
**УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

УДК 62-40

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЛИНЕЙНО-
КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С РАВНОМЕРНЫМИ
ОЦЕНКАМИ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ¹**

© 2022 г. Ю. Э. Плешивцева^а, Э. Я. Рапопорт^{а,*}

^аСамарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

*e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 28.10.2021 г.

После доработки 17.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи пространственно-временного управления в системах с распределенными параметрами параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления, распространяющем на широкий круг задач оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов с автономными модальными управлениями в открытой области их определения и с учетом ограничений на заданный по условиям технической реализации характер пространственного распределения управляющих воздействий сводятся к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи и заданной зависимостью от пространственных аргументов управляемой величины. Полученные результаты распространяются на задачи поиска неизменных во времени пространственно-распределенных управлений, рассматриваемых в роли искомого проектного решения объекта.

DOI: 10.31857/S0002338822030118

Введение. Одной из наиболее существенных особенностей систем с распределенными параметрами (СРП) по сравнению с сосредоточенными системами (ССП) является расширение класса допустимых управляющих воздействий за счет включения в их число пространственно-временных управлений (ПВУВ), описываемых подобно состоянию СРП функциями векторного аргумента – времени и пространственных координат [1–8]. Применение ПВУВ открывает принципиально новые возможности управления СРП, недостижимые в классе свойственных СПС сосредоточенных управлений, которые не зависят от пространственных переменных. В частности, именно использование ПВУВ специального вида привело к созданию нового перспективного класса СРП с подвижным воздействием, охватывающего широкий круг актуальных прикладных задач самого различного физического содержания [6–8].

В работе рассматривается задача оптимального по квадратичному критерию качества управления СРП, описываемой линейным пространственно-одномерным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с внутренним ПВУВ при заведомо неизвестном характере его зависимости как от времени, так и от пространственной координаты. Задача исследуется в специфических и типичных для приложений условиях оценки в равномерной метрике целевых множеств с негладкой границей в конечной точке оптимального процесса в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, исключающих применение классических условий трансверсальности при аналитическом синтезе оптимальных регуляторов [5, 9–11].

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБОУ ВО “Самарский государственный технический университет”.

Для частного случая использования скалярных сосредоточенных управлений с априори заданным характером пространственного распределения внутренних управляющих воздействий описываемая задача изучалась в [11] для детерминированных и не полностью определенных моделей объекта. В [12] были найдены оптимальные по критерию энергосбережения программные пространственно-временные управляющие воздействия для различных возможных вариантов их фактического представления.

1. Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t_1]$ одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с самосопряженным дифференциальным оператором в его правой части:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x) Q(x, t) + u(x, t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

при кусочно-непрерывном [2] пространственно-временном внутреннем управлении $u(x, t)$; заданных достаточно гладких функций $b(x)$, $c(x)$, $c_1(x)$ и постоянных коэффициентах $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$; $\beta_0, \beta_1 > 0$. Управляющее воздействие $u(x, t)$ не стесняется никакими дополнительными ограничениями.

Допустим, что необходимо обеспечить за фиксируемое априори конечное время t_1 заданную точность ε равномерного приближения результирующего пространственного распределения управляемой величины $Q(x, t_1)$ к требуемому $Q^{**}(x) > Q_0 \forall x \in [x_0, x_1]$, согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t_1) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.4)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [5, 9].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.4) оценивается типичным квадратичным функционалом качества, определяемым для простоты и наглядности без потери общности основных результатов в следующей типичной частной форме:

$$I(u) = \int_0^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\rho_Q Q^2(x, t) + u^2(x, t)] dx dt \rightarrow \min_{u(x, t)} \quad (1.5)$$

с постоянным весовым коэффициентом $\rho_Q > 0$.

Подобно тому, как применение преобразования Лапласа к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям модели объекта с сосредоточенными параметрами приводит к алгебраическим уравнениям относительно изображений управляемой величины, не содержащим ее производных по времени, известный аппарат конечных интегральных преобразований позволяет перейти от дифференциальных уравнений в частных производных (1.1)–(1.3) к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не содержащих производных управляемой величины по пространственной координате [13]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{u}_n(\mu_n, t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n),$$

относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x) \quad (1.7)$$

по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \dots$, определяемых вместе с собственными числами μ_n^2 известными способами [13]. Здесь $\bar{u}_n(\mu_n, t)$ – временные моды разложения $u(x, t)$ в ряд вида (1.7):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x), \tag{1.8}$$

рассматриваемые далее в качестве бесконечного числа автономных, независимых друг от друга сосредоточенных управляющих воздействий, и $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ – моды $Q_0(x)$.

При этом поведение каждой из модальных составляющих \bar{Q}_n управляемой величины $Q(x, t)$ определяется только “своим” управляющим воздействием \bar{u}_n , согласно решению каждого из уравнений (1.6) в отдельности независимо от других, обеспечивая в итоге требуемое пространственно-временное состояние $Q(x, t)$, описываемое рядом (1.7).

Подобно [11], здесь и всюду далее в условиях выполнения усиленных условий Коши–Липшица [14] будем учитывать N_1 слагаемых в суммах (1.7), (1.8). Здесь $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления, ограничиваясь в случае $N_1 = N$ с любой требуемой точностью решением “укороченной” системы N первых уравнений (1.6) при достаточно большой величине N и полагая при этом $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0$, $n > N$ [14].

