ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 4, с. 109–127

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.872

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ-ЗАПАСАНИЯ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ПОСТАВОК И РАЗРУШАЮЩИМИ ЗАЯВКАМИ

А. З. Меликов[а], *, Р. Р. Мирзоев[б], С. С. Наир[в]

[а] Институт систем управления, Национальная академия наук Азербайджана, Баку, Азербайджан

[б] Национальная авиационная академия, Баку, Азербайджан

[в] Государственный инженерный колледж, Триссур, Индия

**e-mail: agassi.melikov@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
После доработки 10.01.2022 г.
Принята к публикации 31.01.2022 г.

Исследуются модели систем обслуживания-запасания с двумя политиками пополнения запасов: с фиксированным объемом поставок и с переменным объемом поставок. Пополнения могут быть осуществлены из двух источников с различными временами выполнения заказа и стоимостями поставки запасов. Если уровень запасов опускается до точки заказа s, то генерируется обычный заказ на поставку запасов к медленному источнику. Если уровень запасов опускается ниже определенной пороговой величины r, где $r < s$, то система мгновенно аннулирует обычный заказ и генерируется экстренный заказ в быстрый источник. В систему поступают также разрушающие заявки, в результате которых уровень запасов мгновенно уменьшается. Случайные величины, участвующие в формирование модели, имеют показательные функции распределения с конечными средними. Найдены условия эргодичности исследуемых систем, вычисляются их стационарные распределения и предложены формулы для нахождения их характеристик. Решены задачи минимизации суммарных штрафов изучаемых систем за счет выбора надлежащих значений точки заказа s и пороговой величины r при использовании различных политик пополнения запасов.

DOI: 10.31857/S000233882203009X

Введение. Одним из основных допущений классической теории систем управления запасами (inventory control systems (ICS)) является допущение о том, что время продажи (отпуска) запаса потребителям равно нулю. Однако это предположение зачастую оказывается нереальным. В англоязычной литературе ICS с положительным временем обслуживания получили название систем обслуживания-запасания (queuing-inventory systems (QIS)) [1, 2]. Иными словами, системы управления запасами могут быть рассмотрены как QIS с мгновенным обслуживанием заявок. С другой стороны, QIS могут быть рассмотрены как системы массового обслуживания, которые имеют ограниченные запасы и обслуживание поступающих расходующих заявок (consumer customers, c-заявки) подразумевает продажу им запасов определенных размеров с помощью серверов системы. В отличие от теории ICS, которая имеет долгую историю [3], теория QIS интенсивно развивается лишь последние три десятилетия, так как первыми публикациями в этом направление являются [4, 5]. Теория QIS в последние годы широко изучается различными авторами. Современное состояние теории QIS и ее приложения подробно описаны в недавней обзорной работе [6].

Каждая QIS старается найти баланс между доходами за обслуживания заявок, стоимостью заказов и хранением запасов. Подавляющие большинство публикаций посвящены изучению QIS, в которых поставка запасов осуществляется из одного источника. Однако в целях увеличения надежности своевременного обеспечения запасами необходимо организовать снабжения из нескольких источников. Применительно к моделям классических ICS эта проблема изучена достаточно подробно. Во многих работах показано, что политика снабжения от нескольких источников может быть более эффективной, чем политика, которая полагается на одного поставщика [7–13]. Заинтересованный читатель может найти библиографию в этом направлении в обзорных статьях [14–16] ([15] содержит 373 наименования в списке литературы).

Проблема выбора поставщика из конечного множества поставщиков с различными характеристиками (временами выполнения заказов и их стоимостями) рассмотрена в [17]. В отличие от [17] в настоящей работе рассматривается проблема разделения заказов между быстрым и дорогим поставщиком и медленным, но недорогим поставщиком.

Отметим, что когда используются несколько источников для снабжения, то необходимо определить правила для определения моментов поставки от различных источников, а также распределить объемы заказа между ними. Возможны два пути решения этих проблем: (1) общий объем заказа заранее распределяется между источниками по определенным критериям, при этом источники независимо друг от друга выполняют эти заказы; (2) заказы делаются разным источникам в различных ситуациях, т.е. в конкретных ситуациях ожидается поставка лишь от одного источника.

Практическая реализация первой схемы не представляет никаких трудностей в QIS, где используется политика пополнения запасов (ППЗ) с фиксированным объемом заказа, например, в системах с (s, Q)-политикой пополнения запасов. Напомним, что с помощью (s, Q)-политики размер заказа является постоянной величиной и равен $Q = S - s$, где S – максимальный размер склада системы, а s называется точкой заказа, при этом считается, что $s = \overline{0, (S/2) - 1}$. В системах, где объем заказа зависит от текущего состояния системы (уровня запасов), например QIS с (s, S)-политикой, реализация указанной схемы оказывается нетривиальной задачей. При использовании (s, S)-политики размер заказа является переменной величиной и определяется так, что в момент его выполнения склад системы заполняется полностью.

В работе рассматриваются модели QIS, в которых применяется вторая схема распределения заказов между двумя источниками с различными характеристиками. Нами предлагается следующая схема распределения заказов между двумя источниками. Когда запас падает до уровня s, $s = \overline{1, (S/2 - 1)}$, срабатывает обычный заказ к медленному Источнику-1. Однако если до момента выполнения обычного заказа уровень запасов опускается ниже определенного порогового (опасного) значения r, $r = \overline{0, s-1}$, срабатывает экстренный заказ определенного размера к быстрому Источнику-2, который выполняется за дополнительную плату. Во избежание переполнения склада системы в момент отправки заказа к Источнику-2 аннулируется заказ к Источнику-1, так как из-за стохастичности времен выполнения поставок возможны ситуации, когда за короткое время поступают поставки с обоих источников. Отметим, что аннулирование заказа к Источнику-1, как правило, приводит к определенным штрафам, которые должны выплачиваться конкретной системой обслуживания-запасания. Размеры обычного и экстренного заказов определяются исходя из принятой политики пополнения запасов.

В известных работах, посвященных моделям QIS с портящимися запасами, как правило, предполагается, что запасы портятся с течением времени (детерминированного или случайного времени). Вместе с тем почти не изучены модели QIS, где учитываются возможности мгновенного уничтожения запасов из-за внезапных событий, например, в результате небрежного отношения сотрудников склада к своей работе, технических аварий и т.д. В данной работе такие ситуации учитываются с помощью введения потока разрушающих заявок (destructive customers, d-заявки), которые не требуют обслуживания, а их наступление приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов. Разрушающие заявки могут быть рассмотрены как аналог негативных заявок в классических системах массового обслуживания, в которых негативные заявки не требуют обслуживания, а при поступлении они вытесняют из очереди (или из сервера) одну обычную заявку [18, 19].

Подавляющие большинство работ по изучению QIS посвящены системам, в которых поставка запасов осуществляется из одного источника. Авторам известна лишь работа [20], где изучается марковская модель QIS с портящимися запасами и двумя источниками. Рассмотрена модель с пуассоновским потоком, где каждая заявка, согласно схеме Бернулли, либо принимается в систему (т.е. является c-заявкой), либо вытесняет из очереди одну заявку (т.е. выступает негативной заявкой). Времена обслуживания c-заявок, порчи запасов и время выполнения заказов из различных источников имеют показательные распределения с конечными (положительными) средними. В системе предложена следующая ППЗ: когда уровень запасов опускается до фиксированной величины m, $m > (S/2)$ срабатывает обычный заказ объема $Q_1 = S - m$ к медленному источнику; если уровень запасов опускается до заранее определенной величины s, $s < Q_1$, срабатывает экстренный заказ объема $Q_2 = S - s > s + 1$ к быстрому источнику. Считается, что

$s + m < S$, так как в противном случае возможны ситуации, когда суммарная поставка запасов может превышать максимальный объем склада системы. В указанной работе с помощью матрично-геометрического метода [21] найдено стационарное распределение соответствующей цепи Маркова и решена задача минимизации суммарных штрафов системы.

Настоящая публикация мотивирована работой [20]. В работе предложены новые политики пополнения запасов в QIS с c- и d-заявками и двумя источниками.

1. Описание моделей. Ниже рассматриваются две модели QIS типа M/M/1/∞ с расходующими и разрушающими заявками и двумя источниками при использовании (s, S) и (s, Q) политик пополнения запасов. В обеих моделях интенсивность поступающего пуассоновского потока c-заявок равна λ, и для простоты изложения полагаем, что c-заявки требуют запаса единичного размера. Кроме того, в обеих моделях поток d-заявок также считается пуассоновским с параметром κ, при этом в момент поступления таких заявок уровень запасов мгновенно уменьшается на единицу; d-заявка может даже уничтожить запас, который находится на этапе отпуска к c-заявке. Если уровень запасов равен нулю, то поступившая d-заявка не влияет на работу системы.

