ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 22–28

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5.037

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ[1]

И. Н. Барабанов[a,*], В. Н. Тхай[a,**]

[a] ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*e-mail: ivbar@ipu.ru

**e-mail: tkhaivn@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.
После доработки 21.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматриваются связанные консервативные системы, каждая из которых в отсутствие связи допускает семейство одночастотных колебаний. Решается задача стабилизации колебания всей системы. Находятся гладкие автономные универсальные связи-управления, строится орбитально асимптотически устойчивый цикл, устанавливается естественная стабилизация цикла, выводится синхронизация колебаний консервативных систем по частоте и фазе.

DOI: 10.31857/S0002338822020056

Введение. Фазовое пространство механической системы, подверженной действию позиционных сил, симметрично относительно неподвижного множества системы $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$, где q – обобщенная координата. Одночастотные колебания относятся к классу симметричных периодических движений (СПД). Поэтому в рамках самой модели механической системы с позиционными силами колебания не могут быть орбитально асимптотически устойчивыми. Для того, чтобы добиться такой устойчивости, необходимо прилагать силу, нарушающую симметрию фазового портрета системы. В случае равновесия для этой цели используется диссипация Релея.

Дополнительная сила действует как управление, и тем самым ставится задача стабилизации колебания управляемой механической системы. В случае малой силы стабилизируемое колебание будет близким к колебанию самой механической системы. Малая сила обычно приводит к локальной стабилизации. Однако существуют такие системы, где действие малой силы оказывает глобальный стабилизирующий эффект, в частности, это происходит в уравнении Ван дер Поля. Оказывается, для отдельной механической системы управление типа Ван дер Поля носит универсальный характер [1, 2]. Гладкое управление дается нелинейной функцией, приводящей к диссипации в каждой текущей точке цикла.

В настоящее время в различных областях знаний активно исследуются связанные системы. Классическим примером в механике является симпатический маятник Зоммерфельда, некоторые другие примеры находятся в [3–12]. Предметом дальнейшего рассмотрения в статье будут связанные механические системы.

При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы, в [13] предложено выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебаний связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения иных управлений. Встает вопрос о реализации такой связи-управления на основе универсального управления, предложенного для отдельной системы в [1, 2].

В работе рассматриваются слабо связанные консервативные механические системы. Предполагается, что в каждой из них в отсутствие связи существует семейство невырожденных периодических движений, пересечение которых образует подобное семейство для всех систем. Находятся структура и конкретный вид универсальных связей–управлений, решаются задачи существования, устойчивости и естественной стабилизации колебания. Показывается, что в цикле

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00146).

происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе. При этом сначала подробно исследуется отдельная система; результаты обобщаются на связанные консервативные системы.

1. Многомерная механическая система как связанная система. Для описания механической системы используются уравнения Лагранжа второго рода; q – обобщенная координата. Предполагается, что система подвержена действию позицонных сил (потенциальных и неконсервативно позицинных) и допускает периодическое движение. В силу симметрии фазового пространства относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$ скорость $\dot{q}$ на M обращается в ноль, а само периодическое движение является симметричным относительно M и представляет собой СПД.

Необходимые и достаточные условия существования СПД с периодом T даются равенствами

$$\dot{q}_s(q_1^0, \ldots, q_n^0, \tau) = 0; \quad \tau = 0, T/2; \quad s = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

где q^0 – начальная точка при $t = 0$. Отсюда следует, что СПД образуют семейства, например, по параметру T.

Используется следующее определение невырожденного СПД.

Определение. Случай $\operatorname{rank}\|\partial\dot{q}(q^0, T/2)/\partial q^0\| = n$ называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

Согласно определению, колебания математического маятника будут невырожденными, а колебания линейного осциллятора – вырожденными.

Невырожденные СПД в фазовом пространстве заполняют инвариантное двумерное многообразие $\tilde{\Sigma}$; период на семействе СПД монотонно зависит от одного параметра [14]. Такая ситуация типична для семейства невырожденных СПД. В консервативной системе за параметр h семейства колебаний Σ обычно выбирается постоянная интеграла энергии; на Σ обобщенная координата описывается формулой $q = \varphi(h, t + \gamma)$, где γ – временной сдвиг на траектории. При $\gamma = 0$ координата q дается четной функцией времени t.

