ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 58–61

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ[1]

И. В. Романов

Национальный исследовательский ун-т "Высшая школа экономики", Москва, Россия

Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

e-mail: romm1@list.ru

Поступила в редакцию 05.08.2021 г.
После доработки 13.09.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается проблема распределенной управляемости для уравнения Гуртина–Пипкина с ядром, представленным некоторым рядом из убывающих экспоненциальных функций, при этом на коэффициенты и показатели экспонент наложены определенные условия. Доказывается, что приведение данной системы в покой невозможно, если управляющее воздействие приложено даже ко всей области.

DOI: 10.31857/S0002338822020123

Введение. Работа посвящена задачам распределенного управления колебаниями системы, описываемой уравнением Гуртина–Пипкина. Это уравнение содержит член сверточного (по временной переменной) типа, который часто называют памятью. Впервые данное уравнение появляется в статье [1]. Ставится вопрос о возможности приведения таких систем в состояние покоя. Заметим, что, вообще говоря, это понятие для систем с памятью не эквивалентно приведению системы в нулевое состояние. Как будет ясно в дальнейшем, управляемость в покой для подобных моделей не всегда возможна, даже если управляющее воздействие приложено ко всей области, занимаемой механической системой. В ходе доказательства мы не будем соблюдать должную строгость в части, касающейся разрешимости начально-краевых задач, а уделим больше внимания качественной стороне вопроса управляемости.

Рассмотрим важный класс ядер, имеющий вид ряда из счетного числа убывающих экспоненциальных функций. Также будет упомянуто ядро абелевского типа (ядро с особенностью). Эти ядра применяются в различных моделях механики, в частности для описания некоторых колебательных процессов.

1. Задача о неприводимости в состояние покоя системы, описываемой уравнением Гуртина–Пипкина и ядром в виде ряда из убывающих экспоненциальных функций. Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\theta_t(t,x) = \int_0^t K_1(t-s)\Delta\theta(s,x)ds + u(t,x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

$$\theta|_{t=0} = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$\theta(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Здесь и далее

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t},$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00151).

где c_j, γ_j – заданные положительные постоянные, такие, что

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_j < \ldots, \quad \gamma_j \to +\infty, \quad j \to +\infty.$$

В данном случае Ω – ограниченная односвязная область в R^n с бесконечно гладкой границей, Δ – оператор Лапласа с областью определения

$$D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$u(t,x)$ – функция управления. Существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3) при дополнительных условиях, наложенных на ядро $K_1(t)$ и правую часть u, доказаны в [2].

Для уравнений, "похожих" на (1.1), и в ряде частных случаев (например, [3–5]) удается доказать, что колебания системы можно полностью остановить за конечное время, если управление приложено ко всей области Ω. В [6] доказывается, что механическую систему, описываемую уравнением Гуртина–Пипкина для двумерных областей и широкого класса непрерывных ядер нельзя привести в покой управлением, приложенным только к подобласти, замыкание которой содержится в Ω. Заметим, что $K_1(t)$ является примером такого ядра.

Пусть теперь ядро имеет вид

$$K_2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} t^{-\sigma}, \quad \sigma \in (0,1), \tag{1.4}$$

где $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция. Это ядро Абеля. В [7] для одномерного уравнения теплопроводности с интегральной памятью и ядром (1.4) доказывается неуправляемость в покой данной системы, если управление приложено к одному концу отрезка, а второй конец закреплен. Заметим, что управляемость в покой в этом случае недостижима даже если мы управляем за всю область [8].

Здесь и далее для ядра $K_1(t)$ потребуем выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < +\infty. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.1) является интегродифференциальным уравнением Гуртина–Пипкина, которое описывает процесс распространения тепла в средах с памятью, процесс распространения звука в вязкоупругих средах, а также оно возникает в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси). Заметим, что в ряде моделей производная $K_1'(t)$ от ядра имеет особенность при $t =$ 0, т.е.

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j = +\infty. \tag{1.6}$$

Подробно с описанием моделей для условий (1.5), (1.6) и физических законов можно ознакомиться в статье [2].