Поступившая c-заявка немедленно принимается для обслуживания, если в этот момент сервер свободен и уровень запасов положительный; если уровень запасов положительный и сервер занять, то эта заявка ставится в очередь бесконечной длины. Отметим, что c-заявки присоединяются к очереди даже тогда, когда уровень запасов равен нулю, т.е. если в момент поступления очередной c-заявки в системе отсутствуют запасы, то она либо с вероятностью φ_1 становится в очередь, либо с вероятностью φ_2 покидает систему, при этом $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. Заявка в начале очереди становится нетерпеливой, если уровень запасов падает до нуля, т.е. в таких случаях c-заявка во главе очереди ожидает некоторое случайное время, которое имеет показательную функцию распределения (ф.р.) со средним τ^{-1}, и по истечении этого времени она покидает систему с неудовлетворенным спросом.

После завершения обслуживания c-заявка либо с вероятностью σ_1 отказывается получить товар, либо с вероятностью σ_2 получает товар, при этом $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. В обоих случаях время обслуживания c-заявок имеют показательные ф.р., но их средние значения различны, т.е. если c-заявка отказывается получить товар, то среднее время ее обслуживания равно μ_1^{-1}; иначе это время равно μ_2^{-1}.

Пополнения запасов можно осуществлять из двух источников: медленного Источника-1 и быстрого Источника-2. Время выполнения заказов каждого источника имеет показательную ф.р., но их средние значения различны, т.е. если делается заказ к Источнику-i, то среднее время ожидания поставки запаса равно ν_i^{-1}, $i = 1, 2$, при этом $\nu_2 > \nu_1$. Иными словами, снабжение от Источника-2 требует меньшее времени доставки, чем Источник-1, но снабжение от Источника-2 требует дополнительных затрат. Кроме того, аннулирование заказа от Источника-1 связано с определенными штрафами.

Изучаются две политики пополнения запасов: (s, S) и (s, Q). Считается, что в изучаемой системе разрешено аннулирование заказа до его выполнения. При этом время, необходимое для оформления акта аннулирования ничтожно малая величина, т.е. здесь принимается, что это время равно нулю. В обеих ППЗ принимается, что точка заказа определяется так: $0 < s < (S/2)$. Если уровень запасов опускается до величины s, то делается заказ к Источнику-1, а когда уровень запасов опускается до пороговой величины r, $0 \le r < s$, то мгновенно аннулируется заказ от Источника-1 и отправляется заказ к Источнику-2.

Задача состоит в нахождении совместного распределения числа c-заявок в системе и уровня запасов системы, определении основных характеристик системы и решении задачи выбора оптимальных значений точки заказа s и пороговой величины r с целью минимизации суммарных затрат системы при использовании различных политик пополнения запасов. Суммарные затраты включают переменные и постоянные затраты для каждого типа заказа и аннулирования заказа, а также затраты на хранение запасов, штрафы из-за потери c-заявок в результате их нетерпеливости и штрафы за их пребывание в системе.

2. Расчет вероятностей состояний системы при использовании (s, S)-политики. Функционирование системы описывается двумерной цепью Маркова (two dimensional Markov chain (2-D MC)) с состояниями вида (n, m), где n указывает число c-заявок в системе, $n \ge 0$, m обозначает уровень запасов на складе системы, $m = \overline{0,S}$. Пространство состояний (ПС) этой 2-D МС определяется так:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n),$$

где множество $L(n) = \{(n, 0), (n, 1), ..., (n, S)\}$ – n-й уровень.

Интенсивность перехода из состояния $(n_1, m_1) \in E$ в другое состояние $(n_2, m_2) \in E$ обозначим через $q((n_1, m_1), (n_2, m_2))$. Из описания системы видно, что переходы между состояниями ПС E связаны со следующими событиями: (i) поступление c-заявок, (ii) завершение обслуживания c-заявок, (iii) уход c-заявок из очереди из-за их нетерпеливости, (iv) поступление d-заявок и (v) поступление пополнения запасов.

Пусть исходным состоянием системы является $(n_1, m_1) \in E$. Тогда возможные переходы между состояниями и их интенсивности определяются следующим образом.

Если поступает c-заявка и уровень запасов равен нулю ($m_1 = 0$), то эта заявка с вероятностью φ_1 становится в очередь, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_1 + 1, 0) \in E$; интенсивность этого перехода равна $\lambda\varphi_1$.

Если поступает c-заявка и уровень запасов больше нуля ($m_1 > 0$), то число c-заявок в системе увеличивается на единицу, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_1 + 1, m_1) \in E$; интенсивность этого перехода равна λ.

Если после завершения обслуживания c-заявка отказывается получить товар, то число c-заявок в системе уменьшается на единицу, при этом уровень запасов системы не меняется, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_1 - 1, m_1) \in E$; интенсивность этого перехода равна $\mu_1\sigma_1$.

Если после завершения обслуживания c-заявка получает товар, то одновременно число c-заявок в системе и уровень запасов системы уменьшаются на единицу, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_1 - 1, m_1 - 1) \in E$; интенсивность этого перехода равна $\mu_2\sigma_2$.

Если уровень запасов падает до нуля (либо после завершения обслуживания c-заявки, либо в результате поступления d-заявки), т.е. если в исходном состоянии $(n_1, m_1) \in E$ имеем $m_1 = 0$, то c-заявка во главе очереди покидает систему с неудовлетворенным спросом после некоторого случайного промежутка времени. Иными словами, осуществляется переход из исходного состояния в состояние $(n_1 - 1, 0) \in E$; интенсивность этого перехода равна τ.

Если в момент поступления d-заявки уровень запасов больше нуля ($m_1 > 0$), то запас единичного размера уничтожается, а число c-заявок в системе не меняется, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_1, m_1 - 1) \in E$; интенсивность этого перехода равна κ.

Если в момент поступления пополнения уровень запасов $m_1 = \overline{r+1, s}$, то происходит переход в состояние $(n_1, S) \in E$ с интенсивностью ν_1.

Если в момент поступления пополнения уровень запасов $m_1 = \overline{0, r}$, то происходит переход в состояние $(n_1, S) \in E$ с интенсивностью ν_2.

Таким образом, положительные элементы генератора изучаемой 2-D МС определяются так:

$$q((n_1, m_1), (n_2, m_2)) = \begin{cases} \lambda\varphi_1, & \text{если} \quad n_2 = n_1 + 1, \quad m_2 = m_1 = 0, \\ \lambda, & \text{если} \quad n_2 = n_1 + 1, \quad m_2 = m_1 > 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{если} \quad n_2 = n_1 - 1, \quad m_2 = m_1 > 0, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{если} \quad n_2 = n_1 - 1, \quad m_2 = m_1 - 1, \\ \kappa, & \text{если} \quad n_2 = n_1, \quad m_1 > 0, \quad m_2 = m_1 - 1, \\ \tau, & \text{если} \quad n_1 > 0, \quad n_2 = n_1 - 1, \quad m_2 = m_1 = 0, \\ \nu_1, & \text{если} \quad n_2 = n_1, \quad r < m_1 \le s, \quad m_2 = S, \\ \nu_2, & \text{если} \quad n_2 = n_1, \quad 0 \le m_1 \le r, \quad m_2 = S. \end{cases} \tag{2.1}$$

Исходя из соотношений (2.1) заключаем, что полученная 2-D МС представляет собой не зависящий от уровня квазипроцесс размножения и гибели (level independent quasi-birth-death process (LIQBD)). Перенумеровав состояния данной 2-D МС лексикографическим способом (т.е. они нумеруются, согласно порядку (0, 0), (0, 1), ..., (0, S), (1, 0), (1, 1), ..., (1, S), ...), заключаем, что генератор полученной LIQBD представляется следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} B & A_0 & O & O & O & \dots \\ A_2 & A_1 & A_0 & O & O & \dots \\ O & A_2 & A_1 & A_0 & O & \dots \\ O & O & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где O означает нулевую квадратную матрицу размерности $S+1$, а блочные матрицы $B = \|b_{ij}\|$, $A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|$, $k = \overline{0,2}$, $i, j = \overline{0,S}$, $B = \|b_{ij}\|$, являются квадратными с той же размерностью, где их ненулевые элементы определяются как:

$$b_{ij} = \begin{cases} \nu_2, & \text{если} \quad 0 \le i \le r, \quad j = S, \\ \nu_1, & \text{если} \quad r < i \le s, \quad j = S, \\ \kappa, & \text{если} \quad 0 < i \le S, \quad j = i-1, \\ -(\nu_2 + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu_2 + \kappa + \lambda), & \text{если} \quad 0 < i \le r, \quad i = j, \\ -(\nu_1 + \kappa + \lambda), & \text{если} \quad r < i \le s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda), & \text{если} \quad s < i \le S, \quad i = j; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$a_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \lambda\varphi_1, & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \lambda, & \text{если} \quad i > 0, \quad i = j; \end{cases} \tag{2.4}$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nu_2, & \text{если} \quad 0 \le i \le r, \quad j = S, \\ \nu_1, & \text{если} \quad r < i \le s, \quad j = S, \\ \kappa, & \text{если} \quad 0 < i \le S, \quad j = i-1, \\ -(\tau + \nu_2 + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu_2 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad 0 < i \le r, \quad i = j, \\ -(\nu_1 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad r < i \le s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad s < i \le S, \quad i = j; \end{cases} \tag{2.5}$$