Переход к описанию СРП в (1.6), (1.7) в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций к представлению критерия оптимальности (1.5) в следующем виде:

$$I_1(\bar{u}) = \int_0^{t_1} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_n^2(\mu_n, t) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \tag{1.9}$$

$$\bar{u} = (\bar{u}_n), \quad n = \overline{1, N_1},$$

а требования (1.4) к конечному состоянию объекта представляются условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1) \varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon. \tag{1.10}$$

Рассматриваемая задача оптимизации сводится к определению программного оптимального управления $u^*(x, t)$ и алгоритма обратной связи $u^*(\bar{Q}, x, t)$, $\bar{Q} = (\bar{Q}_n)$, $n = \overline{1, N_1}$, обеспечивающих при $N_1 = \infty$ перевод объекта (1.6)–(1.8) за заданное время t_1 в требуемое конечное состояние, удовлетворяющее (1.10) при минимально возможном значении критерия оптимальности (1.9).

При использовании усеченной модели объекта с $N_1 = N < \infty$ все полученные далее результаты следует считать субоптимальными.

2. Программное оптимальное пространственно-временное управление. Структура модального управляющего воздействия. На сформулированную бесконечномерную задачу оптимального управления распространяется принцип максимума Понтрягина [5, 15]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}^*(t), \bar{u}^*(t), \psi^*(t)) = \max_{\bar{u}} H(\bar{Q}^*(t), \bar{u}, \psi^*(t)), \quad t \in [0, t_1] \tag{2.1}$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}^*(t)$, $\bar{u}^*(t)$, $\psi^*(t)$ максимума функции Понтрягина H по векторному аргументу $\bar{u}(t) = (\bar{u}_n(\mu_n, t))$ для рассматриваемой задачи оптимизации (1.6)–(1.10):

$$H(\bar{Q}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) = -\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) - \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{u}_n(\mu_n, t)), \tag{2.2}$$

где $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, N_1}$, и вектор сопряженных переменных $\psi(t) = (\psi_n(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_p} = 2\rho_Q \bar{Q}_p(\mu_p, t) + \mu_p^2 \psi_p(t), \quad p = \overline{1, N_1}, \quad (2.3)$$

определяет в открытой области изменения управляющих воздействий каждое из автономных программных управлений $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ в форме явной функции от соответствующей сопряженной переменной $\psi_n^*(t)$ независимо от других составляющих $\bar{u}^*(t)$:

$$\bar{u}_n^*(\mu_n, t) = \frac{1}{2} \psi_n^*(t), \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (2.4)$$

Краявая задача принципа максимума для модальных управляющих воздействий. Каждое из уравнений (1.6) после подстановки модального управления в виде (2.4) образует совместно с соответствующим уравнением (2.3) линейную программно-управляемую систему второго порядка относительно двух переменных \bar{Q}_n, ψ_n для каждого $n = \overline{1, N_1}$:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n, \quad \frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \psi_n. \quad (2.5)$$

Система (2.5) в отличие от подобной системы порядка $2N_1$ для всей совокупности составляющих $\bar{Q}(t), \psi(t)$ в задаче с сосредоточенным внутренним управлением [11] замыкается требованиями к ее конечному состоянию, которые считаются определенными, исходя из общего для всех $n = \overline{1, N_1}$ условия (1.10).

Решение этой системы может быть представлено, подобно [11], в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(\mu_n, t) \end{bmatrix} = e^{A_n t} \begin{bmatrix} \psi_n(0) \\ \bar{Q}_n(\mu_n, 0) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где $A_n - 2 \times 2$ -матрица коэффициентов системы (2.5), $e^{A_n t} - 2 \times 2$ -матрица (матричная экспонента)

$$e^{A_n t} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t) & A_{n12}(t) \\ A_{n21}(t) & A_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где $A_{nks}, k, s = 1, 2$, – заданные в соответствии со структурой уравнений (2.5) элементы $e^{A_n t}$.

Параметризация пространственно-временных управлений. Согласно (2.6), $\psi_n^*(t)$, а следовательно, и программное управление $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ в (2.4) определяются с точностью до начальных значений $\psi_n^*(0)$, совокупность которых для всех $n = \overline{1, N_1}$ выступает, таким образом, в качестве естественного параметрического представления $u^*(x, t)$, согласно (1.8), (2.4), (2.6). Однако подобный подход для СРП оказывается неконструктивным, прежде всего в силу бесконечной размерности вектора $\psi^*(0)$ при $N_1 = \infty$.

В работе [16] применительно к требованиям (1.10), предъявляемым к $\bar{Q}^*(t_1)$, предложен конструктивный способ последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий (“ ψ -параметризация”) на множестве M -мерных векторов $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i), i = \overline{1, M}; \tilde{\psi}_i = \psi_i(t_1)$, $M < N_1$, конечных значений первых M сопряженных функций в (2.3) при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t_1)$:

$$\psi(t_1) = (\psi_i(t_1)); \quad \psi_i(t_1) = \tilde{\psi}_i, \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t_1) = 0, \quad i > M. \quad (2.8)$$

С возрастанием M обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (2.8) управляющих воздействий в сужающееся к заданному состоянию $Q^{**}(x)$ в пространстве (\bar{Q}_n) целевое множество, гарантируя выполнение условий (1.10) для допустимых значений ε при некотором конечном значении $M \geq 1$ [16].

В целях определения в явной форме ψ -параметризованного модального управления получим по указанной в [11] схеме путем переноса (прогонки) начальных условий в (2.6) в конечный момент времени t_1 следующее выражение в отдельности для каждой из сопряженных функций $\psi_n^*(t)$, $n = \overline{1, N_1}$, в оптимальном процессе в зависимости от их конечных значений $\psi_n^*(t_1)$ и начального состояния объекта $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$:

$$\psi_n^*(t) = K_n(t, t_1)\psi_n^*(t_1) + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} K_n(t, t_1) &= \hat{A}_{n11}(t_1 - t) + \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_n(t_1), \\ K_{1n}(t, t_1) &= \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_{1n}(t_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь \hat{A}_{nks} , $k, s = 1, 2$ – подобные (2.7) элементы обратной матрицы $e^{-A_n t}$ и

$$B_n(t_1) = A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1); \quad B_{1n}(t_1) = A_{n22}(t_1) - A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1)A_{n12}(t_1). \quad (2.11)$$

При определении $\psi^*(t_1)$ в форме (2.8) будем иметь, согласно (2.9),

$$\psi_n^*(t) = \begin{cases} K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), & n \leq M, \\ K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), & n > M, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $\tilde{\psi}_n^*$ – значения $\tilde{\psi}_n$ в (2.8), соответствующие оптимальному процессу.

