Ван дер Поля и энергии консервативной системы. Отсюда получается, что приращение ΔE_y энергии E_y на отрезке $t \in [0, T^*]$ в области $\Omega_y \in \Pi_y$, отвечающей области $\Omega_x \in \Pi_x$, удовлетворяет неравенству $\Delta E_y > 0$; вне области Ω_y получается $\Delta E_y < 0$. При стремлении траектории на плоскости Π_x к циклу C_x траектория на плоскости Π_y асимптотически стремится к кривой $C_y \in \Pi_y$. При этом $\Delta E_y \rightarrow 0$, и в пределе на кривой C_y приращение $\Delta E_y = 0$. На C_y функция $E_y(t)$ становится T^* -периодической. Так как кривая C_y соответствует циклу Ван дер Поля C_x , то среднее значение функции $E_y(t)$ на C_y определяется энергией h_y^* консервативной системы для порождающего колебания.

Если точка $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$, то $\Delta E_x > 0$. Поэтому $\Delta E_y > 0$. Для точек Ω_y неравенство $\Delta E_y > 0$ приводит к притяжению точки к C_y ; точки $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ отталкиваются от C_y .

Пусть точка $(x, \dot{x}) \notin \Omega_x$, тогда $\Delta E_x < 0$. Поэтому $\Delta E_y < 0$. Для точек $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ неравенство $\Delta E_y < 0$ означает притяжение к C_y ; точки $(y, \dot{y}) \in \Omega_y$ отталкиваются от C_y .

Таким образом, при $k = 1$ существует предельное T^* -периодическое решение $C_x \times C_y$ автономной системы (1.1). По построению это решение единственное. Оно изолированное, т.е. является циклом. Цикл имеет гиперболический характер.

Аналогично доказывается, что при $k = -1$ предельное T^* -периодическое решение системы (1.1) существует. Оно совпадает с $C_x \times C_y$ и притягивает те траектории, где все время $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$ и $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ или $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$ и $(y, \dot{y}) \in \Omega_y$. В оставшихся двух областях траектории отталкиваются от цикла: цикл имеет гиперболический характер.

Заметим, что совпадение циклов при $k = 1$ и $k = -1$ не препятствуют различному устройству их окрестностей.

4. Схема управления. Закон переключения. Для консервативной системы с одной степенью свободы схема управления дается связанной системой (3.1). В ней регулятором служит осциллятор Ван дер Поля, действующий с малым коэффициентом ε усиления. В (3.1) стабилизуется (в большом) цикл связанной системы, состоящий из цикла Ван дер Поля и колебания ε -скорректированной консервативной системы. Периоду T^* консервативной системы отвечает энергия $E_y^* = h_y^*$. Частота ω осциллятора Ван дер Поля выбирается из условия $T^* = 2\pi/\omega$.

Единственный цикл системы (1.1) существует как при $k = 1$, так и при $k = -1$. Циклу отвечают значения энергии линейного осциллятора h_y^* и консервативной системы h_y^* .

Вводится плоскость (h_x, h_y) с началом координат в точке (h_x^*, h_y^*) . Согласно анализу, в разд. 3 для первого и третьего квадрантов число $k = 1$ обеспечивает притяжение траекторий к циклу; для второго и четвертого квадрантов значение k , обеспечивающего такое притяжение, равняется (-1) .

С учетом данного факта в системе (1.1) строится переключение по k и конструируется кусочно-гладкая управляемая система, обеспечивающая притяжение всех траекторий в (1.1) к циклу $C_x \times C_y$. Тем самым решается задача стабилизации (в большом) цикла $C_x \times C_y$, а значит, и колебания консервативной системы, отвечающей циклу.

Захват колебания происходит настройкой частоты ω линейного осциллятора на период T^* колебания консервативной системы.

Как результат формулируется теорема 1.

Т е о р е м а 1. Пусть при $\varepsilon = 0$ второе уравнение в (3.1) допускает многообразие $\tilde{\Sigma}$, заполненное семейством Σ невырожденных симметричных периодических движений. Тогда связанная система (3.1) имеет единственный притягивающий цикл $C_x \times C_y$, отвечающий энергии h_l^* линейного осциллятора и энергии h_y^* консервативной системы. При этом на плоскости (h_l, h_y) с началом координат в точке (h_l^*, h_y^*) используется следующий закон переключения: $k = 1$ для первого и третьего квадрантов, $k = -1$ для второго и четвертого квадрантов. На плоскости $(y, \dot{y})$ область притяжения к C_y совпадает с $\tilde{\Sigma}$.

З а м е ч а н и е 1. В условиях выполнения теоремы 1 все траектории связанной системы (3.1) в четырехмерном пространстве $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ притягиваются к циклу, который состоит из цикла Ван дер Поля — кривой C_x на плоскости Π_x и замкнутой кривой C_y на плоскости Π_y .

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 1 следует стабилизация (в большом) цикла связанной системы (3.1). Область притяжения траекторий консервативной системы к кривой C_y совпадает с многообразием $\tilde{\Sigma}$.

П р и м е р 2. Движение спутника в плоскости орбиты под действием гравитационных сил описывается уравнением В.В. Белецкого [7]. Для круговой орбиты уравнение приобретает вид

$$\ddot{\alpha} + \mu \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dv},$$

где μ — инерциальный параметр ($|\mu| \leq 3$), α — угол между радиус-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты, v — истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. Получается уравнение математического маятника

$$\ddot{y} + \mu \sin y = 0, \quad \mu > 0, \quad y = 2\alpha$$

или

$$\ddot{y} + |\mu| \sin y = 0, \quad \mu < 0, \quad y = 2\alpha + \pi.$$

Колебания спутника образуют семейство от начального отклонения по углу y , на котором период $T(h_y)$ возрастает.

