

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 517.929.4+517.444

**ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА
И СВОЙСТВО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ
УСТОЙЧИВЫХ ПОЛИНОМОВ¹**

© 2022 г. А. М. Цирлин

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Поступила в редакцию 20.08.2021 г.

После доработки 13.09.2021 г.

Принята к публикации 27.09.2021 г.

Показано, что из теоремы Ляпунова о свойствах распределения суммы случайных величин с различными плотностями распределения следуют условия, при которых коэффициенты устойчивых полиномов не только положительны, но их последовательность с ростом степени полинома приближается к нормальному распределению. Эта последовательность унимодальна, номер максимального коэффициента и его значение нетрудно вычислить по приведенным в статье формулам. Дополнительные признаки устойчивости позволяют приблизить необходимые условия устойчивости, основанные на последовательности коэффициентов полинома, к необходимым и достаточным, не используя алгебраические и частотные критерии устойчивости.

DOI: 10.31857/S0002338822010115

0. Введение. Рассмотрим проблему анализа устойчивости линейных динамических систем. Полином

$$P_n(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0 \quad (0.1)$$

с действительными коэффициентами называют устойчивым, если действительные части всех корней характеристического уравнения $P_n(y) = 0$ отрицательны.

Согласно основной теореме алгебры, этот полином может быть представлен в форме произведений элементарных полиномов вида $P_i(y) = y + r_i$ и $P_{2i}(y) = y^2 + 2r_i y + (\omega_i^2 + r_i^2)$, где $-r_i$ и ω_i — действительная и мнимая части комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Полином $P_n(y)$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчив каждый из элементарных полиномов.

В свою очередь для устойчивости каждого из элементарных полиномов необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были положительны. Коэффициенты полинома $P_n(y)$ представляют собой свертку коэффициентов элементарных полиномов, так что у устойчивого полинома они заведомо положительны. Это свойство легко проверяется, но оно не достаточно. Полином с положительными коэффициентами может быть и неустойчивым. Необходимые и достаточные условия устойчивости дают алгебраические критерии Рауса, Гурвица, частотные критерии Михайлова–Найквиста [1]. Использование этих критериев при большом значении n достаточно трудоемко.

Ниже сделана попытка найти дополнительные признаки, которые характерны для последовательности коэффициентов устойчивых полиномов. Эти признаки вытекают из свойств операции свертки.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-61-46013).

Операция свертки функций действительного переменного — одна из самых распространенных в прикладной математике [2–7]. Она имеет форму

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (0.2)$$

в непрерывном и

$$z(j) = x(j) * y(j) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i y_{j-i} \quad (0.3)$$

в дискретном случаях.

Приведем два примера.

Плотность распределения суммы z независимых случайных величин x и y представляет собой свертку плотностей распределения каждой из них. Так что

$$p_z(z) = p_x(z) * p_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)p_y(z - x)dx. \quad (0.4)$$

Коэффициенты c_j произведения $P_{n+m}(x)$ двух полиномов вида

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, \quad (0.5)$$

и

$$P_m(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m$$

равны свертке последовательностей их коэффициентов

$$c_j = \sum_{i=0}^n a_i b_{j-i}, \quad j = 0, \dots, n + m, \quad a_0 = b_0 = 1. \quad (0.6)$$

Коэффициенты $b_{i-j} = 0$ при $i - j < 0$ и $i - j > m$.

Некоторые теоремы теории вероятностей, по существу, определяют свойства операции свертки и полностью справедливы применительно к последовательностям коэффициентов полиномов [3].

Приведем некоторые свойства операции свертки [4].

1. Свертка коммутативна, так что

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

2. Свертка ассоциативна:

$$x(t) * (y_1(t) * y_2(t)) = (x(t) * y_1(t)) * y_2(t).$$

3. Свертка дистрибутивна относительно сложения:

$$x(t) * (y_1(t) + y_2(t)) = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t).$$

4. Площадь под кривой $z(t)$, если она ограничена, равна произведению площадей под кривыми $x(t)$ и $y(t)$. Как следствие, если $x(t)$ и $y(t)$ неотрицательны и их площадь равна единице, то их свертка $z(t)$ также имеет единичную площадь.