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \tau, & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{если} \quad i > 0, \quad i = j, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{если} \quad i > 0, \quad j = i-1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Т е о р е м а 1. При использовании (s, S)-политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$\lambda(1 - (1 - \varphi_1)\pi(0)) < \tau\pi(0) + (\mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)(1 - \pi(0)), \tag{2.7}$$

где

$$\pi(0) = (1 + a_2)^{-r}(1 + a_2((1 + a_1)^{s-r} - 1 + (S - s)(1 + a_1)^{s-r-1}))^{-1};$$

$$a_k = \frac{\nu_k}{\mu_2\sigma_2 + \kappa}, \quad k = 1, 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стационарное распределение, которое соответствует генератору $A = A_0 + A_1 + A_2$, обозначим через $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(S))$. Величины $\pi(m)$ представляют собой вероятности того, что уровень запасов равен m, $m = \overline{0,S}$. Эти величины находятся из следующей системы уравнений равновесия (СУР):

$$\pi A = 0, \quad \pi e = 1, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{0}$ – нулевая вектор-строка размерности $S+1$ и $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец размерности $S+1$, все компоненты которых равны единице.

Из соотношений (2.4)–(2.6) заключаем, что ненулевые элементы генератора $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = \overline{0, S}$ определяются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\nu_2, & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \nu_2, & \text{если} \quad 0 \le i \le r, \quad j = S, \\ \nu_1, & \text{если} \quad r < i \le s, \quad j = S, \\ \mu_2\sigma_2 + \kappa, & \text{если} \quad i > 0, \quad j = i-1, \\ -(\mu_2\sigma_2 + \kappa + \nu_2), & \text{если} \quad 0 < i \le r, \quad i = j, \\ -(\mu_2\sigma_2 + \kappa + \nu_1), & \text{если} \quad r < i \le s, \quad i = j, \\ -(\mu_2\sigma_2 + \kappa), & \text{если} \quad i > s, \quad i = j. \end{cases} \tag{2.9}$$

На основе соотношений (2.9) заключаем, что СУР (2.8) имеет следующий явный вид:

$$(\nu_2 + (\mu_2\sigma_2 + \kappa)(1 - \delta_{m,0}))\pi(m) = (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m+1), \quad m = \overline{0, r}; \tag{2.10}$$

$$(\nu_1 + (\mu_2\sigma_2 + \kappa))\pi(m) = (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m+1), \quad m = \overline{r+1, s}; \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}(\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m+1)(1 - \delta_{m,S}) + \\ + \left(\nu_1 \sum_{k=0}^{r} \pi(k) + \nu_2 \sum_{k=r+1}^{s} \pi(k)\right)\delta_{m,S}, \quad m = \overline{s+1, S}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь и далее $\delta_{x,\,y}$ обозначают символы Кронекера. Из СУР (2.10)–(2.12) с применением метода, предложенного в [22], находим, что величины $\pi(m)$, $m = \overline{1, S}$ выражаются через $\pi(0)$ следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} \alpha_m\pi(0), & \text{если} \quad 1 \le m \le r, \\ \beta_m\pi(0), & \text{если} \quad r+1 \le m \le s, \\ \beta_s\pi(0), & \text{если} \quad s+1 \le m \le S, \end{cases} \tag{2.13}$$

где $\alpha_m = a_2(1 + a_2)^{m-1}$, $\beta_m = a_2(1 + a_2)^r(1 + a_1)^{m-(r+1)}$.

Величина $\pi(0)$ определяется из условия нормировки, т.е. $\pi(0) + \pi(1) + \ldots + \pi(S) = 1$. Тогда с учетом соотношений (2.13) после выполнения простых преобразований получаем, что $\pi(0)$ находятся с помощью формулы, указанной в (2.7).

Из [21, с. 81–83] заключаем, что изучаемый LIQBD является эргодичным тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$\pi A_0 e < \pi A_2 e. \tag{2.14}$$

Таким образом, с учетом соотношений (2.4), (2.6) и (2.14) после выполнения определенных преобразований из (2.14) получим, что соотношение (2.7) верно.

З а м е ч а н и е 1. Условие эргодичности (2.7) имеет следующий вероятностный смысл: взвешенная общая интенсивность поступления заявок в систему должна быть меньше, чем взвешенная общая интенсивность ухода заявок из системы. Условие (2.7) может быть заменено грубым, но в то же время легко проверяемым условием $\lambda < \min(\tau, \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)$.

З а м е ч а н и е 2. В частном случае, когда $\varphi_1 = 0$ (c-заявки не присоединяются в очередь, если уровень запасов равен нулю) и $\tau = 0$ (c-заявки в очереди являются терпеливыми даже тогда, когда уровень запасов равен нулю) из (2.7) при $\sigma_2 = 0$ (c-заявки не получают запасы, т.е. они требуют лишь обслуживания в сервере) находим классическое условие эргодичности одноканальной марковской системы обслуживания, т.е. $\lambda < \mu_1$. Этот факт является вполне ожидаемым, так как при указанных допущениях относительно значений исходных данных изучаемая система превращается классическую СМО типа M/M/1/∞. Интересным оказывается следующий результат: если положить $\sigma_2 = 1$ (все c-заявки получают запасы), то находим, что при $\varphi_1 = 0$ и $\tau = 0$ имеем $\lambda < \mu_2$, т.е. при таких допущениях условие эргодичности системы не зависит от размера склада системы (S), а также от интенсивности разрушающих заявок (κ) и от интенсивностей пополнений из различных источников (ν_1, ν_2). Аналогичные результаты, для похожих моделей с одним источником поставок получены в [23, 24].

Стационарное распределение, соответствующее генератору G, обозначим через $p = (p_0, p_1, p_2, ...)$, где $p_n = (p(n, 0), p(n, 1), ..., p(n, S))$. Согласно известному алгоритму для LIQBD (см. [21, с. 81–83]), заключаем, что при выполнении условия эргодичности (2.7) искомое стационарное распределение определяется как

$$p_n = p_0 R^n, \quad n \geq 1, \tag{2.15}$$

где R является неотрицательным и минимальным решением следующего квадратичного матричного уравнения:

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0. \tag{2.16}$$

Вероятности p_0 граничных состояний вычисляются из СУР:

$$p_0(B + RA_2) = 0, \tag{2.17}$$

$$p_0(I - R)^{-1} e = 1, \tag{2.18}$$

где I обозначает единичную матрицу размерности $S + 1$.

3. Расчет вероятностей состояний системы при использовании (s, Q)**-политики.** Пространство состояний данной модели также задается с помощью множества E, но здесь элементы генератора $\tilde{G}$ соответствующего LIQBD вычисляются так:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & A_0 & O & O & O & \dots \\ A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & O & O & \dots \\ O & A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & O & \dots \\ O & O & A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Ненулевые элементы матриц $\tilde{B}$ и $\tilde{A}_1$ рассчитываются следующим образом:

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} \nu_2, & \text{если} \quad 0 \leq i \leq r, \quad j = i + S - s, \\ \nu_1, & \text{если} \quad r < i \leq s, \quad j = i + S - s, \\ \kappa, & \text{если} \quad 0 < i \leq S, \quad j = i - 1, \\ -(\nu_2 + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu_2 + \kappa + \lambda), & \text{если} \quad 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(\nu_1 + \kappa + \lambda), & \text{если} \quad r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda), & \text{если} \quad s < i \leq S, \quad i = j; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nu_2, & \text{если} \quad 0 \leq i \leq r, \quad j = i + S - s, \\ \nu_1, & \text{если} \quad r < i \leq s, \quad j = i + S - s, \\ \kappa, & \text{если} \quad 0 < i \leq S, \quad j = i - 1, \\ -(\tau + \nu_2 + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu_2 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(\nu_1 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad s < i \leq S, \quad i = j. \end{cases} \tag{3.3}$$

Т е о р е м а 2. При использовании (s, Q)-политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (2.7), где величина $\pi(0)$ определяется как

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{m=1}^{r} \alpha_m + \sum_{m=r+1}^{s} \beta_m + (S - 2s)\beta_s + \sum_{m=S-s+1}^{S} \eta_m\right)^{-1}, \tag{3.4}$$