Подстановка (2.12) в (2.4) определяет ψ -параметризованные модальные управления в форме линейной зависимости от $\tilde{\psi}_n^*$:

$$\bar{u}_n^*(\mu_n, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0)], & n \leq M, \\ \frac{1}{2}K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), & n > M. \end{cases} \quad (2.13)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ при $n > M$ определяются только начальным значением $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$.

Последующая подстановка (2.13) в (1.8), где следует учесть $N_1 \leq \infty$ слагаемых бесконечной суммы, приводит к ψ -параметризованной форме оптимального пространственно-временного управления:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* \varphi_n(\mu_n, x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0)\varphi_n(\mu_n, x). \quad (2.14)$$

Таким образом, искомое программное управление находится, согласно (2.13), (2.14), с точностью до выбора оптимального вектора параметров $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, в (2.8). К его определению и сводится последующая задача, которая может быть решена специальным методом параметрической оптимизации [5, 9, 16].

Переход к задаче полубесконечной оптимизации и метод ее решения. Интегрирование системы уравнений (2.5) с ψ -параметризованным модальным управлением вида (2.8), (2.13) позволяет получить зависимости $Q(x, \psi^{(M)})$ управляемой величины в конце процесса управления и критерия оптимальности $I_1(\psi^{(M)})$ в (1.7), (1.9) для каждого значения $\bar{Q}(0)$ в форме явных функций только своих аргументов. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [5, 9, 16]:

$$I_1(\psi^{(M)}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}}, \quad (2.15)$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)}) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon \quad (2.16)$$

на минимум функции $I_1(\psi^{(M)})$ конечного числа M переменных $\tilde{\psi}_i, i = \overline{1, M}$, в (2.8) с бесконечным числом ограничений для всех $x \in [x_0, x_1]$, заменяемых одним эквивалентным ограничением (2.16) на максимум ошибки равномерного приближения $Q(x, \psi^{(M)})$ к $Q^{**}(x)$ в пределах всего отрезка $[x_0, x_1]$.

Для заданной величины ε в (2.16) размерность M вектора $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i), i = \overline{1, M}$, однозначно определяется соотношением [16]

$$M = \omega \forall \varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(\omega)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\omega-1)}, \quad (2.17)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\psi^{(\omega)}} \{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(\omega)}) - Q^{**}(x)| \} \quad (2.18)$$

и значения минимакса $\varepsilon_{\min}^{(\omega)}$ образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием ω [5, 9, 16].

Задача (2.15), (2.16) оказывается разрешимой, если $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$. Здесь точная нижняя грань ε_{\inf} достижимых значений ε оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых объектов относительно заданного конечного состояния $Q^{**}(x)$ [9].

Решение ЗПО (2.15), (2.16) относительно вектора параметров $\psi^{(M)}$, а также априори неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в случае, когда в (2.16) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$, может быть получено альтернансным методом [5, 9, 16] в условиях малостеснительных допущений, которые всюду далее считаются выполненными.

Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого вектора $\psi_*^{(M)}$, являющихся аналогом условий экстремума в теории чебышевских приближений, и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения оптимального результирующего состояния $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$ управляемой величины, диктуемой закономерностями предметной области рассматриваемой задачи.

Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине ε одинаковые значения максимальных отклонений $\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)|$ достигаются в некоторых точках $x_j^0, j = \overline{1, R}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Общее число R этих точек, удовлетворяющее базовым соотношениям

$$R = \begin{cases} M, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}; \\ M + 1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}, \end{cases} \quad (2.19)$$

оказывается равным числу всех искомым неизвестных в ЗПО (2.15), (2.16), порождая тем самым замкнутую относительно этих неизвестных систему соотношений

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_j^0)| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \quad (2.20)$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \psi_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, позволяющей идентифицировать координаты x_j^0 и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$, равенства (2.20), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$ в точках $x_{j_g}^0 \in \text{int}[x_0, x_1], g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leq R$ и $x_{j_g}^0 \in \{x_j^0\}$, переводятся в систему уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_j^0) &= \pm \varepsilon, & j &= \overline{1, R}, \\ \frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{j_g}^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_{j_g}^0)] &= 0, & g &= \overline{1, R_1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

с однозначно определяемым знаком ϵ в каждой точке x_j^0 , которая разрешается в условиях (2.19) относительно $\tilde{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, M}$, значений $x_{j_g}^0$, $g = \overline{1, R_1}$, а также $\epsilon_{\min}^{(M)}$, если в (2.17), (2.19) $\epsilon = \epsilon_{\min}^{(M)}$.

Явное выражение для зависимости $Q(x_j^0, \Psi_*^{(M)})$ от своих аргументов в системе уравнений (2.21) представляется в форме бесконечной или укороченной суммы вида (1.10) разложения в ряд (1.7):

$$Q(x_j^0, \Psi_*^{(M)}) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, \Psi_*^{(M)}) \varphi_n(\mu_n, x_j^0), \tag{2.22}$$

где значения модальных переменных $\bar{Q}_n(\mu_n, \Psi_*^{(M)})$ в конце оптимального процесса находятся, согласно (2.6), в подобном (2.9) виде [11]:

$$\bar{Q}_n(\mu_n, \Psi_*^{(M)}) = B_n(t_1) \psi_n^*(t_1) + B_{1n}(t_1) \bar{Q}_n(\mu_n, 0). \tag{2.23}$$

В итоге решение системы уравнений (2.21) с подстановкой (2.22), (2.23) полностью определяет искомый алгоритм программного пространственно-распределенного управления в форме (2.14).