5. Ее первый момент

$$m_z = \int_0^{\infty} tz(t)dt = m_x + m_y, \quad (0.7)$$

а второй центральный момент

$$d_z = \int_0^{\infty} (t - m_z)^2 z(t)dt = d_x + d_y. \quad (0.8)$$

В теории вероятностей первый момент — математическое ожидание, а второй центральный — дисперсия случайной величины.

1. Предельные теоремы теории вероятностей. 1.1. Теорема Муавра–Лапласа. Согласно предельной теореме Муавра–Лапласа, при стремлении числа опытов n к бесконечности вероятность того, что случайная величина, принимающая с вероятностью p значение единица и с вероятностью $q = 1 - p$ значение ноль, в i -опытах окажется равной единице:

$$b_{ni} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n}} e^{-\frac{x^2(i,n)}{2}} (1 + \delta_n) = N(i, n)(1 + \delta_n). \tag{1.1}$$

В этом выражении

$$x(i, n) = \frac{i - M_n}{\sqrt{D_n}}, \tag{1.2}$$

где M_n и D_n – математическое ожидание и дисперсия суммы n одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения единица и ноль. В данном случае они равны np и npq соответственно. Зависимость $x(i, n)$ равномерно по i, n ограничена, т.е. существуют такие значения A и B , что $-\infty < A \leq x(i, n) \leq B < \infty$.

Величина δ_n , определяющая различие между последовательностью b_{ni} и нормальным дискретным распределением $N(i, n)$, стремится к нулю с ростом n так, что равномерно по i

$$|\delta_n| < \frac{C}{\sqrt{n}}, \tag{1.3}$$

где C – положительная константа, не зависящая от n, i . Свойство (1.1) называют свойством асимптотической нормальности.

1.2. **Формулировка Ляпунова центральной предельной теоремы.** В этой формулировке центральной предельной теоремы (ЦПТ) не требуется, чтобы сворачиваемые дискретные плотности распределения были одинаковы. Она утверждает, что при некотором доказанном Ляпуновым условии результат свертки неотрицательных функций, сумма ординат которых равна единице, имеющих первый и второй центральный моменты (см. (0.7), (0.8)), а также абсолютный центральный момент степени, большей двух, для достаточно большого значения n приближается к нормальному распределению $N(i, n)$, фигурирующему в (1.1).

Через c_k обозначим абсолютный центральный момент степени, большей двух, для k -го элементарного полинома $P_i(y)$, имеющего нормированные коэффициенты b_{jk} , т.е.

$$c_k(\epsilon) = \sum_{j=0}^n |j - m_k|^{2+\epsilon} b_{jk},$$

где $\epsilon > 0$. Обозначим через

$$C_n(\epsilon) = \sum_{i=1}^n c_k(\epsilon),$$

где n – число элементарных полиномов.

Формулировка Ляпунова ЦПТ состоит в следующем.

Теорема [8, 9]. Для того, чтобы плотность распределения свертки положительных нормированных дискретных функций была асимптотически нормальной, достаточно существования такого значения $\epsilon_0 > 0$, чтобы для всех $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n(\epsilon)}{D_n^{1+0.5\epsilon}} = 0. \tag{1.4}$$

Дробь $L_n(\epsilon)$ в левой части этого выражения называют дробью Ляпунова.

Протицируем оценку этой теоремы из посвященной ей статьи в Википедии: “*Практическое значение теоремы Ляпунова огромно. Опыт показывает, что закон распределения суммы независимых случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию, достаточно быстро приближается к нормальному. Уже при числе слагаемых порядка десяти закон распределения суммы можно заменить на нормальный*”.

2. Преобразования полиномов. Рассмотрим линейную динамическую систему, характеристическое уравнение которой имеет форму

$$P_n(y) = \sum_{i=n}^0 a_i y^i = 0, \quad (2.1)$$

где a_i — действительные коэффициенты.