Доказывается, что семейство невырожденных СПД в многомерной системе описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

В самом деле, из условий (1.1) при $\tau = T/2$ следуют линейные равенства

$$\begin{gathered} d\xi_s \equiv b_{s1}(q^0, \tau)dq_1^0 + \ldots + b_{sn}(q^0, \tau)dq_n^0 + c_s(q^0, \tau)dt = 0, \\ B = \left\|b_{sj}(q^0, \tau)\right\|, \quad b_{sj}(q^0, \tau) = \partial\dot{q}_s(q^0, \tau)/\partial q_j^0, \\ C = \left\|c_s(q^0, \tau)\right\|, \quad c_s = \partial\dot{q}_s(q^0, \tau)/\partial t = \ddot{q}_s(q^0, \tau); \quad s, j = \overline{1, n}, \end{gathered}$$

которые выполняются тождественно на $\tilde{\Sigma}$. Для семейства невырожденных СПД справедливо условие $\det B = n$, а вектор ускорения $C = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ на СПД отличен от нулевого. Поэтому посредством линейного преобразования $d\eta = Pd\xi$, $d\xi = (d\xi_1, \ldots, d\xi_n)^{\mathrm{T}}$, с постоянной матрицей $P = \|p_{sj}\|$, удовлетворяющй условиям $d\eta_2 = 0, \ldots, d\eta_n = 0$, в векторной форме $d\eta$ выделяется форма $d\eta_1$. Преобразование справедливо для любой точки (q^0, τ), поэтому выделение происходит на всем $\tilde{\Sigma}$. Тогда на $\tilde{\Sigma}$ получается:

$$\begin{gathered} d\eta_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{1j}(q^0, \tau)dq_j^0 + \tilde{c}_1(q^0, \tau)dt = 0, \\ d\eta_k(q^0, \tau) = 0, \quad k = \overline{2, n}, \\ \tilde{c}_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{1j}c_j(q^0, \tau). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Для семейства Σ невырожденных СПД найденное линейное преобразование означает существование координат $w_1, \ldots, w_n$, таких, что $n-1$ из них на Σ принимают нулевые значения:

$w_2 = 0, \ldots, w_n = 0$. Начальная точка q^0 на Σ является функцией одного параметра, например начального значения w_1^0 переменной w_1. Поэтому из первого равенства в (1.2) получается

$$\ddot{w}_1 + \tilde{c}_1 w_1 = 0,$$

и динамика на $\tilde{\Sigma}$ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Таким образом, в механической системе с $n > 1$ степенями свободы всегда выделяется консервативная система с одной степенью свободы, в которой, собственно, и реализуется семейство Σ. Поэтому многомерная система может рассматриваться как связанная система.

2. Конструирование управляемой механической системы. Пусть рассматриваемая консервативная система допускает семейство Σ невырожденных СПД по параметру h – постоянной интеграла энергии. Ему отвечает пара нулевых характеристических показателей (ХП) в жордановой клетке. Остальные ХП в консервативной системе образуют пары чисел противоположного знака. При действии малого управления одно из чисел в паре, находясь в положительной полуплоскости, остается в этой полуплоскости. Поэтому необходимым условием стабилизации цикла является принадлежность всех ХП мнимой оси. При выполнении этого условия в [1, 2] строится управляемая механическая система, обладающая орбитально асимптотически устойчивым циклом. В [2] доказывается существование искомого управления для системы с n степенями свободы. В [1] указывается конкретный вид управления при $n = 1$. Однако матрица для управления в случае $n > 1$ в [1], [2] не находится. Согласно разд. 1, многомерная система содержит связанные подсистемы, поэтому для управления этой системой необходимо находить связи-управления. Структура и конкретный вид связей-управлений также нужны при рассмотрении связанных консервативных систем.

В окрестности $\tilde{\Sigma}$ механическая система описывается в обобщенных координатах переменными (x, y), где $x = w_1$, $y = (w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$. Тогда, согласно [2], в консервативной системе на $\tilde{\Sigma}$ используется универсальное управление с функцией $(1 - Kx^2)\dot{x}$, где K – постоянная, отвечающая энергии h^* для цикла. Для построения цикла периода T^* с энергией h^* на семействе Σ по параметру h используется зависимость $K(h^*)$.