3. Программное управление с ограничениями на характер его пространственно-временного распределения. Техническая реализация алгоритма управления (2.14), не стесняемого дополнительными условиями, накладываемыми на форму его пространственно-временного распределения, может оказаться затруднительной, прежде всего, в виду сложной зависимости $u^*(x, t)$ от пространственной координаты. В такой ситуации часто используются отвечающие подобным условиям различные частные варианты представления ПВУВ, заведомо обеспечивающие их осуществимость стандартными техническими средствами [5, 12, 17].

3.1. Редукция к задаче многоканального сосредоточенного управления и я. Во многих типичных случаях $u(x, t)$ в (1.1) ищется в форме взвешенной суммы заранее фиксируемых проектными решениями объекта и заведомо технически реализуемых (чаще всего кусочно-постоянных) зависимостей $F_m(x)$, $m = \overline{1, s}$; $s \geq 1$, от пространственной координаты с весовыми коэффициентами, в роли которых выступают искомые сосредоточенные управляющие воздействия $v_m(t)$ [5, 12, 17]:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^s F_m(x) v_m(t), \quad s \geq 1. \tag{3.1}$$

Исследуемая задача оптимизации (1.1)–(1.5) с подстановкой (3.1) в (1.1) при $s = 1$ сводится к рассмотренной в [11] и является ее обобщением на случай многоканального управления при $s > 1$ в (3.1). Конечное интегральное преобразование равенства (3.1) приводит к следующему выражению для модальных управляющих воздействий $\bar{u}_n(\mu_n, t)$ в (1.6) [5, 13, 17]:

$$\bar{u}_n(\mu_n, t) = \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn}(\mu_n) v_m(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \tag{3.2}$$

где \bar{F}_{mn} – n -я мода разложения $F_m(x)$ в ряд вида (1.7) по собственным функциям начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

При этом критерий оптимальности принимает вместо (1.9) следующий вид с учетом суммирования в подинтегральной функции квадратичного функционала качества эффекта многоканального управления:

$$I_1(v) = \int_0^{t_1} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{m=1}^s v_m^2(t) \right] dt \rightarrow \min_v, \tag{3.3}$$

$$v = (v_m), \quad m = \overline{1, s}; \quad s > 1.$$

Рассматриваемая задача оптимального программного управления сводится к определению s сосредоточенных управлений $v^*(t) = (v_m^*(t))$, $m = \overline{1, s}$, переводящих объект управления (1.6)–(1.8), (3.2) в конечное состояние (1.10) при минимально возможном значении критерия оптимальности (3.3).

Структура оптимальных управлений $v_m^*(t)$ устанавливается с использованием аппарата принципа максимума Понтрягина по аналогичной разд. 2 схеме на основании базового условия вида (2.1), где теперь функция Понтрягина представляется вместо (2.2) в следующем виде:

$$H(\bar{Q}(t), v(t), \psi(t)) = -\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) - \sum_{m=1}^s v_m^2 + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) \left(-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn}(\mu_n) v_m(t) \right). \quad (3.4)$$

Отсюда, получаем оптимальные программные управления

$$v_m^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \bar{F}_{mn} \psi_n^*(t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m \psi^*(t); \quad \bar{F}_m = (F_{mn}), \quad m = \overline{1, s}, \quad (3.5)$$

теперь уже в форме взвешенной суммы всех N_1 сопряженных переменных в отличие от (2.4), где автономные модальные управляющие воздействия зависят только от одной сопряженной функции. Здесь \bar{F}_m – матрица-строка, $\psi^*(t)$ – матрица-столбец.

Уравнения (1.6) с подстановкой управляющих воздействий в форме (3.2), (3.5) образуют совместно с уравнениями для сопряженных переменных (2.3) краевую задачу принципа максимума относительно $2N_1$ переменных $\bar{Q}_n, \psi_n; n = \overline{1, N_1}$ в отличие от (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn}(\mu_n) \sum_{p=1}^{N_1} \bar{F}_{mp}(\mu_p) \psi_p(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

решение которой определяется в виде, подобном (2.6):

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \bar{Q}(0) \end{bmatrix}; \quad \psi(t) = (\psi_n(t)); \quad \bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t)); \quad n = \overline{1, N_1} \quad (3.7)$$

с блочным представлением матричной экспоненты

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Здесь $A_{ij}, i, j = 1, 2$, – известные матрицы размерности $N_1 \times N_1$ в соответствии со структурой системы уравнений (3.6) [11].

Дальнейшее решение рассматриваемой задачи программного управления проводится по предложенной в [11] схеме, обобщающей результаты (2.8)–(2.23) на исследуемый случай многоканального управления.

На первом этапе осуществляется ψ -параметризация управлений (3.5) на конечномерном подмножестве значений $\psi_n(t_1), n = \overline{1, M}$, согласно соотношениям (2.8). Затем путем, указанным в [11], находится вместо (2.9), (2.10) линейная зависимость вектора $\psi^*(t)$ в оптимальном процессе от его параметризуемой, согласно (2.8), конечной величины $\psi^*(t_1)$ и начального состояния объекта $\bar{Q}(0)$:

$$\psi^*(t) = K(t, t_1) \psi^*(t_1) + K_1(t, t_1) \bar{Q}(0), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} K(t, t_1) &= \hat{A}_{11}(t_1 - t) + \hat{A}_{12}(t_1 - t) B(t_1); \quad K_1(t, t_1) = \hat{A}_{12}(t_1 - t) B_1(t_1), \\ B(t_1) &= A_{21}(t_1) A_{11}^{-1}(t_1); \quad B_1(t_1) = A_{22}(t_1) - A_{21}(t_1) A_{11}^{-1}(t_1) A_{12}(t_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

и $\hat{A}_{ij}, i, j = 1, 2$, – подобные (3.8) блоки обратной матрицы e^{-At} .