С помощью схемы

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \\ \ddot{y} + |\mu| \sin y &= k\varepsilon(1 - x^2)\dot{y}, \end{aligned}$$

где $y = 2\alpha$ при $\mu > 0$ и $y = 2\alpha + \pi$, если $\mu < 0$, любое колебание спутника выбором частоты ω настраивается на режим притягивающего (в большом) цикла с периодом $2\pi/\omega$.

5. Консервативная система с n степенями свободы. В случае консервативной системы с n степенями свободы управление в связанной системе (1.1) выбирается с функцией

$$u_s = \sum_{j=1}^n r_{sj} \dot{q}_j, \quad s = \overline{1, n}, \quad (5.1)$$

где $\|r_{sj}\|$ — постоянная матрица. Тогда изменение полной механической энергии E_q консервативной системы происходит по закону

$$\frac{dE_q}{dt} = \varepsilon k (1 - Kx^2) \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n r_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j, \quad (5.2)$$

в котором функция x удовлетворяет уравнению Ван дер Поля. В частном случае $n = 1$ из (5.2) получается формула (3.3).

Из законов (3.2) и (5.2) изменения энергии следует равенство

$$k \sum_{s=1, j=1}^n r_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j dE_x = \dot{x}^2 dE_q, \quad (5.3)$$

$$dE_x = \dot{x}^2 d\sigma, \quad dE_q = k \sum_{s=1, j=1}^n r_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j d\sigma, \quad d\sigma = \varepsilon(1 - Kx^2)dt.$$

Сравнение (3.4) и (5.3) показывает, что в случае положительно-определенной квадратичной формы

$$R = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n r_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j > 0 \quad (5.4)$$

полная энергия системы в окрестности $\tilde{\Sigma}$ меняется так же, как и на $\tilde{\Sigma}$. Поэтому приращение ΔE_q энергии E_q за период $T^* = 2\pi/\omega$ следует за приращением ΔE_x по сценарию для ΔE_y в разд. 3. При этом $\Delta E_q \rightarrow 0$, когда $\Delta E_x \rightarrow 0$, а предельная функция $E_q(t)$ становится T^* -периодической.

В окрестности $\tilde{\Sigma}$ вводятся координаты y и $z = (z_2, \dots, z_n)$, где переменной y описывается на $\tilde{\Sigma}$ консервативная система с одной степенью; $z = 0$ на $\tilde{\Sigma}$. При $z \neq 0$ энергия E_q представляется суммой: $E_q = E_y + E_z$, где E_y — энергия консервативной системы на $\tilde{\Sigma}$. В связанной системе (3.1) справедлив предельный переход $\Delta E_y \rightarrow 0$. Поэтому $\Delta(E_q - E_y) \rightarrow 0$. В силу T^* -периодичности предельных функций $E_q(t)$ и $E_y(t)$ функция $E_z(t)$ будет T^* -периодической. Колебания по переменной z рассматриваются близ точки $z = 0$. В случае, когда в системе по z коэффициенты $\lambda_i, i = 2, \dots, n$, устойчивости Пуанкаре положительны, получается

$$(z \neq 0) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=2}^n \lambda_i z_i^2 > 0 \right).$$

Поэтому при $\Delta(E_q - E_y) \rightarrow 0$ также $E_z \rightarrow 0$.

Таким образом, точки окрестности $\tilde{\Sigma}$ притягиваются к кривой $C_y \in \tilde{\Sigma}$: связанная система (1.1) имеет единственный цикл $C_x \times C_y$.

Заметим, что в случае $\lambda_i > 0$ корни соответствующего характеристического уравнения являются чисто мнимыми.

Теорема 2. Пусть консервативная механическая система допускает семейство невырожденных симметричных периодических движений Σ , заполняющее двумерное многообразие $\tilde{\Sigma}$: характеристические показатели для $\tilde{\Sigma}$ предполагаются чисто мнимыми. Тогда в связанной системе (1.1) с функцией (5.1), где форма (5.4) положительно определена, реализуется единственный притягивающий цикл $C_x \times C_y$, отвечающий энергии h_l^* линейного осциллятора и энергии h_q^* консервативной системы. При этом на плоскости (h_l, h_q) с началом координат в точке (h_l^*, h_q^*) используется следующий закон переключения: $k = 1$ для первого и третьего квадрантов, $k = -1$ для второго и четвертого квадрантов. Выход системы на режим цикла из точек окрестности $\tilde{\Sigma}$ происходит так, что траектории управляемой консервативной системы притягиваются к кривой $C_y \in \tilde{\Sigma}$, отвечающей циклу $C_x \times C_y$.

З а м е ч а н и е 3. Цикл $C_x \times C_y$ орбитально асимптотически устойчив в большом.

З а м е ч а н и е 4. Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми для семейства Σ с убывающим периодом: в доказательствах знак числа k меняется на противоположный.

Заключение. В мехатронной схеме стабилизации колебаний осциллятор Ван дер Поля становится регулятором, генерируя управление своей динамикой. Его динамика через одностороннюю ε -слабую связь навязывается консервативной системе, что приводит всю связанную систему к режиму притягивающего (в большом) цикла. При этом в ε -скорректированной консерва-

тивной системе реализуется асимптотически устойчивое колебание, ε -близкое к колебанию консервативной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // *АиТ*. 2016. № 6. С. 38–46.
2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
3. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // *Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation*. 2007. V. 12. № 5. P. 794–803.
4. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
5. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // *J. Appl. Nonlin. Dynam.* 2014. V. 3. № 3. P. 271–282.
6. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
7. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // *Искусственные спутники Земли*. 1958. № 1. С. 25–43.