В консервативной системе полная механическая энергия редуцированной системы по переменной x обозначается через E_x; она изменяется по закону

$$\frac{dE_x}{dt} = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{x}^2, \tag{2.1}$$

где число σ равно $+1$ или -1; ε – коэффициент усиления, близкий к нулю для слабой связи. На траекториях системы $E_x = E_x(h,t)$. Равенство нулю интеграла от функции $E_x(h,t)$ на отрезке $[0, T^*]$ является необходимым условием существование цикла. Согласно [1], при выборе числа σ из условия $\sigma dK(h^*)/dh < 0$ выполняется достаточное условие, и на $\tilde{\Sigma}$ реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл, отвечающий энергии h^*. На цикле функция $E_x = E_x^c(t)$ становится периодической: ее среднее за период значение $\bar{E}_x^c(t) = h^*$.

Для полной механческой энергии E всей системы справедлив закон изменения

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \dot{y}^2 = \sum_{j=2}^{n} \dot{w}_j^2.$$

Согласно [2], во всей системе реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл, совпадающий с циклом на $\tilde{\Sigma}$. Для E_y – разности энергий $E - E_x$ – справедливо равенство

$$\frac{dE_y}{dt} = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{y}^2. \tag{2.2}$$

Из сравнения законов (2.1) и (2.2) следует, что при $E_x \to E_x^c(t)$ функция $E_y \to 0$ и траектория управляемой системы из окрестности $\tilde{\Sigma}$ стремится к циклу.

Управление $\varepsilon(1 - Kx^2)\dot{w}$ (с учетом обозначения $w = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$) в преобразованной консервативной системе дается знакоположительной формой

$$\sum_{s=1}^{n} w_s^2.$$

Линейное преобразование в разд. 1 проводится с постоянной матрицей P, поэтому оно не меняет знака квадратичной формы. Следовательно, в исходных переменных получается управление со знакоположительной формой

$$R = \frac{1}{2}\sum_{s,j=1}^{n} r_{sj}\dot{q}_s\dot{q}_j > 0, \quad r_{sj} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, связь-управление с функциями

$$u_s = (1 - K(h^*)x^2)\sum_{s,j=1}^{n} r_{sj}\dot{q}_j, \quad s = \overline{1,n},$$

задаваемыми положительно-определенной квадратичной формой R, гарантирует существование в отдельной управляемой консервативной системе орбитально асимптотически устойчивого цикла, близкого к СПД системы с энергией $h = h^*$.

Заметим, что задача нахождения связи-управления для многомерной системы, поставленная в [2], получила решение.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему уравнений [15]

$$\begin{gathered}
\ddot{\theta}_1 + \sin\theta_1 + \kappa(1 - 1/f)\left(\frac{c^2}{4}\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{c}{2}\cos\theta_1\right) = 0, \\
\ddot{\theta}_2 + \sin\theta_2 + \kappa(1 - 1/f)\left(-\frac{c^2}{4}\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{c}{2}\cos\theta_2\right) = 0, \\
f^2 = 1 + \frac{c^2}{2} - c\sin\theta_1 + c\sin\theta_2 - \frac{c^2}{2}\cos(\theta_2 - \theta_1),
\end{gathered} \tag{2.3}$$

описывающую движение двух связанных пружиной жесткости κ неуправляемых идентичных маятников, точки подвесов которых лежат на горизонтальной прямой; $\theta_{1,2}$ – углы отклонения маятников от вертикали, c – отношение расстояния от точки крепления маятника к ее длине. Система (2.3) допускает интегральное многобразие $\tilde{\Sigma}$:

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad x = (\theta_1 + \theta_2)/2, \quad y = (\theta_1 - \theta_2)/2 \equiv 0,$$

которое описывает движение двух маятников как одного целого (пружина недеформирована). Для этого многообразия строится управляемая система

$$\begin{gathered}
\ddot{x} + \sin x = \sigma\varepsilon(1 - K(h^*)x^2)\dot{x}, \\
\ddot{y} + y\left(1 + \frac{\kappa c^2}{2}\right)\cos x + \ldots = \sigma\varepsilon(1 - K(h^*)x^2)\dot{y},
\end{gathered} \tag{2.4}$$

в которой во втором уравнении явно выписываются только линейные по y слагаемые.