Будем говорить, что система *управляема в состояние покоя*, если для всех начальных условий φ найдется управление $u(t,x)$ и момент времени $T > 0$ такой, что $u(t,x)$ тождественно равно нулю для $t > T$ и соответствующее решение $\theta(t,x,u)$ задачи (1.1)–(1.3) также тождественно равно нулю для $t > T$. Заметим, что для систем с памятью понятия управляемость в состояние покоя и управляемость в нулевое состояние не являются тождественными. Во многих случаях решение, достигнув нулевого значения в какой-то момент времени, затем может из этого значения выйти.

Для уравнений вида (1.1) и различных типов ядер можно поставить, например, следующие задачи управления: привести в покой, управляя за фиксированную подобласть, движущийся компакт или за всю область Ω. Можно также поставить задачу граничного управления, как это сделано, например, в [6, 7]. В данной статье будет показано, что для ядра $K_1(t)$ управляемости в покой для системы (1.1)–(1.3) нет, если управление производится даже за всю область. Остаются открытыми вопросы о возможности приведения в покой для некоторых других типов ядер. Для "похожих" уравнений иногда можно добиться управляемости в покой, если управление приложено к движущемуся по некоторому закону компакту (при этом управляемости за фиксированную подобласть нет). Например, проблема управляемости в покой для одномерного уравнения колебания струны с памятью рассмотрена в [9]. В этом случае ядро в интегральном члене уравнения тождественно равно единице и управление сосредоточено на подотрезке (части струны), который движется с постоянной скоростью.

Покажем, что в задаче управления (1.1)–(1.3) для ядра $K_1(t)$ привести систему в покой (вообще говоря) невозможно. А именно рассмотрим управление

$$u(t) \in L_2((0,T);\, L_2(\Omega)),$$

продолженное нулем при $t > T$. Далее докажем, что найдется такое начальное условие $\varphi(x)$, при котором движение системы невозможно остановить. Точнее, существует начальное условие $\varphi(x)$, такое, что для каждой функции управления $u(t,x)$, которая тождественно равна нулю при $t > T$ для некоторого $T > 0$, соответствующее решение не может быть тождественно равно нулю вне ограниченного сегмента (по переменной t).

Определение. Показателем сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_k\}$ называется число

$$\tau = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^\alpha} < +\infty\right\}.$$

Теорема. Предположим, что выполнено условие (1.5) и для последовательности показателей $\{\gamma_k\}$ ядра $K_1(t)$ $\tau > 1$. Тогда управляемость в состояние покоя для системы (1.1)–(1.3) не имеет места.

Доказательство. Рассмотрим ортонормированную систему собственных функций $\{\psi_n\}$ и собственные значения $-a_n^2$ $(n = 1,2,\ldots)$ оператора Δ относительно краевого условия (1.3). Пусть

$$\varphi(x) = \xi_1 \psi_1(x),$$

где $\xi_1 \neq 0$. Разложим решение $\theta(t,x)$ и управляющее воздействие $u(t,x)$ в ряды Фурье по упомянутой системе собственных функций (это базис в $L_2(\Omega)$). В результате получается счетная система интегродифференциальных уравнений:

$$\dot{\theta}_n(t) = -a_n^2 \int_0^t K_1(t-s)\theta_n(s)ds + u_n(t), \quad t > 0, \quad n = 1,2,\ldots \tag{1.7}$$

Очевидно, что, в силу выбора φ, только первое уравнение из системы (1.7) имеет ненулевое начальное условие.

Сделаем преобразование Лапласа от обеих частей в равенстве (1.7) для $n = 1$:

$$(\lambda + a_1^2 \hat{K}_1(\lambda))\hat{\theta}_1(\lambda) = \xi_1 + \hat{u}_1(\lambda). \tag{1.8}$$

Напомним определение пространства PW_+ как линейного пространства образов преобразований Лапласа от элементов из $L_2(0,+\infty)$, таких, что они равны нулю на множестве $\{t : t > T\}$ для некоторого $T > 0$. Известно, что $f(\lambda) \in PW_+$, если и только если она является целой функцией, такой, что:

1) существуют вещественные числа C и T, такие, что $|f(\lambda)| \leq Ce^{T|\lambda|}$ (заметим, что C и T зависят от $f(\lambda)$);

2) $\sup\limits_{x\geq 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\, dy < +\infty$.