где

$$\eta_m = \frac{1}{\mu_2\sigma_2 + \kappa}\sum_{i=m-S+s}^{s}\chi_i x_i, \quad m = \overline{S-s+1,S}; \quad \chi_i = \begin{cases}\alpha_i, & 1 \le i \le r,\\ \beta_i, & r+1 \le i \le s;\end{cases} \quad x_i = \begin{cases}\nu_2, & 1 \le i \le r,\\ \nu_1, & r+1 \le i \le s.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ненулевые элементы генератора $\tilde{A} = A_0 + \tilde{A}_1 + A_2$ задаются так:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases}-\nu_2, & \text{если} \quad i = j = 0,\\ \nu_2, & \text{если} \quad 0 \le i \le r, \quad j = i + S - s,\\ \nu_1, & \text{если} \quad r < i \le s, \quad j = i + S - s,\\ \mu_2\sigma_2 + \kappa, & \text{если} \quad i > 0, \quad j = i - 1,\\ -(\mu_2\sigma_2 + \kappa + \nu_2), & \text{если} \quad 0 < i \le r, \quad j = i,\\ -(\mu_2\sigma_2 + \kappa + \nu_1), & \text{если} \quad r < i \le s, \quad j = i,\\ -(\mu_2\sigma_2 + \kappa), & \text{если} \quad i > s, \quad i = j.\end{cases} \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.5) заключаем, что при использовании данной ППЗ балансовые уравнения для состояний m, $m = \overline{0,r}$ и m, $m = \overline{r+1,s}$, совпадают с уравнениями (2.10) и (2.11), соответственно. Однако в данной политике балансовые уравнения для состояний m, $m = \overline{s+1,S}$, имеют следующий вид:

$$(\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m+1), \quad m = \overline{s+1, S-s-1}; \tag{3.6}$$

$$(\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m+1) + \nu_2\pi(m - S + s), \quad m = \overline{S-s, S-s+r}; \tag{3.7}$$

$$(\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\pi(m+1) + \nu_1\pi(m - S + s), \quad m = \overline{S-s+r+1, S}. \tag{3.8}$$

Используя описанный выше метод решения СУР (2.10)–(2.12), находим, что неизвестные величины $\pi(m)$, $m = \overline{1,S}$, выражаются через величины $\pi(0)$ следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases}\alpha_m\pi(0), & \text{если} \quad 1 \le m \le r,\\ \beta_m\pi(0), & \text{если} \quad r+1 \le m \le s,\\ \beta_s\pi(0), & \text{если} \quad s+1 \le m \le S-s,\\ \eta_m\pi(0), & \text{если} \quad S-s+1 \le m \le S.\end{cases} \tag{3.9}$$

Значения $\pi(0)$ вычисляется с помощью условия нормировки, т.е. эта величина определяется из (3.4). С учетом соотношений (3.9) после выполнения определенных преобразований из (2.14) получаем, что теорема 2 верна.

Далее стационарное распределение исходной модели определяется с помощью СУР (2.17), (2.18), где B заменяется на $\tilde{B}$, а A_1 заменяется на $\tilde{A}_1$.

З а м е ч а н и е 3. Из теорем 1 и 2 заключаем, что в изучаемой системе условие эргодичности зависит не только от интенсивностей поступления и обслуживания расходующих заявок, но и от размера склада системы, интенсивности разрушающих заявок, политик пополнения запасов и времен их пополнения из различных источников.

4. Расчет операционных характеристик системы. При использовании обеих ППЗ усредненные операционные характеристики исследуемой системы находятся через вероятности состояний системы следующим образом:

средний уровень запасов на складе (S_{av}) с помощью обеих ППЗ

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m); \tag{4.1}$$

средний объем поставок от Источника-i, $i = 1, 2$, при использовании (s, S)-политики ($V_{av}(i)$)

$$V_{av}(1) = \sum_{m=r+1}^{s}(S-m)\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m); \quad V_{av}(2) = \sum_{m=0}^{r}(S-m)\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m); \tag{4.2}$$

средний объем поставок от Источника-i, $i = 1, 2$, при использовании (s, Q)-политики

$$V_{\text{av}}(1) = (S-s)\sum_{m=r+1}^{s}\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m); \quad V_{\text{av}}(2) = (S-s)\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m); \tag{4.3}$$

среднее число c-заявок в системе (L_{av})

$$L_{\text{av}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^{S} p(n,m); \tag{4.4}$$

средняя интенсивность уничтожения запасов системы (DRS):

$$DRS = \kappa\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0)\right); \tag{4.5}$$

средняя интенсивность обычных заказов (RR_1):

$$RR_1 = \kappa p(0, s+1) + (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\sum_{n=1}^{\infty} p(n, s+1); \tag{4.6}$$

средняя интенсивность экстренных заказов (RR_2):

$$RR_2 = \kappa p(0, r+1) + (\mu_2\sigma_2 + \kappa)\sum_{n=1}^{\infty} p(n, r+1). \tag{4.7}$$

З а м е ч а н и е 4. Средняя интенсивность экстренных заказов равна средней интенсивности аннулирования (rate of cancellation (RC)) обычных заказов.

Вероятность потери заявок c-заявок (PL):

$$PL = \varphi_2\sum_{n=0}^{\infty} p(n,0) + \frac{\tau}{\tau + \lambda\varphi_1 + \nu_2}\sum_{n=1}^{\infty} p(n,0). \tag{4.8}$$

В последней формуле первое слагаемое суммы оценивает вероятность потери c-заявок при их поступлении в систему при условии, что в этот момент уровень запасов равен нулю, а второе – вероятность потери этих заявок из-за их нетерпеливости в очереди при условии, что до момента начала их обслуживания уровень запасов опускается до нулевого значения.

5. Численные результаты. Одна из целей выполнения вычислительных экспериментов заключается в изучении поведения операционных характеристик (4.1)–(4.8) относительно изменения значений ее исходных параметров при использовании различных ППЗ.

Результаты некоторых вычислительных экспериментов для гипотетической модели, которые показывают влияние изменений значений исходных параметров системы на характеристики (4.1)–(4.8), даны в табл. 1–8, где в каждом столбце верхняя строка соответствует (s, S)-политике, а нижняя – (s, Q)-политике пополнения запасов. Во всех экспериментах значения вероятностей φ_k и σ_k, $k = 1, 2$, фиксируются, т.е. считается, что $\varphi_1 = 0.6$ и $\sigma_1 = 0.4$. Кроме того, в табл. 1–7 принимается, что $S = 22$, $s = 10$, $r = 5$, а в табл. 8 – $S = 27$, $r = 4$. Значения остальных параметров указаны после названия каждой таблицы.

В результате анализа данных указанных таблиц можно сделать выводы о поведении операционных характеристик (4.1)–(4.8). Отметим, что часть выводов являются общими, а некоторые из них верны лишь для выбранных значений исходных данных модели.

Как и следовало ожидать, с ростом интенсивности c-заявок уменьшается средний уровень запасов системы при использовании обеих ППЗ, при этом скорости изменения их значений являются малыми (табл. 1). Так, например, при увеличении интенсивности c-заявок на 40% уровень запасов уменьшается всего на 2%. Кроме того, для фиксированных значений интенсивности c-заявок при использовании (s, S)-политики средний уровень запасов системы оказывается больше, чем при использовании (s, Q)-политики. Последний результат соответствует теоретическим ожиданиям, так как с помощью (s, S)-политики средний объем поставок больше, чем при использовании (s, Q)-политики. Аналогичная картина наблюдается при росте интенсивности d-заявок (табл. 2). Как и следовало ожидать, увеличение интенсивности обслуживания c-заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, почти не влияет на значения этой характеристики (табл. 3). Подобная ситуация имеет место при росте интенсивности

Таблица 1. Влияние изменения параметра λ на характеристики системы; $\kappa = 10$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\tau = 20$, $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$

λ	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
20	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
21	2.4146	0.8040	14.4483	2.6650	9.9344	1.3518	0.4628	0.1116
	2.7241	0.6584	13.0320	2.6178	9.9169	1.7235	0.5885	0.1403
22	2.4327	0.8364	14.4111	3.1345	9.9293	1.3764	0.4812	0.1285
	2.7551	0.6894	12.9636	3.1322	9.9094	1.7648	0.6169	0.1646
23	2.4538	1.8765	14.3659	3.9020	9.9229	1.4062	0.5039	0.1517
	2.7851	0.7207	12.8957	3.8170	9.9016	1.8060	0.6455	0.1922
24	2.4723	0.9135	14.3247	4.9088	9.9167	1.4334	0.5248	0.1756
	2.8168	0.7555	12.8217	4.8906	9.8925	1.8511	0.6774	0.2264
25	2.4896	0.9505	14.2841	6.4168	9.9103	1.4601	0.5456	0.1991
	2.8419	0.7843	12.7615	6.2038	9.8843	1.8879	0.7038	0.2577
26	2.5044	0.9836	14.2483	8.5961	9.9045	1.4837	0.5642	0.2282
	2.8688	0.8164	12.6959	8.5751	9.8759	1.9286	0.7333	0.2964
27	2.5218	1.0247	14.2043	14.0662	9.8970	1.5126	0.5873	0.2638
	2.8975	0.8524	12.6223	14.0850	9.8656	1.9736	0.7663	0.3440
28	2.5369	1.0623	14.1645	30.2622	9.8899	1.5388	0.6084	0.2998
	2.9194	0.8812	12.5649	26.7314	9.8571	2.0091	0.7927	0.3865