Искомое программное управление (3.5) находится в ψ -параметризуемой форме после подстановки в (3.5) выражения (3.9):

$$v_m^*(t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m [K(t, t_1) \psi^*(t_1) + K_1(t, t_1) \bar{Q}(0)], \quad m = \overline{1, s}. \quad (3.11)$$

Дальнейшая проблема сводится к определению оптимального вектора параметров $\psi_*^{(M)}$ в составе вектора $\psi^*(t_1)$ в (2.8) путем редукции к задаче полубесконечной оптимизации (2.15), (2.16). Альтернативные свойства (2.17)–(2.19) ее решений опять порождают замкнутую систему равенств (2.20), где в отличие от случая автономного модального управления по всем \bar{u}_n , $n = \overline{1, N_1}$, зависимость $Q(x, \psi_*^{(M)})$ в виде явной функции своих аргументов определяется для вектора $\bar{Q}(t_1) = \bar{Q}(\psi_*^{(M)})$ в (1.7) интегрированием системы уравнений (3.6) с подстановкой $\psi^*(t)$ в параметризованной форме (3.9). При этом покоординатное представление $\bar{Q}_n(\mu_n, \psi_*^{(M)})$ в (2.23) заменяется векторным равенством [11]

$$\bar{Q}^*(t_1) = B(t_1) \psi^*(t_1) + B_1(t_1) \bar{Q}(0) \quad (3.12)$$

и, согласно (1.7),

$$Q(x, \psi_*^{(M)}) = \Phi \bar{Q}^*(t_1); \quad \Phi = [\varphi_n(\mu_n, x)], \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (3.13)$$

Система равенств (2.20) опять сводится к однозначно формулируемой системе уравнений вида (2.21), решение которой относительно всех искомого неизвестных известными численными методами исчерпывает решение исходной задачи программного управления (1.6)–(1.8), (1.10), (3.2), (3.3).

Если можно ограничиться учетом только $N_1 = N \bmod \bar{Q}_n$ при $n = \overline{1, N}$ в (1.6) и если возможен выбор $s = N$ в (3.1), то равенства (3.2) при $n = \overline{1, N}$, $N = s$ образуют линейную систему уравнений относительно $v_m^*(t)$, $m = \overline{1, s}$, для заданных значений $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ в (2.13), решение которой определяется формулами Крамера непосредственно по решению задачи с автономными модальными управлениями:

$$v_m^*(t) = \sum_{m=1}^s \frac{D_{mn}}{D} \bar{u}_n^*(\mu_n, t), \quad m = \overline{1, s}. \quad (3.14)$$

Здесь $D = \det[\bar{F}_{mn}]$, $m, n = \overline{1, s}$; D_{mn} – алгебраическое дополнение n -го элемента m -го столбца D , и $D \neq 0$ при линейно независимых функциях $F_m(x)$.

3.2. Оптимизация проектных решений. В частном варианте

$$u(x, t) = F(t) v(x) \quad (3.15)$$

с заданной функцией $F(t)$ и неизменяемым во времени пространственным управляющим воздействием $v(x)$, в роли которого рассматриваются искомые проектные решения объекта, следует принять в (1.6):

$$\bar{u}_n(\mu_n, t) = F(t) \bar{v}_n. \quad (3.16)$$

Здесь \bar{v}_n – постоянные во времени моды управления $v(x)$, восстанавливаемого по значениям \bar{v}_n подобно (1.8):

$$v(x) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{v}_n \varphi_n(\mu_n, x). \quad (3.17)$$

Величины \bar{v}_n следует рассматривать далее в качестве автономных модальных управлений вместо \bar{u}_n в (1.6). Критерий оптимизации принимает в данном случае вместо (3.3) следующий вид:

$$I_1(\bar{v}) = \int_0^{t_1} \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) dt + \sum_{n=1}^{N_1} \bar{v}_n^2 \rightarrow \min_{\bar{v}}; \quad \bar{v} = (\bar{v}_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (3.18)$$

и требуется найти оптимальную величину \bar{v}^* и соответствующее ему, согласно (3.17), оптимальное проектное решение $v^*(x)$, обеспечивающие перевод объекта управления (1.6), (1.7), (3.16) в требуемое конечное состояние (1.10) при минимальной величине критерия оптимальности (3.18). Здесь вектор \bar{v} уже представляет собой неизменное во времени параметрическое представление искомого пространственного управления $v(x)$.

Действительно, для одинаковых конечных значений $\bar{u}_n(\mu_n, t_1)$ в (2.4) и (3.16) получаем равенство

$$\bar{v}_n = \frac{\Psi_n(t_1)}{2F(t_1)}, \quad F(t_1) \neq 0, \quad n = \overline{1, N_1},$$

позволяющее рассматривать \bar{v} в роли вектора $\Psi(t_1)$ финишных значений сопряженных переменных.