Будем предполагать, что действительные части корней характеристического уравнения устойчивого полинома *отделены от нуля*, т.е. найдется такое не зависящее от n значение $\rho > 0$, что расстояния всех корней уравнения (2.1) от мнимой оси $r_i \geq \rho$. Для устойчивого полинома коэффициенты каждого из элементарных полиномов также отделены от нуля.

Элементарный полином первой степени $P_{1i}(y) = y + r_i$ соответствует действительному отрицательному корню, расположенному на расстоянии r_i от мнимой оси. Элементарный полином второй степени

$$P_{2i}(y) = y^2 + 2r_i y + r_i^2 + \omega_i^2 \quad (2.2)$$

соответствует паре комплексно-сопряженных корней с действительной частью $-r_i$ и мнимой частью $\pm\omega_i$.

Далее будем нормировать коэффициенты полинома, разделив каждый коэффициент на их сумму, так что для полинома $P_{li}(y)$ коэффициенты после нормировки равны

$$p_i = 1/(1 + r_i), \quad q_i = 1 - p_i = r_i/(1 + r_i) \quad (2.3)$$

при y в первой и в нулевой степенях соответственно. Первый и второй центральный моменты для такого полинома:

$$m_{1i} = p_i, \quad d_{1i} = p_i q_i. \quad (2.4)$$

Для элементарного полинома второй степени (2.2) после нормирования коэффициенты при y — в квадрате, в первой и нулевой степени

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i}, \quad z_i = \frac{2r_i}{\sigma_i}, \quad q_i = \frac{r_i^2 + \omega_i^2}{\sigma_i}. \quad (2.5)$$

Здесь через σ_i обозначена сумма коэффициентов полинома второй степени:

$$\sigma_i = (1 + r_i)^2 + \omega_i^2.$$

Первый и второй центральный моменты последовательности коэффициентов устойчивого полинома второй степени равны

$$m_{2i} = z_i + 2p_i, \quad d_{2i} = m_{2i}^2 q_i + (1 - m_{2i})^2 z_i + (2 - m_{2i})^2 p_i. \quad (2.6)$$

Нормированная последовательность коэффициентов

$$b_i = \frac{a_i}{R_n}, \quad R_n = \sum_{i=0}^n a_i \quad (2.7)$$

полинома $P_n(y)$ (см. (2.1)) равна свертке нормированных последовательностей коэффициентов элементарных полиномов, а ее первый и второй центральный моменты, равные сумме соответствующих моментов элементарных полиномов (см. свойство 5 свертки), могут быть подсчитаны непосредственно через b_i :

$$M_n = \sum_{i=0}^n i b_i, \quad D_n = \sum_{i=0}^n (i - M_n)^2 b_i. \quad (2.8)$$

Первоначально рассмотрим случай, когда все корни полинома $P_n(y)$ действительные и кратные, т.е. он равен с учетом нормировки

$$P_n(y) = \left(\frac{y}{1+r} + \frac{r}{1+r} \right)^n = (py + q)^n. \quad (2.9)$$

Коэффициенты этого полинома образуют последовательность биномиальных коэффициентов [8, 10]:

$$b_{ni} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{1}{1+r}\right)^i \left(\frac{r}{1+r}\right)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

По теореме Муавра–Лапласа эта последовательность асимптотически нормальна.

Теорему Муавра–Лапласа обычно относят к теории вероятностей. Но, по существу, она посвящена свойству последовательных сверток положительных нормированных дискретных функций. В случае биномиальных коэффициентов эти дискретные функции одинаковы. Поэтому свертка коэффициентов элементарных полиномов с одинаковыми действительными корнями асимптотически нормальна.

То же относится и к теореме Ляпунова. Распределения случайных величин лишь одно из ее приложений. Как и классическая формулировка ЦПТ, теорема Ляпунова определяет свойство свертки детерминированных положительных функций, для каждой из которых существуют m_i, d_i, c_i . Эти функции могут быть разными. Для асимптотической нормальности их свертки достаточно выполнения условия (1.4). В качестве меры погрешности приближения δ_n используется дробь Ляпунова или функция от нее, стремящаяся к нулю при $L_n \rightarrow 0$. Далее рассмотрены следствия из этой теоремы применительно к устойчивым полиномам.