Таблица 2. Влияние изменения параметра κ на характеристики системы; $\kappa = 20$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\tau = 20$, $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$

κ	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
10	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.4030	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
11	2.4314	0.8341	14.4138	2.2176	10.9227	1.3747	0.4799	0.1100
	2.7531	0.6874	12.9680	2.2163	10.9009	1.7622	0.6150	0.1409
12	2.4679	0.9047	14.3345	2.2168	11.9018	1.4270	0.5198	0.1280
	2.8103	0.7483	12.8369	2.2152	11.8733	1.8418	0.6708	0.1652
13	2.5012	0.9764	14.2561	2.2160	12.8775	1.4786	0.5602	0.1475
	2.8637	0.8103	12.7077	2.2141	12.8409	1.9209	0.7276	0.1915
14	2.5314	1.0490	14.1790	2.2151	13.8940	1.5295	0.6010	0.1683
	2.9135	0.8732	12.5804	2.2129	13.8032	1.9994	0.7854	0.2199
15	2.5589	1.1224	14.1027	2.2142	14.8174	1.5797	0.6420	0.1905
	2.9600	0.9371	12.4549	2.2117	14.7605	2.0774	0.8440	0.2503
16	2.584	1.1965	14.0227	2.2132	15.7810	1.6293	0.6832	0.2140
	3.0032	1.0017	12.3311	2.2103	15.7108	2.1547	0.9033	0.2828
17	2.6067	1.2728	13.9529	2.2122	16.7407	1.6782	0.7246	0.2387
	3.0435	1.0669	12.2090	2.2089	16.6554	2.2314	0.9632	0.3171
18	2.6272	1.3465	13.8793	2.2111	17.6956	1.7265	0.7662	0.2647
	3.0810	1.1328	12.0886	2.2073	17.5934	2.3074	1.0237	0.3534

обслуживания c-заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, почти не влияет на значения этой характеристики (табл. 4). Так, например, при увеличении интенсивности c-заявок на 40% уровень запасов уменьшается всего на 1%. Значения изучаемой

Таблица 3. Влияние изменения параметра μ_1 на характеристики системы; $\lambda = 20$, $\kappa = 10$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\tau = 20$, $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$

μ_1	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
35	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
36	2.3849	0.7540	14.5060	2.1154	9.9418	1.3133	0.4344	0.0899
	2.6829	0.6195	13.1200	2.1235	9.9259	1.6708	0.5529	0.1147
37	2.3796	0.7456	14.5166	2.0381	9.9431	1.3068	0.4296	0.0872
	2.6742	0.6115	13.1384	2.0374	9.9277	1.6598	0.5456	0.1108
38	2.3733	0.7356	14.5280	1.9510	9.9445	1.2989	0.4239	0.0841
	2.6655	0.6037	13.1563	1.9581	9.9294	1.6491	0.5385	0.1070
39	2.3680	0.7276	14.5379	1.8851	9.9456	1.2927	0.4194	0.0817
	2.6571	0.5962	13.1738	1.8846	9.9311	1.6387	0.5316	0.1035
40	2.3626	0.7191	14.5482	1.8168	9.9468	1.2859	0.4145	0.0791
	2.6487	0.5888	13.1909	1.8165	9.9327	1.6285	0.5249	0.1002
41	2.3571	0.7107	14.5580	1.7533	9.9480	1.2792	0.4097	0.0767
	2.6405	0.5817	13.2076	1.7531	9.9342	1.6186	0.5184	0.0971
42	2.3510	0.7018	14.5690	1.6880	9.9492	1.2721	0.4046	0.0742
	2.6325	0.5748	13.2239	1.6939	9.9357	1.6089	0.5121	0.0941
43	2.3463	0.6947	14.5776	1.6388	9.9502	1.2666	0.4006	0.0722
	2.6246	0.5681	13.2399	1.6387	9.9371	1.5995	0.5059	0.0912

Таблица 4. Влияние изменения параметра μ_2 на характеристики системы; $\lambda = 20$, $\kappa = 10$, $\mu_1 = 40$, $\tau = 20$, $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$

μ_2	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
20	2.3104	0.6447	14.6397	2.4956	9.9568	1.2256	0.3720	0.0695
	2.5741	0.5268	13.3392	2.4760	9.9455	1.5408	0.4683	0.0875
21	2.3222	0.6607	14.6198	2.3220	9.9547	1.2387	0.3811	0.0716
	2.5894	0.5390	13.3095	2.3211	9.9431	1.5583	0.4794	0.0900
22	2.3332	0.6761	14.6007	2.1710	9.9527	1.2516	0.3899	0.0736
	2.6055	0.5521	13.2779	2.1703	9.9404	1.5770	0.4914	0.0927
23	2.3436	0.6909	14.5824	2.0385	9.9507	1.2633	0.3984	0.0755
	2.6107	0.5648	13.2476	2.0379	9.9378	1.5949	0.5029	0.0953
24	2.3543	0.7066	14.5632	1.9103	9.9486	1.2759	0.4074	0.0775
	2.6365	0.5782	13.2158	1.9090	9.9350	1.6137	0.5152	0.0980
25	2.3626	0.7191	14.5480	1.8168	9.9468	1.2859	0.4145	0.0791
	2.6487	0.5888	13.1909	1.8165	9.9327	1.6285	0.5249	0.1002
26	2.3713	0.7324	14.5321	1.7232	9.9449	1.2965	0.4221	0.0809
	2.6617	0.6003	13.1643	1.7229	9.9302	1.6444	0.5353	0.1026
27	2.3796	0.7453	14.5166	1.6387	9.9431	1.3066	0.4294	0.0825
	2.6740	0.6114	13.1388	1.6386	9.9277	1.6596	0.5455	0.1048
28	2.3874	0.7578	14.5010	1.5622	9.9413	1.3164	0.4366	0.0841
	2.6857	0.6221	13.1142	1.5621	9.9253	1.6743	0.5552	0.1070

характеристики (4.1) почти не зависит от степени нетерпеливости c-заявок в очереди. Например, при увеличении указанного параметра на 40% значения уровня запасов меняются лишь в третьем знаке после десятичной точки (табл. 5). С уменьшением среднего времени поставки от

Таблица 5. Влияние изменения параметра τ на характеристики системы; $\lambda = 20$, $\kappa = 10$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$

τ	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
20	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
21	2.3912	0.7645	14.4945	2.2169	9.9403	1.3215	0.4404	0.0920
	2.6918	0.6276	13.1013	2.2154	9.9241	1.6819	0.5603	0.1171
22	2.3911	0.7645	14.4947	2.2155	9.9403	1.3214	0.4403	0.0907
	2.6917	0.6275	13.1015	2.2137	9.9241	1.6818	0.5602	0.1153
23	2.3910	0.7644	14.4950	2.2143	9.9403	1.3213	0.4403	0.0894
	2.6916	0.6274	13.1017	2.2120	9.9241	1.6816	0.5601	0.1135
24	2.3090	0.7643	14.4952	2.2131	9.9403	1.3213	0.4403	0.0881
	2.6915	0.6273	13.1019	2.2104	9.9241	1.6815	0.5600	0.1118
25	2.3908	0.7643	14.4955	2.2119	9.9403	1.3212	0.4402	0.0868
	2.6914	0.6272	13.1020	2.2090	9.9241	1.6814	0.5600	0.1102
26	2.3907	0.7642	14.4957	2.2108	9.9403	1.3211	0.4402	0.0856
	2.6913	0.6271	13.1022	2.2077	9.9242	1.6813	0.5599	0.1087
27	2.3906	0.7642	14.4959	2.2097	9.9403	1.3210	0.4402	0.0843
	2.6912	0.6270	13.1023	2.2064	9.9242	1.6812	0.5598	0.1071
28	2.3905	0.7641	14.4961	2.2087	9.9403	1.3210	0.4401	0.0831
	2.6911	0.6270	13.1024	2.2051	9.9242	1.6810	0.5597	0.1056

Таблица 6. Влияние изменения параметра ν_1 на характеристики системы; $\lambda = 20$, $\kappa = 10$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\tau = 20$, $\nu_2 = 20$