Предположим, что система (1.1)–(1.3) управляема в состояние покоя, тогда функции $\hat{\theta}_1(\lambda)$ и $\hat{u}_1(\lambda)$ являются элементами пространства PW_+. Следовательно, это целые функции экспоненциального типа.

Рассмотрим теперь корни уравнения

$$\lambda + a_1^2 \hat{K}_1(\lambda) = 0. \tag{1.9}$$

В [2] доказывается, что уравнение (1.9) имеет (в том числе) счетное число вещественных корней $\{\lambda_k\}$, для которых выполнены неравенства:

$$-\gamma_{k+1} < \lambda_k < -\gamma_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{1.10}$$

Из (1.10) и условия теоремы следует, что показатель сходимости τ для последовательности корней $\{\lambda_k\}$ больше единицы.

По определению целая функция $f(\lambda)$ имеет конечный порядок роста, если найдется число $\mu > 0$, такое, что

$$\max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)| < e^{r^\mu}, \quad r \geq r_0(\mu). \tag{1.11}$$

При этом *порядком роста* ρ целой функции $f(\lambda)$ называется нижняя грань тех $\mu > 0$, для которых верно (1.11).

Очевидно, что для целой функции экспоненциального типа порядок роста ρ равен 1. В комплексном анализе хорошо известно, что показатель сходимости последовательности нулей целой функции не превосходит ее порядка роста ($\tau \leq \rho$). Из (1.8) следует, что последовательность $\{\lambda_k\}$ —нули функции $\xi_1 + \hat{u}_1(\lambda)$. Но это целая функция экспоненциального типа, следовательно, ее порядок роста равен 1 и показатель сходимости последовательности ее нулей не превосходит 1. При этом выше было установлено, что для $\{\lambda_k\}$ число τ больше единицы. Установленное противоречие доказывает теорему.

Заключение. “Неустойчивость” управляемости для ядра, состоящего из конечного числа экспонент. Если ядро в уравнении (1.1) состоит лишь из конечного числа убывающих экспоненциальных функций, то, используя методы работ [3, 4], можно доказать, что рассматриваемую механическую систему можно привести в покой за конечное время, если управление приложено ко всей области. Поэтому из доказанной теоремы можно получить важное следствие о “неустойчивости” управляемости этой системы. Заметим, что эта “неустойчивость” связана с добавлением к новому ядру малого возмущения, т.е., согласно доказанной теореме, управляемость теряется, если это возмущение представляет собой остаток ряда $K_1(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* Theory of Heat Conduction With Finite Wave Speed // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. № 31. P. 113–126.
2. *Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.S.* Spectral Analysis and Correct Solvability of Abstract Integro-Differential Equations Arising in Thermophysics and Acoustics // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2011. V. 39. P. 36–65.
3. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System, Governed by String Equation with Memory // J. Dynamical and Control Systems. 2013. V. 18. № 4. P. 611–623.
4. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System Governed by the Wave Equation With Memory // arXiv. doi 1503.04461.
5. *Romanov I., Romanova A.* Some Problems of Controllability of Distributed Systems Governed by Integrodifferential Equations // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. № 2. P. 132–137.
6. *Romanov I., Shamaev A.* Non-controllability to Rest of the Two-Dimensional Distributed System Governed by the Integrodifferential Equation // J. Optimization Theory and Applications. 2016. V. 170. № 3. P. 772–782.
7. *Ivanov S., Pandofi L.* Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // J. Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 355. № 1. P. 1–11.
8. *Romanova A.V., Romanov I.V.* On the Problems of Controllability and Uncontrollability for Some Mechanical Systems Described by the Equations of Vibrations of Plates and Beams with Integral Memory // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021. V. 1083. № 012041. P 1–9.
9. *Biccaria U., Micu U.* Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // J. Differential Equations. 2019. № 267. P. 1376–1422.