3. Условие асимптотической нормальности последовательности коэффициентов устойчивых полиномов. Нормированная последовательность b_i коэффициентов полинома $P_n(y)$ представляет собой свертку нормированных последовательностей коэффициентов элементарных полиномов.

Роль плотностей распределения играют нормированные последовательности положительных коэффициентов элементарных полиномов.

Эти коэффициенты меньше единицы и равны нулю при $i > 2$ и $i < 0$, так что для них все перечисленные в теореме Ляпунова моменты существуют. Они определены значениями корней характеристического уравнения.

Таким образом, из теоремы Ляпунова вытекает следствие.

С л е д с т в и е. Для того, чтобы последовательность коэффициентов устойчивого полинома $P_n(y)$ обладала свойством асимптотической нормальности, достаточно, чтобы характеристики элементарных полиномов $m_i, d_i, c_i(\epsilon)$ удовлетворяли условию (1.4) при $\epsilon > 0$.

Конкретизируем это утверждение для нашей задачи.

1. Так как коэффициенты элементарных полиномов отделены от нуля, то второй центральный момент каждого из них $d_i \geq \delta > 0$. В силу этого с ростом n второй центральный момент D_n полинома P_n неограниченно возрастает.

2. В силу малости ϵ и гладкости зависимостей $c_i(\epsilon)$ числитель дроби Ляпунова может быть представлен в форме $C_n = D_n + \epsilon S_n + o(\epsilon)$, где

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dc_i}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0},$$

а остаточный член $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Покажем, что для справедливости условия Ляпунова достаточно выполнения неравенства:

$$\left(\frac{dc_i}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} < 0 \quad \forall i. \quad (3.1)$$

Здесь, как и выше, строгое неравенство соответствует тому, что найдется такое значение $\eta < 0$, что для всех значений i производная, фигурирующая в условии (3.1), не превосходит η .

Если неравенство (3.1) выполнено, то для каждого из элементарных полиномов $d_i > c_i(\epsilon)$. В этом случае $C_n(\epsilon) < C_n(0) = D_n$ и справедливо неравенство

$$L_n(\epsilon) < \frac{D_n}{D_n^{1+0.5\epsilon}} = \frac{1}{D_n^{0.5\epsilon}}. \quad (3.2)$$

С ростом D_n правая, а значит, и левая части неравенства стремятся к нулю.

3.1. Полином с действительными корнями. Покажем, что условию (3.1) удовлетворяет полином с отрицательными действительными корнями, находящимися от мнимой оси на расстояниях r_i . Выражения для моментов такого полинома записаны в (2.6).

Центральный момент $c_i(\epsilon)$ для такой последовательности коэффициентов равен:

$$c_i = p_i^{2+\epsilon} q_i + (1 - p_i)^{2+\epsilon} p_i = p_i q_i (p_i^{1+\epsilon} + q_i^{1+\epsilon}) = d_i R_i(\epsilon). \quad (3.3)$$

Производная

$$\left(\frac{dc_i}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = d_i (p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) = d_i [p_i \ln p_i + (1 - p_i) \ln(1 - p_i)] < 0. \quad (3.4)$$

Здесь учтено, что сумма коэффициентов $p + q = 1$ и они строго положительные. При этих условиях функция Гиббса, стоящая в неравенстве (3.4) в квадратных скобках, отрицательная для $0 < p < 1$.

Таким образом условие (3.1) выполнено, и для любого устойчивого полинома с действительными корнями последовательность его коэффициентов асимптотически нормальна.

3.2. Полином с комплексными корнями. Значения $m_i, d_i, c_i(\epsilon)$ могут быть подсчитаны для элементарного полинома второй степени, соответствующего паре комплексно-сопряженных корней $P_i(y) = y^2 + 2r_i y + r_i^2 + \omega_i^2$, по формулам (2.5)–(2.6).