Последующее представление \bar{v} по правилу (2.8) приводит к описанию $v(x)$ в виде укороченной суммы M первых слагаемых в (3.17):

$$v(x) = \sum_{n=1}^M \tilde{v}_n \varphi_n(\mu_n, x), \quad (3.19)$$

являющейся параметризуемым на конечномерном подмножестве векторов $\bar{v}^{(M)} = (\bar{v}_n)$, $n = \overline{1, M}$, распределенным управлением, где аналогично (2.8)

$$\bar{v}_n = \tilde{v}_n, \quad n = \overline{1, M}; \quad \bar{v}_n = 0, \quad n > M. \quad (3.20)$$

В таком случае рассматриваемая задача оптимального управления непосредственно редуцируется к задаче полубесконечной оптимизации вида (2.15), (2.16):

$$\begin{aligned} I_1(\bar{v}^{(M)}) &\rightarrow \min_{\bar{v}^{(M)}}, \\ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \bar{v}^{(M)}) - Q^{**}(x)| &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.21)$$

относительно искомой величины $\bar{v}_*^{(M)}$. Здесь размерность M вектора $\bar{v}^{(M)}$ определяется по правилу (2.17), где подобно (2.18) следует принять

$$\varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\bar{v}^{(\omega)}} \left\{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \bar{v}^{(\omega)}) - Q^{**}(x)| \right\}. \quad (3.22)$$

Явная форма зависимости $Q(x, \bar{v}^{(M)})$ от своих аргументов в (3.21) определяется в форме ряда (1.7) при значениях $\bar{Q}_n(\mu_n, t_1)$, которые находятся интегрированием уравнений объекта (1.6) в условиях (3.16), (3.20):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1) &= \bar{Q}^{(0)}(\mu_n) e^{-\mu_n^2 t_1} + d_n(t_1) \bar{v}_n, \quad \bar{v}_n = \tilde{v}_n, \quad n = \overline{1, M}; \quad \bar{v}_n = 0, \quad n = \overline{M+1, N_1}, \\ d_n(t_1) &= \int_0^{t_1} F(t) e^{-\mu_n^2(t-t_1)} dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Решение ЗПО (3.21) по схеме альтернативного метода с последующей подстановкой результатов в (3.19) определяет искомую зависимость $v^*(x)$. Если, подобно (2.14), техническая реализация проектного решения в форме (3.17), (3.19) оказывается затруднительной, то подобно (3.1) поиск $v(x)$ производится в классе заведомо реализуемых функций $F_m(x)$, суммируемых с весовыми коэффициентами h_m :

$$v(x) = \sum_{m=1}^s h_m F_m(x). \quad (3.24)$$

Тогда в (3.16) следует принять аналогично (3.2)

$$\bar{v}_n = \sum_{m=1}^s h_m \bar{F}_{mn}, \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (3.25)$$

Критерий оптимальности представляется в отличной от (3.18) форме

$$I_1(h) = \int_0^{t_1} \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) dt + \sum_{n=1}^{N_1} \left(\sum_{m=1}^s h_m \bar{F}_{mn} \right)^2 \rightarrow \min_h, \quad h = (h_m), \quad m = \overline{1, s}, \quad (3.26)$$

и опять осуществляется прямая редукция задачи оптимизации проектных решений к ЗПО вида (2.15), (2.16) теперь уже при заведомо фиксируемой размерности s вектора h в (3.24):

$$I_1(h) \rightarrow \min_h, \quad h = (h_m), \quad m = \overline{1, s}, \quad (3.27)$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, h) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon,$$

где $Q(x, h)$ вычисляется в форме (1.7), (3.23) с подстановкой (3.25) для всех значений $\bar{v}_n, n = \overline{1, N_1}$. Решение задачи (3.27) относительно оптимальной величины h^* альтернансным методом определяет искомое распределенное управление в форме (3.24).

Если требуется выбрать значения h_m в (3.24) из условий достижения величины $\bar{v}_*^{(M)}$ в задаче (3.21), то такой выбор реализуется только в условиях $N_1 = M \leq s$ путем определения искомым коэффициентов h_m^* в подобной (3.14) форме решения относительно h_m^* линейной системы уравнений, образуемой равенствами (3.25) при $N_1 = M = s$ для заданных величин $\bar{v}_n^*, n = \overline{1, s}$. Следовательно, достижимые значения ε в (3.27) ограничиваются в таком случае реализуемым числом s в (3.24).

4. Синтез оптимального управления. Рассмотрим далее задачу синтеза пространственно-временного оптимального управления $u^*(\bar{Q}, x, t)$ с обратными связями по состоянию объекта при известных алгоритмах программных управляющих воздействий.

4.1. Синтез оптимального регулятора с модальными управляющими воздействиями. Перенос граничных условий при $t = t_1$ в произвольный момент времени $t \in [0, t_1]$ определяет, подобно [11], в краевой задаче (2.5) следующие зависимости конечных значений сопряженных переменных $\psi_n^*(t_1)$ и временных мод $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)$ от их текущих значений в оптимальном процессе ($\bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \psi_n^*(t)$) для всех $n = \overline{1, N_1}$:

$$\psi_n^*(t_1) = A_{n11}(t_1 - t) \psi_n^*(t) + A_{n12}(t_1 - t) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad (4.1)$$

$$\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) = A_{n21}(t_1 - t) \psi_n^*(t) + A_{n22}(t_1 - t) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad (4.2)$$

где $A_{nks}, k, s = 1, 2$ – элементы 2×2 -матрицы (2.7).

После умножения равенств (4.1), (4.2) соответственно на известные, согласно результатам расчета программного управления значения $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) = \bar{Q}_n^*(\mu_n, \psi_*^{(M)})$ и $\psi_n^*(t_1)$ в (2.8), (2.23), левые части соотношений (4.1), (4.2) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\psi_n^*(t, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, 0), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t)) = T_{n1}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)) \times$$

$$\times T_{n2}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad n = \overline{1, N_1}; \quad (4.3)$$

$$T_{n1} = [\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) A_{n11}(t_1 - t) - \psi_n^*(t_1) A_{n21}(t_1 - t)]^{-1}; \quad (4.4)$$

$$T_{n2} = \psi_n^*(t_1) A_{n22}(t_1 - t) - \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) A_{n12}(t_1 - t), \quad (4.5)$$

однозначным образом определяющему зависимость $\psi_n^*(t, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, 0), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t))$ от своих аргументов. Здесь зависимость ψ_n^* от $\bar{Q}_n^*(\mu_n, 0)$ в (4.3) характеризуется представлением $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)$ в (4.4), (4.5) в виде (2.23).