ν_1	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
5	2.4455	0.3899	14.7645	2.2217	9.9926	1.3516	0.4504	0.0166
	2.7102	0.3278	13.4468	2.2216	9.9907	1.6937	0.5645	0.0208
6	2.2522	0.3281	14.9288	2.2218	9.9938	1.3803	0.3791	0.0139
	2.4575	0.2702	13.7598	2.2217	9.9924	1.6940	0.4652	0.0171
7	2.0816	0.2773	15.0708	2.2218	9.9947	1.4054	0.3204	0.0118
	2.2423	0.2243	14.0230	2.2218	9.9937	1.6942	0.3862	0.0142
8	1.9306	0.2353	15.1940	2.2219	9.9955	1.4274	0.2719	0.0100
	2.0575	0.1874	14.2464	2.2218	9.9947	1.6944	0.3227	0.0118
9	1.7965	0.2005	15.3013	2.2219	9.9962	1.4468	0.2317	0.0085
	1.8975	0.1576	14.4375	2.2219	9.9955	1.6946	0.2714	0.0100
10	1.6771	0.1716	15.3952	2.2220	9.9967	1.4639	0.1983	0.0073
	1.7452	0.1311	14.6175	2.2219	9.9963	1.6947	0.2258	0.0083
11	1.5704	0.1474	15.4776	2.2220	9.9972	1.4792	0.1703	0.0062
	1.6359	0.1133	14.7454	2.2220	9.9968	1.6948	0.1952	0.0072
12	1.4747	0.1272	15.5503	2.2220	9.9976	1.4927	0.1469	0.0054
	1.5280	0.0969	14.8705	2.2220	9.9972	1.6949	0.1668	0.0061
13	1.3886	0.1101	15.6148	2.2220	9.9979	1.5049	0.1272	0.0046
	1.4323	0.0832	14.9806	2.2220	9.9976	1.6949	0.1433	0.0052

Источника-1 (Источника-2) увеличивается средний уровень запасов системы, при этом увеличение среднего времени от Источника-2 очень мало влияет на скорости изменения рассматриваемой характеристики (табл. 6 и 7). С ростом критического уровня запасов (т.е. s) увеличивается

Таблица 7. Влияние изменения параметра ν_2 на характеристики системы; $\lambda = 20$, $\kappa = 10$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\tau = 20$, $\nu_1 = 5$

ν_2	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
10	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
11	2.4011	0.6966	14.5442	2.2191	9.9536	1.3269	0.4422	0.0757
	2.6966	0.5744	13.1642	2.2183	9.9412	1.6851	0.5615	0.0961
12	2.4092	0.6400	14.5857	2.2198	9.9635	1.3314	0.4437	0.0620
	2.7001	0.5296	13.2167	2.2192	9.9538	1.6873	0.5622	0.0786
13	2.4161	0.5921	14.6206	2.2203	9.9710	1.3353	0.4450	0.0513
	2.7027	0.4914	13.2611	2.2198	9.9633	1.6889	0.5628	0.0649
14	2.4221	0.5510	14.6503	2.2207	9.9767	1.3386	0.4461	0.0428
	2.7049	0.4555	13.3026	2.2203	9.9712	1.6903	0.5633	0.0531
15	2.4272	0.5154	14.6760	2.2209	9.9811	1.3414	0.4470	0.0360
	2.7062	0.4298	13.3320	2.2206	9.9760	1.6912	0.5636	0.0454
16	2.4318	0.4841	14.6983	2.2212	9.9846	1.3440	0.4479	0.0305
	2.7074	0.4046	13.3608	2.2209	9.9806	1.6920	0.5638	0.0384
17	2.4358	0.4562	14.7179	2.2213	9.9873	1.3462	0.4486	0.0259
	2.7084	0.3822	13.3861	2.2211	9.9840	1.6926	0.5640	0.0326
18	2.4394	0.4319	14.7352	2.2215	9.9895	1.3482	0.4493	0.0222
	2.7091	0.3621	13.4086	2.2213	9.9868	1.6930	0.5642	0.0279

Таблица 8. Влияние изменения параметра s на характеристики системы; $\lambda = 20$, $\kappa = 10$, $\mu_1 = 35$, $\mu_2 = 25$, $\tau = 20$, $\nu_1 = 5$

s	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	RDC	RR_1	RR_2	PL
8	2.1654	0.8375	16.2053	2.2171	9.9232	0.9152	0.3799	0.1202
	2.3578	0.7537	14.8139	2.2163	9.9110	1.0609	0.4404	0.1393
9	2.4813	0.6985	16.5862	2.2180	9.9359	0.9509	0.3169	0.1002
	2.6918	0.6058	15.1313	2.2172	9.9244	1.1214	0.3737	0.1182
10	2.7407	0.5843	16.9805	2.2187	9.9464	0.9910	0.2651	0.0839
	2.9607	0.4869	15.4854	2.2180	9.9357	1.1888	0.3180	0.1006
11	2.9542	0.4904	17.3856	2.2192	9.9550	1.0361	0.2225	0.0704
	3.1771	0.3912	15.8689	2.2186	9.9451	1.2643	0.2714	0.0858
12	3.1304	0.4129	17.7989	2.2197	9.9621	1.0867	0.1873	0.0592
	3.3513	0.3142	16.2760	2.2191	9.9529	1.3497	0.2326	0.0736
13	3.2761	0.3488	18.2182	2.2201	9.9680	1.1436	0.1582	0.0500
	3.4914	0.2524	16.7020	2.2195	9.9595	1.4471	0.2002	0.0633

средний уровень запасов при использовании обеих ППЗ (табл. 8). Этот факт соответствует теоретическим ожиданиям, так как с увеличением указанного параметра увеличиваются поставки запасов от различных источников.

С ростом интенсивности c-заявок увеличиваются средние объемы поставок от обоих Источников с помощью каждой ППЗ (табл. 1). Этот результат соответствует теоретическим ожиданиям, так как при этом уровень запасов системы часто опускается до критических значений s и r. Для фиксированных значений интенсивности c-заявок средний объем поставок от медленного Источника оказывается меньше при использовании (s, S)-политики; обратная картина наблюдается при снабжении от быстрого Источника, т.е. для фиксированных значений интенсивности c-заявок, средний объем поставок от быстрого Источника оказывается меньше с помощью

(s, Q)-политики. Аналогичная картина наблюдается при росте интенсивности d-заявок (табл. 2). Однако с ростом интенсивности обслуживания c-заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, уменьшаются средние объемы поставок от обоих Источников при использовании каждой ППЗ (табл. 3). Следует отметить, что этот параметр почти не влияет на значения поставок из различных источников. Обратная картина наблюдается при росте интенсивности обслуживания c-заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, т.е. при увеличении этого параметра увеличиваются средние объемы поставок от обоих Источников при помощи каждой ППЗ (табл. 4). Этого следовало ожидать, так как после завершения обслуживания таких заявок уровень запасов системы уменьшается. Здесь также скорость изменения значений отмеченных характеристик оказывается очень малая. Увеличения степени нетерпеливости c-заявок в очереди приводят к уменьшению изучаемых характеристик (4.2) и (4.3), так как уход c-заявок из очереди как минимум не приводит к уменьшению уровня запасов системы; при этом скорость изменения значений характеристик (4.2) и (4.3) ничтожно малая (табл. 5). С уменьшением времени поставки от Источника-1 уменьшаются средние объемы поставок от обоих Источников при использовании каждой ППЗ, при этом скорости изменения значений этих характеристик оказываются достаточно высокими, т.е. увеличивается интенсивность поставок, но с меньшими (средними) объемами из каждого источника (табл. 6). Интересным оказывается поведение этих характеристик при уменьшении времени поставки от Источника-2, т.е. с уменьшением указанного параметра происходит увеличение среднего объема поставки от Источника-1 при обеих ППЗ; хотя скорость роста незначительная (например, при увеличении интенсивности поступления от Источника-1 на 80% средний объем поставок от Источника-1 увеличивается всего на 2%). Одновременно растет средний объем поставки от Источника-2 при обеих ППЗ, при этом скорость роста является значительной (табл. 7). Как и следовало ожидать, с ростом критического уровня запасов увеличивается средний объем поставок от обоих источников при использовании обеих ППЗ (табл. 8).

С ростом интенсивности c-заявок существенным образом увеличивается среднее число заявок в системе с помощью обеих ППЗ (см. табл. 1). Отметим, что при увеличении интенсивности c-заявок на 40% среднее число заявок в системе увеличивается почти в 15 раз. Кроме того, для фиксированных значений интенсивности c-заявок при использовании (s, S)-политики среднее число заявок в системе оказывается больше, чем с применением (s, Q)-политики. Последний результат соответствует теоретическим ожиданиям, так как при помощи (s, S)-политики средний уровень запасов в системе больше, чем при использовании (s, Q)-политики, т.е. с применением (s, S)-политики увеличивается вероятность принятия поступающих c-заявок в систему, а также уменьшается вероятность их потери из очереди из-за отсутствия запасов системы. Однако увеличение интенсивности d-заявок почти не влияет на знчения этой характеристики, при этом для фиксированных значений интенсивности d-заявок при использовании (s, S)-политики среднее число заявок в системе оказывается чуть больше, чем при помощи (s, Q)-политики (табл. 2). Как и следовало ожидать, увеличение интенсивностей обслуживания c-заявок обоих типов приводят к уменьшению среднего числа заявок в системе (табл. 3 и 4). Значения характеристики (4.4) почти не зависят от степени нетерпеливости c-заявок в очереди (табл. 5), от средних времен поставки от разных источников (табл. 6 и 7), а также от критического уровня запасов (табл. 8).