Абсолютный момент степени, большей двух, для элементарного квадратного полинома

$$c_i(\epsilon) = p_i m_i^{2+\epsilon} + z_i |1 - m_i|^{2+\epsilon} + q_i (2 - m_i)^{2+\epsilon}. \quad (3.5)$$

Каждый из этих моментов зависит от действительной и мнимой частей корней r_i, ω_i в соответствии с (2.5)–(2.6).

Для выполнения условия Ляпунова достаточно, чтобы для любого i , выполнялось условие (3.1). Учитывая, что производная A^ϵ по ϵ равна $A^\epsilon \ln A$, и устремляя ϵ к нулю, получим требование неположительности производной:

$$q_i m_i^2 \ln m_i + z_i (1 - m_i)^2 \ln |1 - m_i| + p_i (2 - m_i)^2 \ln(2 - m_i) \leq 0. \quad (3.6)$$

При стремлении m_i к нулю, к единице и к двум левая часть неравенства (3.6) стремится к $-\infty$.

На рис. 1 заштрихована область, в которой полином второй степени устойчив, но неравенство (3.6) нарушено и выполнение условий Ляпунова не гарантировано. Здесь q и m представляют собой коэффициент при y в нулевой степени и первый момент последовательности коэффициентов и вычисляются по формулам (2.5), (2.6).

Верхней границе заштрихованной области (прямой на рисунке) соответствуют мнимые корни полинома. Для всех коэффициентов полинома, которым соответствует точка, лежащая ниже заштрихованной области, асимптотическая нормальность гарантирована.

Если устойчивый полином $P_n(y)$ имеет несколько комплексных корней, то условие асимптотической нормальности может быть нарушено, если в заштрихованной области окажутся все комплексные корни.

На рис. 2 показан вид последовательности коэффициентов устойчивого полинома.

Для того, чтобы проверить, является ли полином достаточно большой степени устойчивым, нужно найти M_n и D_n по приведенным выше формулам (2.8). Последовательность коэффициентов a_i устойчивого полинома должна быть унимодальной, причем максимум ее достигается в точке i^* , ближайшей слева или справа к величине M_n , а максимальное значение коэффициента должно быть приближенно равно

$$a_{i^*} = \frac{R_n}{\sqrt{2\pi D_n}}. \quad (3.7)$$

4. Примеры. 4.1. Устойчивый полином. Рассмотрим полином пятой степени

$$P_5(y) = 4 + 14y + 20y^2 + 15y^3 + 6y^4 + y^5. \quad (4.1)$$

Его коэффициенты положительны, их последовательность имеет единственный максимум при $i = 2$, а значение максимального коэффициента равно 20. Сумма коэффициентов полинома $R_n = 60$.