Подстановка (4.3) в выражение (2.4) для автономного программного управления приводит к линейному закону синтеза оптимального пространственно-временного управляющего воздей-

ствия в форме (1.8) с нестационарными коэффициентами обратных связей по измеряемому состоянию $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, N_1}$:

$$u^*(\bar{Q}(t), x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1} T_{n2} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x). \quad (4.6)$$

Значения T_{n1} и T_{n2} представляются, согласно (4.4), (4.5), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления величинами $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$ в (2.23), которые находятся по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в момент $t = 0$.

Переход в (4.6) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = (Q(x_{uj}, t))$ в r точках $x_{uj} \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, r}$, определяется, согласно (1.7), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t); \quad \Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (4.7)$$

В условиях $r < N_1$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q_u(x_u, t)$ требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [17].

Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.6) можно ограничиться учетом только M первых составляющих $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, M}$, с минимальным их числом $M < N_1$, необходимым для решения системы уравнений (2.21) относительно вектора $\psi_*^{(M)}$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением уравнения (4.7) относительно $\bar{Q}(t)$ при $r = M$, $N_1 = N = M$:

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \quad (4.8)$$

Подстановка (4.8) в (4.6) приводит к линейному алгоритму синтеза по измеряемому выходу объекта:

$$u^*(Q_u, x, t) = \frac{1}{2} \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) \varphi(x, t), \quad (4.9)$$

$$\varphi(x, t) = (T_{n1} T_{n2} \varphi_n(\mu_n, x)), \quad n = \overline{1, M},$$

где $\Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t)$ – матрица-строка; $\varphi(x, t)$ – матрица-столбец.

4.2. Синтез оптимального регулятора с многоканальным сосредоточенным управлением. При затруднениях в решении задачи синтеза алгоритмов оптимального управления (4.6), (4.9), связанных со сложным характером зависимости u^* от x и использованием в связи с этим заведомо реализуемых управляющих воздействий вида (3.1), возникает задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов для многоканальных сосредоточенных управлений $v_m(t)$ при $s > 1$.

Обобщение зависимостей (4.1)–(4.5) на этот случай приводит к соответствующим векторно-матричным равенствам, базирующимся на описании оптимального процесса решениями (3.7), (3.8) краевой задачи (3.6) [11]:

$$\psi^*(t_1) = A_{11}(t_1 - t) \psi^*(t) + A_{12}(t_1 - t) \bar{Q}^*(t), \quad (4.10)$$

$$\bar{Q}^*(t_1) = A_{21}(t_1 - t) \psi^*(t) + A_{22}(t_1 - t) \bar{Q}^*(t). \quad (4.11)$$

Умножение слева равенств (4.10) и (4.11) соответственно на известные по решениям задачи многоканального программного управления $N_1 \times N_1$ -матрицы $\text{diag}[\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1)]$, $\bar{Q}^*(t_1) = (\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1))$, $j = \overline{1, N_1}$, и $\text{diag}[\psi_j^*(t_1)]$, $\psi^*(t_1) = (\psi_j^*(t_1))$, $j = \overline{1, N_1}$, и последующее вычитание результатов приводит вместо (4.3) к базовому векторному соотношению

$$\psi^*(t, \psi^*(t_1), \bar{Q}(0), \bar{Q}^*(t)) = T_1(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1)) T_2(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1)) \bar{Q}^*(t), \quad (4.12)$$

где

$$T_1 = [W_1 A_{11}(t_1 - t) - W_2 A_{21}(t_1 - t)]^{-1}, \quad (4.13)$$

$$T_2 = [W_2 A_{22}(t_1 - t) - W_1 A_{12}(t_1 - t)], \tag{4.14}$$

$$W_1 = \text{diag}[\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1)], \quad W_2 = \text{diag}[\psi_j^*(t_1)], \quad j = \overline{1, N_1}, \tag{4.15}$$

и

$$\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1) = (B(t_1)\psi^*(t_1) + B_1(t_1)\bar{Q}(0))_j, \quad j = \overline{1, N_1}, \tag{4.16}$$

согласно (3.12).

Подстановка (4.12) в (3.5) определяет линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм синтеза для сосредоточенных управлений с обратными связями по $\bar{Q}(t)$

$$v_m^*(\bar{Q}(t), t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m \psi^*(t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t), \quad m = \overline{1, s}, \tag{4.17}$$

и уравнение оптимального регулятора для пространственно-временного управляющего воздействия в (3.1):

$$u^*(\bar{Q}, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{F}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t) F_m(x). \tag{4.18}$$

В условиях $N_1 = N = M = r$ в (4.7) вектор $\bar{Q}^*(t)$ в (4.18) находится непосредственно по измеряемому выходу объекта, согласно (4.8). После подстановки (4.8) в (4.18) получаем оптимальное управление с линейной обратной связью по управляемой величине:

$$u^*(Q_u, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{F}_m T_1 T_2 \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) F_m(x). \tag{4.19}$$

Здесь в (4.19) аналогично (4.6) матрицы T_1, T_2 вычисляются с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями $\bar{Q}(0)$ в (4.16), которые задаются по измерениям начального состояния объекта при $t = 0$.

5. Пространственно-временное управление нестационарным процессом теплопроводности. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для пространственно-временного управления процессом нагрева неограниченной пластины.

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ пластины в процессе ее нагрева описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [10, 13]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, t^*], \tag{5.1}$$

с заданными начальными

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \tag{5.2}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial t} + \alpha Q(1, t) = 0, \tag{5.3}$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе пластины $x = 1$ по закону конвективной теплопередачи с заданным значением α критерия Био. Здесь $u(x, t)$ – нестесняемое дополнительными ограничениями кусочно-непрерывное пространственно-временное управляющее воздействие по мощности внутреннего тепловыделения.