Для математического маятника характеристика $K(h)$ дается в [16]: функция монотонно убывает. Поэтому $\sigma = 1$.

Система (2.4) с $\sigma = 1$ допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл, близкий к колебанию с энергией h^* на многообразии $\tilde{\Sigma}$, если ХП уравнения по y принадлежат мнимой оси.

3. Связанные консервативные системы. Рассматриваются m консервативных систем, где i-я система описывается координатой q^i и в отсутствие связей допускает семейство Σ^i невырожденных СПД. Предполагается, что для Σ^i выполняются условия принадлежности ХП мнимой оси, а множество условно-периодических движений $\cup\Sigma^i$ содержит семейство невырожденных СПД. Применяются слабые связи, что гарантируется малостью параметра ε. Исследуется связанная система, в которой все подсистемы входят равноправно. Для нее применяются связи, полученные обобщением слабых связей для одной системы.

В каждой консервативной системе выделяется многообразие $\tilde{\Sigma}^i$, на котором движение по координате x^i описывается системой с одной степенью свободы. В окрестности $\tilde{\Sigma}^i$ используются координаты x^i и y^i. В отдельной системе диссипация $\varepsilon(1 - K(x^i)^2)\dot{x}^i$ вводится в окрестности цикла, на котором $y^i = 0$. В связанной системе на цикле $y^i = 0$, $i = \overline{1,m}$. При этом квадрат радиуса для цикла равен

$$\rho = \sum_{i=1}^{m}(x^i)^2.$$

Поэтому в переменных x^i, y^i связующие функции с помощью коэффициентов σ_i, принимающих значения +1 или –1, приобретают вид

$$\begin{gathered} u_x^i = \sigma_i(1 - K\rho(h,t))\dot{x}^i, \\ u_y^i = \sigma_i(1 - K\rho(h,t))\dot{y}^i, \quad i = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Постоянная K находится по значению h полной механической энергии E, равной сумме энергий рассматриваемых консервативных систем.

С учетом функций (3.1) в связанной системе законы изменения энергий E_x^i и E_y^i во всех подсистемах даются равенствами

$$\frac{dE_x^i}{dt} = \varepsilon\sigma_i(1 - K\rho(h,t))(\dot{x}^i)^2, \quad \frac{dE_y^i}{dt} = \varepsilon\sigma_i(1 - K\rho(h,t))(\dot{y}^i)^2, \tag{3.2}$$

где индивидуальный для i-й системы коэффицент σ_i обеспечивает в отдельной системе существование орбитально асимптотически устойчивого цикла.

При $y^i \equiv 0, i = \overline{1,m}$, подсистема уравнений по переменным x^i отщепляется, образуя редуцированную связанную систему

$$\ddot{x}^i + f(x^i) = \varepsilon\sigma_i(1 - K\rho)\dot{x}^i, \tag{3.3}$$

допускающую в отсутствии связей семейство СПД по параметру h. Для полной механической энергии

$$E_x = \sum_{i=1}^{m} E_x^i$$

системы (3.3) из m консервативных систем с одной степенью свободы справедлив закон

$$\frac{dE_x}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\rho(h,t)]\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(\dot{x}^i(h,t))^2.$$

Отсюда при интегрировании на отрезке $[0,T^*]$ получается необходимое условие

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} E_x(h,t)dt = 0$$

существования цикла с периодом T^*.

Вычисляется приращение ΔE_x энергии E_x на отрезке $[0,T^*]$:

$$\begin{gathered} \Delta E_x = \varepsilon\chi\nu(h - h^*) + o(\varepsilon), \\ \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = \int_0^{T^*}\rho(h^*,t)\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(\dot{x}^i(h^* t))^2 dt. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Формула (3.4) справедлива при малых приращениях $\Delta h = h - h^*$. Из нее следует, что при $\chi\nu \neq 0$ выполняется достаточное условие существование цикла: верно условие $dI(h^*)/dh \neq 0$ простоты корня h^* амплитудного уравнения $I(h) = 0$ [2]. При $\chi\nu < 0$ в каждом временном отрезке длиной T^* знак приращения энергии противоположен знаку приращения Δh. Значит, траектории системы (3.3) асимптотически приближаются к поверхности уровня энергии $h = h^*$, отвечающей циклу. При этом изменение энергий E_x^i описывается первой группой законов в (3.2).