Средняя интенсивность уничтожения запасов системы (4.5) является почти постоянной относительно изменений других операционных параметров (табл. 1, 3–8), за исключением изменения средней интенсивности поступления d-заявок (табл. 2). При этом для фиксированных значений остальных параметров средняя интенсивность уничтожения запасов системы оказывается чуть больше при использовании (s, S)-политики. Этот факт объясняется тем, что средний уровень запасов системы при помощи указанной политики больше, чем с применением (s, Q)-политики.

Средняя интенсивность обычных заказов является возрастающей величиной относительно изменения интенсивности c-заявок, при этом их значения при использовании (s, Q)-политики оказываются больше, чем с помощью (s, S)-политики (табл. 1). Последний факт объясняется тем, что средний уровень запасов системы при использовании (s, Q)-политики оказываются меньше, чем с применением (s, S)-политики (табл. 1). Подобная картина наблюдается для средней интенсивности экстренных заказов (табл. 1), т.е. увеличение интенсивности d-заявок также приводит к увеличению интенсивностей обычных и экстренных заказов (табл. 2). Отметим, что увеличение интенсивностей обслуживания c-заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, приводит к уменьшению интенсивностей поставок от обоих источников при помощи каждой ППЗ (табл. 3). Вместе с тем обратная картина наблюдается при увеличении интенсивностей обслуживания c-заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, т.е. это приводит к увеличению интенсивностей поставок от обоих Источников при использовании каждой ППЗ (табл. 4). Следует отметить, что скорости изменения интенсивностей поставок от разных источников являются достаточно малыми величинами (табл. 3 и 4). Средние интенсивности обычных и экстренных заказов почти не зависят от степени нетерпеливости c-заявок (табл. 5). С уменьшением времени поставки от Источника-1 увеличивается интенсивность обычных заказов с применением обеих ППЗ. При этом скорости изменения значений этой характеристики оказываются достаточно малыми, т.е. увеличивается интенсивность поставок от медленного источника; как и следовало ожидать, при этом уменьшается интенсивность экстренных заказов (табл. 6). Интересно, что с уменьшением времени поставок от Источника-2 увеличиваются интенсивности обычных и экстренных заказов при помощи обеих ППЗ, при этом скорости изменения их значений оказываются достаточно малыми величинами (табл. 7). Отметим, что с ростом критического уровня запасов увеличиваются средние интенсивность обычных и экстренных заказов с применением обеих ППЗ, при этом значения обеих характеристик оказываются большими при использовании (s, Q)-политики (табл. 8).

Вероятность потери c-заявок является возрастающей функцией относительно увеличения их интенсивности, а также роста интенсивности d-заявок, так как с увеличением интенсивностей этих заявок увеличивается вероятность попадания системы в состояния, в которых уровень запасов равен нулю (см. формулы (4.8)). При этом ее значения при использовании (s, S)-политики оказываются меньше, чем с помощью (s, Q)-политики (табл. 1 и 2). Заметим, что последний факт имеет место при относительных изменениях всех исходных параметров системы. Увеличение интенсивности обслуживания c-заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, приводит к уменьшению вероятности потери c-заявок при использовании обеих ППЗ (табл. 3). Вместе с тем при увеличении интенсивности обслуживания c-заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, приводит к росту изучаемой характеристики (табл. 4). Эти факты также являются ожидаемыми, так как получение запасов приводит к увеличению шансов опустошения склада системы, а отказ от получения запасов не меняет уровень запасов системы, при этом уменьшается длина очереди, что в конечном итоге приводит к уменьшению интенсивности c-заявок, которые уходят из очереди необслуженными. Вероятность потери c-заявок почти не зависит от степени их нетерпеливости, т.е. увеличении степени нетерпеливости почти на 50% приводит к уменьшению вероятности потери лишь на величину 0.01 (табл. 5). Рост интенсивности поступления запасов с обоих источников приводят к уменьшению вероятности потери c-заявок, при этом скорости уменьшения этой характеристики с помощью обеих ППЗ являются достаточно высокими (табл. 6 и 7). С ростом критического уровня запасов вероятности потери заявок уменьшаются с достаточно высокими скоростями при использовании обеих ППЗ (табл. 8).

Важными достоинствами предложенных здесь ППЗ является то, что в отличие от классических политик (s, S) и (s, Q) в них имеются два управляемых параметра — s (точка обычного заказа) и r (точка экстренного заказа). Это обстоятельство увеличивает возможности влияния на экономические показатели системы при использовании различных ППЗ. Исходя из этого другая цель выполнения вычислительных экспериментов заключается в изучении поведения экономических показателей системы относительно изменения значений указанных управляемых параметров при фиксированных значениях исходных параметров с применением различных ППЗ.

Для конкретности изложения, здесь экономический показатель системы определяется с помощью суммарных штрафов (total cost (TC)), которые вычисляются как:

$$\mathrm{TC}(s,r) = \sum_{i=1}^{2}(K_i + c_r(i)V_{\mathrm{av}}(i))RR_i + c_c RR_2 + c_h S_{\mathrm{av}} + c_d DRS + c_l \lambda PL + c_w L_{\mathrm{av}}, \quad (5.1)$$

где K_i — фиксированная цена одного заказа от Источника-i; $c_r(i)$ — цена единицы объема заказа от Источника-i, $i = 1, 2$; c_c — штрафы за аннулирования одного заказа от Источника-1; c_h — цена хранения единицы объема запасов за единицу времени; c_d — штрафы за уничтожение единицы запаса; c_l — штрафы за потери одной заявки; c_w — цена за единицу времени ожидания в очереди одной c-заявки.

З а м е ч а н и е 5. Для краткости записи только в левой части равенства (5.1) явно указываются аргументы функционала $\mathrm{TC}(s, r)$, хотя считается, что все компоненты суммы в правой части (5.1) также являются функциями этих аргументов.

Возможны различные постановки задачи минимизации функционала (5.1). Так, одна из постановок задачи заключается в следующем: пусть фиксированы все параметры модели,

Таблица 9. Нахождение оптимальных значений r (а) и s (б)

(а)		(б)	
r	TC	s	TC
3	2104	6	5218
4	2070	7	5149
5	2046	8	5116
6	**2034**	**9**	**5110**
7	2035	10	5127
8	2049	11	5161
9	2081	12	5210
10	2137		

Таблица 10. Результаты решения задачи (5.2) при использовании (s, S)-политики

r	s										
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	2200	2245	2307	2390	2498	2637	2814	3038	3319	3674	4120
2	2139	2172	2222	2290	2396	2498	2650	2845	3094	3404	
3	2090	2115	2154	2211	2288	2391	2526	2701	2929		
4	2051	2070	2103	2152	2220	2314	2439	2665			
5	2023	2039	2067	2122	2176	2267	2392				
6	2005	2019	2061	2092	2159	2255					
7	**1998**	2014	2045	2095	2172						
8	2003	2024	2063	2127							
9	2023	2055	2123								
10	2063	2113									
11	2131										

кроме параметра r, т.е. задача заключается в нахождении такого значения r, чтобы минимизировать (5.1).

Некоторые результаты решения этой задачи для модели, в которой $S = 27$, $s = 12$ при использовании (s, S)-политики показаны в табл. 9 (а), где жирным шрифтом указано оптимальное значение параметра r. Здесь и далее значения исходных параметров модели и коэффициенты в функционале (5.1) выбираются следующим образом:

$$\lambda = 20, \quad \kappa = 10, \quad \mu_1 = 35, \quad \mu_2 = 25, \quad \tau = 20, \quad \nu_1 = 5, \quad \nu_2 = 10, \quad \sigma_1 - 0.4, \quad \varphi_1 = 0.6;$$

$$K_1 = 100, \ K_2 = 200, \quad c_r(1) = 50, \quad c_r(2) = 100, \quad c_c = 50, \quad c_h = 35, \quad c_d = 75, \quad c_l = 200, \quad c_w = 50.$$

В другой постановке задачи минимизации (5.1) фиксируются все параметры модели, кроме параметра s, и требуется найти такое значение s, чтобы минимизировать (5.1). Результаты решения этой задачи для модели, в которой $S = 27$, $r = 4$, с помощью (s, S)-политики представлены в табл. 9 (б), где жирным шрифтом указано оптимальное значение параметра s.