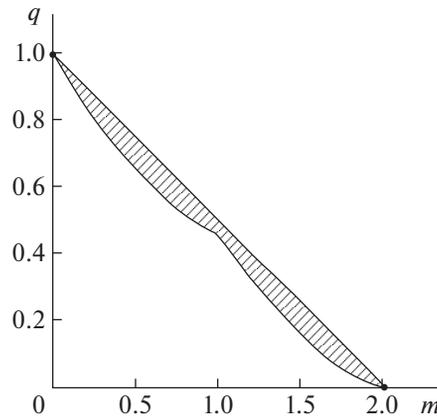


Рис. 1. Граница выполнения условия Ляпунова для полинома второй степени

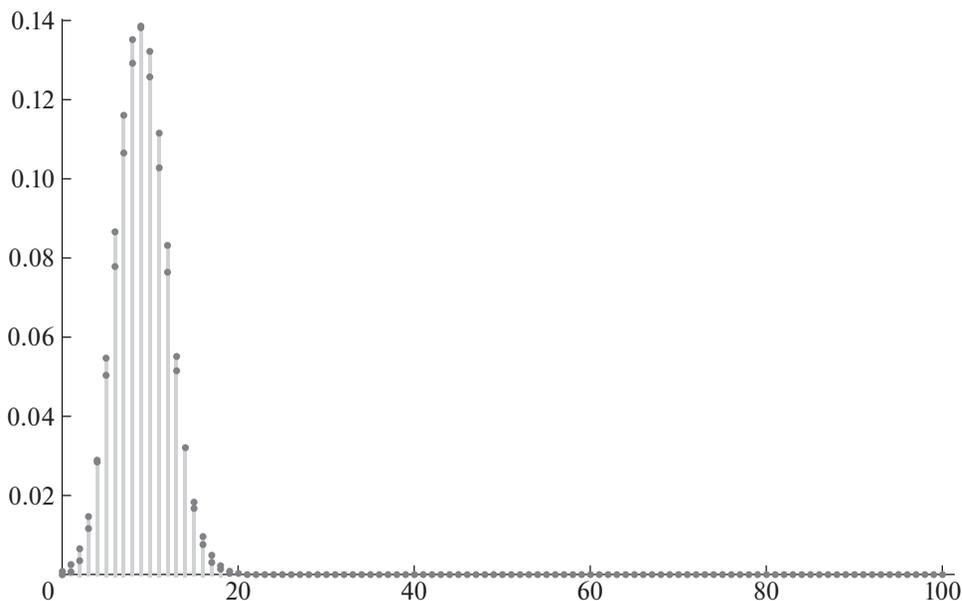


Рис. 2. Коэффициенты b_i полинома $(p + qy)^n$ в зависимости от i ($n = 100$)

Сравним эти значения с величинами, соответствующими асимптотической нормальности последовательности коэффициентов. После деления каждого из коэффициентов на их сумму и вычисления моментов по формуле (2.8) получим $M_n = 2.13$, $D_n = 1.28$. Величина максимального коэффициента, вычисленная по формуле (3.7), равна 21.14. Таким образом, уже для $n = 5$ фактический номер максимального коэффициента и его величина близки к их значениям, соответствующим нормальному распределению, что позволяет сделать вывод об устойчивости полинома.

Полином (4.1) устойчив, имеет действительные корни в точках -1 (кратности 2) и -2 и комплексно-сопряженные с действительной частью -1 и мнимой ± 1 .

4.2. Неустойчивый полином. Рассмотрим полином пятой степени

$$P_5(y) = 10 + 21y + 12y^2 + 2y^3 + 2y^4 + y^5. \tag{4.2}$$

Все его коэффициенты положительны, их последовательность унимодальна, а их сумма равна $R_n = 48$. Те же расчеты, что и для полинома (4.1), приводят к значениям $M_n = 1.33$, $D_n = 1.22$. Расчетная величина максимального коэффициента, найденная по формуле (3.7), равна 17.32, что существенно меньше его реального значения.

Полином (4.2) неустойчив, имеет действительные корни в точках -1 (кратности 2) и -2 и два комплексно-сопряженных с действительной частью $+1$ и мнимой ± 2 .

Заключение. Доказано, что коэффициенты устойчивых полиномов не только положительны, но и их последовательность асимптотически нормальна, а значит, имеет единственный максимум. Получены формулы для оценки номера и величины максимального коэффициента. Близость этих оценок к реальным значениям номера и величины этого коэффициента является дополнительным признаком устойчивости и освобождает от необходимости использования частотных или алгебраических критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.
2. *Хиришман И.И., Уиддер Д.В.* Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
3. *Цирлин А.М., Заева М.А.* Преобразования операции свертки в сумму и асимптотическое поведение коэффициентов устойчивых полиномов // Программные системы: теория и приложения. 2019. Т. 10. № 4 (43). С. 141–161.
4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Гарднер М.Ф., Бернс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах. М.: Физматгиз, 1961.
6. *Карслоу Х., Егер Ф.* Операционные методы в прикладной математике. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
7. *Микусинский Я.* Операторное исчисление. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
8. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, 2005.
9. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Либроком, 2009.