На цикле связанной системы функции $E_x^i = E_x^{ic}(t)$ и $E_y^i = E_y^{ic}(t)$ имеют период T^*; он отвечает значению

$$h^* = \sum_{i=1}^{n} h_i^*;$$

h_i^* – значение энергии в i-й системе для цикла связанной системы. Числа $h_i^*(h^*)$ единственным образом вычисляются через энергию h^*.

Закон для E_x^i в (3.2) обеспечивает достижение в цикле среднего значения энергии E_x^i, равного h_i^*. При этом стремление траекторий происходит по одной скалярной переменной x^i. Стремление траекторий к уровню $h = h^*$ по всем переменным x^i, $i = \overline{1,n}$, приводит к орбитальной асимптотической устойчивости цикла редуцированной системы (3.3). Законы для E_y^i в (3.2), как и в случае отдельной системы, обеспечивают принадлежность цикла именно редуцированной системе (3.3).

Таким образом, получается следующий основной вывод. Задача конструирования орбитально асимптотически устойчивого цикла в связанной консервативной системе решается малыми связями-управлениями с функциями

$$u_s^i = \sigma_i(1 - K(h^*)\rho)\sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i \dot{q}_j^i, \quad \rho = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(q_s^i)^2, \quad r_{sj}^i = \text{const},$$
$$s = \overline{1,n_i}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.5}$$

в которых r_{sj}^i – коэффициенты знакоположительных квадратичных форм.

Орбитальная асимптотическая устойчивость цикла управляемой консервативной системы со связями-управлениями (3.5) приводит к естественной стабилизации этого цикла. При этом в цикле реализуется синхронизация колебаний отдельных консервативных систем по частоте и фазе.

В частном случае основной вывод справедлив для связанных консервативных систем с одной степенью свободы.

Пример 2. Рассматриваются СПД – колебания слабо связанных идентичных маятников с кратными друг другу частотами. Строится управляемая система

$$\ddot{\theta}_i + \sin\theta_i = \sigma_i\varepsilon\tilde{o}[1 - K(h^*)\rho(h,t)]\dot{\theta}_i, \quad i = 1,2 \quad \rho = \theta_1^2 + \theta_2^2, \tag{3.6}$$

где h – энергия системы маятников, h^* – значение энергии для рассматриваемого СПД.

Для отдельного математического маятника характеристика $K(h)$ дается в [16]: функция монотонно убывает, поэтому $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Для системы из двух маятников получается характеристика $K(h)/2$.

Система (3.6), в которой $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл, близкий к колебанию маятников с энергией h^*.

Заключение. Предложен подход к стабилизации колебания связанных консервативных механических систем, использующий идею построения орбитально асимптотически устойчивого цикла. Реализация подхода приводит к естественной стабилизации колебания без привлечения иных управлений и одновременно – синхронизации колебаний систем по частоте и фазе. Найдены слабые связи-управления, имеющие универсальный характер. Подход применим как для многомерной консервативной системы, так и связанных консервативных систем. В [1] подход применяется к консервативной системе с одной степенью свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9 . С. 93–104.
3. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стрежня, вызванные кратковременным продольным ударом // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.
4. *Kovaleva A., Manevitch L.I.* Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320. P. 1–8.
5. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 411–425.
6. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. № 5. P. 794–803.
7. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
8. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
9. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // J. Appl. Nonlin. Dynam. 2014. V. 3. № 3. P. 271–282.
10. *Kawamura Y.* Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced anti-phase Synchronization // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 270. P. 20–29.
11. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu.* Control of a System of Two Interacting Bodies on a Rough Inclined Plane // Proc. 15th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. M.: IEEE Xplore, 2020. https://ieeexplore.ieee.org/document/9140564. https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140564.
12. *Galyaev A., Lysenko P.* About Synchronization Problem of Group of Weakly Coupled Identical Oscillators // Proc. 15th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. M.: IEEE Xplore, 2020. https://ieeexplore.ieee.org/document/9140581. https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140581.
13. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.
14. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
15. *Евдокименко А.П.* О равновесных конфигурациях двух связанных маятников и их устойчивости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 47–58.
16. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System // Intern. Scientific Conf. on Mechanics: 8th Polyakhov's Reading. Saint-Petersburg: AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. №. 030022. https://doi.org/10.1063/1.5034602.