Интересно отметить, что в обеих задачах функционал (5.1) является выпуклым, хотя строгое доказательство этого факта для любых значений параметров модели оказывается трудным из-за сложности его вида.

Аналогичным образом можно найти решения этих задач при использовании (s, Q)-политики. Эти результаты здесь не приводятся.

Теперь рассмотрим следующую постановку задачи минимизации (5.1): требуется найти такие пары оптимальных значений (s^*, r^*), чтобы минимизировать функционал (5.1). Она формально записывается так:

$$(s^*, r^*) = \arg\min_{(s,r)\in X} TC(s,r). \tag{5.2}$$

Таблица 11. Результаты решения задачи (5.2) при использовании (s, Q)-политики

r	s										
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	2335	2393	2440	2545	2639	2783	2965	3179	3457	3799	4217
2	2258	2302	2352	2423	2499	2620	2756	2956	3199	3502	
3	2197	2229	2268	2325	2388	2492	2615	2786	3006		
4	2148	2172	2190	2250	2304	2387	2514	2669			
5	2111	2129	2154	2196	2247	2337	2459				
6	2085	2101	2124	2166	2220	2314					
7	**2072**	2080	2114	2161	2225						
8	2073	2086	2127	2179							
9	2096	2120	2171								
10	2134	2170									
11	2202										

Задача (5.2) всегда имеет решение, так как область допустимых решений $X = \{(s, r): 0 < s < (S/2), 0 \le r < s\}$ является дискретным конечным множеством.

Результаты решения задачи (5.2) для указанных выше значений исходных параметров системы при использовании различных ППЗ показаны в табл. 10 и 11, где считается, что $S = 27$. В этих таблицах жирным шрифтом указаны минимальные значения функционала (5.1). Так, из табл. 10 и 11 заключаем, что для выбранных исходных данных в обеих ППЗ оптимальные пары (s^*, r^*) совпадают, т.е. в обеих ППЗ имеем (s^*, r^*) = (12, 7).

Отметим, что в обеих ППЗ при фиксированных значениях параметра s функционал (5.1) является выпуклым относительно параметра r; при фиксированных значениях параметра r функционал (5.1) монотонно убывает относительно параметра s. Кроме того, для каждой пары (s, r) значения функционала (5.1) при использовании (s, Q)-политики оказываются больше, чем при помощи (s, S)-политики.

Заметим, что возможны и другие постановки задач нахождения оптимальных значений (s^*, r^*) с определенными ограничениями на операционные характеристики (4.1)–(4.8). Однако из-за ограничения объема статьи они здесь не рассматриваются.

Заключение. Предложена новая политика пополнения запасов в системах обслуживания-запасания с двумя источниками поставок, где быстрый источник является более дорогим, чем медленный источник. Рассмотрены модели с двумя известными политиками пополнения запасов – с фиксированным объемом поставок и с переменным объемом поставок. Кроме точки заказа вводится новый пороговый параметр для уровня запасов системы, который определяет момент аннулирования заказа от медленного источника и одновременно генерирования нового заказа в быстрый источник. Другая отличительная особенность изучаемых моделей состоит в том, что в системе кроме расходующих заявок имеются и разрушающие заявки, появление которых приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов системы.

Изучается модель с бесконечным размером буфера для ожидания расходующих заявок, которые присоединяются в очередь даже тогда, когда уровень запасов равен нулю. Вместе с тем эти заявки в очереди могут быть нетерпеливыми, когда уровень запасов опускается до нулевого уровня. Считается, что после завершения обслуживания часть заявок, согласно схеме Бернулли, либо покидает систему без получения товаров, либо получает товары. Показано, что математическими моделями этих систем при использовании предложенной политики являются двумерные цепи Маркова, которые имеют трехдиагональные генераторы. Найдены условия эргодичности цепей и показано, что в частном случае из них получаются ранее известные результаты для подобных моделей.

В качестве дальнейших исследований в первую очередь следует направить усилия на изучение подобных моделей при более общих предположениях относительно типа поступающих заявок обоих типов, а также вида функции распределения времени обслуживания расходующих заявок и времен выполнения заказов от различных источников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwarz M., Daduna H.* Queuing Systems with Inventory Management with Random Lead Times and with Backordering // Mathematical Methods of Operations Research. 2006. V. 64. Iss. 3. P. 383–414.
2. *Schwarz M., Sauer C., Daduna H., Kulik R., Szekli R.* M/M/1 Queuing Systems with Inventory // Queuing Systems. Theory and Applications. 2006. V. 54. Iss. 1. P. 55–78.
3. *Рубальский Г.Б.* Стохастическая теория управления запасами // А и Т. 2009. № 12. С. 175–186.
4. *Sigman K., Simchi-Levi D.* Light Traffic Heuristic for an M/G/1 Queue with Limited Inventory // Annals of Operations Research. 1992. V. 40. P. 371–380.
5. *Melikov A.Z., Molchanov A.A.* Stock Optimization in Transport/Storage Systems // Cybernetics. 1992. V. 28. Iss. 3. P. 484–487.
6. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Narayanan W.* Inventory with Positive Service Time: A Survey // Advanced Trends in Queueing Theory. Series of Books “Mathematics and Statistics” Sciences. V. 2 / Eds V. Anisimov, N. Limnios. London: ISTE & Wiley, 2021. P. 201–238.
7. *Ramesesh R.N., Ord J.K., Hayya J.C., Pan A.* Sole Versus Dual Sourcing in Stochastic Lead-Time (s, Q) Inventory Models // Management Science. 1991. V. 37. № 4. P. 428–443.
8. *Janssen F., de Kok T.* A Two-supplier Inventory Model // Intern. J. of Production Economics. 1999. V. 59. Iss. 1–3. P. 395–403.
9. *Kouiki C., Babai M.Z., Minner S.* On the Benefit of Dual-sourcing in Managing Perishable Inventory // Intern. J. of Production Economics. 2018. V. 204. Iss. 10. P. 1–17.
10. *Haughton M., Isotupa K.* A Continuous Review Inventory System with Lost Sales and Emergency Orders // American J. of Operations Research. 2018. V. 8. P. 343–359. https://doi.org/10.4236/ajor.2018.85020
11. *Cao P., Yao D.* Dual Sourcing Policy for a Continuous-review Stochastic Inventory System // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. V. 64. Iss. 7. P. 2921–2928.
12. *Boulaksil Y., Hamdouch Y., Ghoudi K., Fransoo J.C.* Comparing Policies for the Stochastic Multi-period Dual Sourcing Problem from a Supply Chain Perspective // Intern. J. of Production Economics. 2021. V. 232. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2020.107923
13. *Barron J.* The Continuous (S, s, Se) Inventory Model with Dual Sourcing and Emergency Orders // Europ. J. of Operations Research. 2021. 42 p. https://doi.org/10.1016/ejor.2021.09.021
14. *Minner S.* Multiple-supplier Inventory Models in Supply Chain Management: A Review // Intern. J. Production Economics. 2003. V. 81–82. P. 265–279.
15. *Yao M., Minner S.* Review of Multi-supplier Inventory Models in Supply Chain Management: An Update // Technical Report in SSRN Electronic J. 70 p. 2017. https://doi.org/10.2139/ssrn.2995134.
16. *Xin L., Mieghem J.A.V.* Dual-sourcing, Dual-mode Dynamic Stochastic Inventory Models: A Review // Available at SSRN: http://dxdoi.org/10.2139/ssrn.3885147. Sept. 29, 2021. 31 p.
17. *Melikov A., Krishnamoorthy A., Shahmaliyev M.O.* Numerical Analysis and Long Run Total Cost Optimization of Perishable Queuing Inventory Systems with Delayed Feedback // Queuing Models and Service Managements. 2019. V. 2. Iss. 1. P. 83–111.
18. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, Negative Customers and Applications // Mathematical & Computer Modeling. 2011. V. 53. P. 205–212.
19. *Gelenbe E.* Random Neural Networks with Positive and Negative Signals and Product Form Solution // Neural Computation. 1989. V. 1. Iss. 4. P. 502–510.
20. *Soujanya M.L., Laxmi P.V.* Analysis on Dual Supply Inventory Model Having Negative Arrivals and Finite Lifetime Inventory // Reliability: Theory and Applications. 2021. V. 16. № 3. P. 295–301.

21. *Neuts M.F.* Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.

22. *Меликов А.З., Шахмалыев М.О., Наир С.С.* Матрично-геометрический метод исследования системы обслуживания с портящимися запасами // А и Т. 2021. № 12. С. 154–168.

23. *Krishnamoorthy A., Manikandan R., Lakshmy B.* Revisit to Queueing-inventory System with Positive Service Time // Annals of Operations Research. 2015. V. 233. P. 221–236.

24. *Zhang Y., Yue D., Yue W.* A Queueing-inventory System with Random Order Size Policy and Server Vacations // Annals of Operations Research. 2020. https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-020-03859-3.