В пространстве модальных переменных $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$, $n = 1, 2, \dots$, объект управления (5.1)–(5.3) описывается бесконечной системой уравнений (1.6) с автономными управлениями $\bar{u}_n(\mu_n, t)$. Температурное поле $Q(x, t)$ представляется его разложением в ряд вида (1.7) по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x) = \cos(\mu_n x)$ [10, 13]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n} \bar{Q}_n(\mu_n, t), \tag{5.4}$$

где $\mu_n, n = 1, 2, \dots$, – бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0. \quad (5.5)$$

Задача заключается в определении алгоритма обратной связи $u^*(Q, x, t)$, обеспечивающего перевод объекта (1.6), (5.4) за заданное время t_1 в требуемое конечное состояние $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0$ с заданной точностью равномерного приближения ε , согласно (1.10), при минимальном значении квадратичного критерия качества (1.9), где примем $\rho_Q = 1$.

Аналитический синтез оптимального регулятора сводится на первом этапе к вычислению программного управления $u^*(x, t)$ описанным в разд. 2 способом с последующим определением $u^*(Q, x, t)$ при найденном управлении путем, указанным в разд. 4.1.

Определение программного управления. Решение краевой задачи (2.5) в форме (2.6) полностью определяется значениями элементов $A_{nks}, k, s = 1, 2, 2 \times 2$ -матрицы $e^{A_n t}$ в (2.7). Используя технологию вычисления матричной экспоненты, описанную в [11], получаем следующие выражения для A_{nks} в (2.7):

$$A_{nks}(t) = \sum_{i=1}^2 \gamma_k^{(i)} G_i^{(s)} e^{p_i t}; \quad k, s = 1, 2 \quad (5.6)$$

Здесь

$$\gamma_1^{(i)} = 1; \quad \gamma_2^{(i)} = \frac{1}{2(\mu_n^2 + p_i)}, \quad i = 1, 2; \quad (5.7)$$

$$G_i^{(s)} = \frac{G_{is}}{G}; \quad G = \det \begin{bmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} \end{bmatrix}; \quad (5.8)$$

G_{is} – алгебраическое дополнение s -го элемента i -го столбца G и

$$p_1 = \sqrt{\mu_n^4 + 1}; \quad p_2 = -\sqrt{\mu_n^4 + 1} \quad (5.9)$$

– корни характеристического уравнения системы (2.5).

Явная форма параметрического представления модальных управляющих воздействий $\bar{u}_n(\mu_n, t)$ и искомого программного управления $u^*(x, t)$ на подмножестве M -мерных векторов $\psi^{(M)}$ в (2.8) описывается выражениями (2.13) и (2.14) соответственно, где $K_n(t, t_1), K_{1n}(t, t_1)$ вычисляются по формулам (2.10) при значениях A_{nks} , определяемых, согласно (5.6)–(5.9).

Последующий переход к задаче полубесконечной оптимизации (2.15), (2.16) приводит в силу альтернативных свойств (2.19) к замкнутой системе равенств (2.20) относительно оптимальной величины $\psi_*^{(M)}$ вектора $\psi^{(M)}$, где $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$ описывается разложением в ряд (2.22), (2.23). Последний представляется в форме (5.4) с учетом соотношений (2.11) для коэффициентов $B_n(t_1), B_{1n}(t_1)$, которые вычисляются опять по значениям A_{nks} в (5.6)–(5.9).

Ограничимся далее типичным в приложениях случаем $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (2.16), (2.20), для которого, согласно (2.17), (2.19), следует принять $M = 2, R = 3$ в (2.14), (2.20)–(2.23).

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе управления нагревом пластины и альтернативные свойства $Q(x, \psi_*^{(2)})$, требующие выполнения строгих равенств в (2.20) в трех точках $x_j^0 \in [0, 1], j = 1, 2, 3$, при $R = 3$, определяют в таком случае при $Q_0 = \text{const}$ в (1.2), подобно [5, 9, 10, 12], форму кривой $Q(x, \psi_*^{(2)}) - Q^{**}$ результирующего распределения температуры по пространственной координате (см. далее рис. 1). Это позволяет перевести равенства (2.20) в систему уравнений (2.21) с заведомо идентифицируемыми точками $x_1^0 = 0; x_2^0 \in (0, 1); x_3^0 = 1$ и знаками $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**}$:

$$Q(0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = \varepsilon_{\min}^{(2)};$$

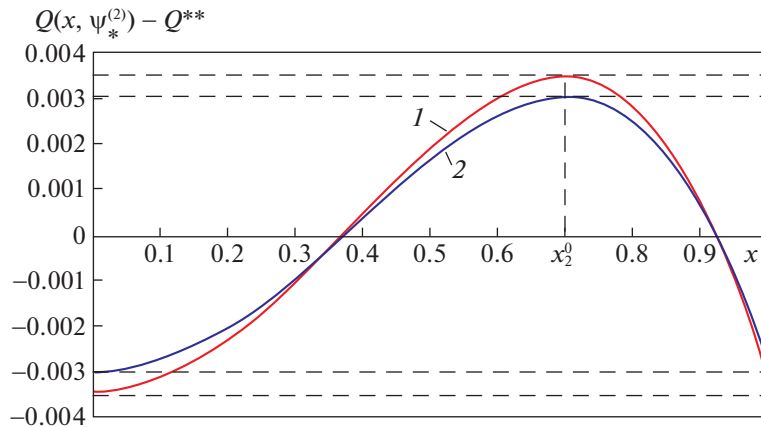


Рис. 1. Температурные распределения в конце оптимального процесса пространственно-временного управления

$$Q(1, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = -\epsilon_{\min}^{(2)}; \quad \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} = 0, \tag{5.10}$$

разрешаемую стандартными численными методами поиска корней нелинейных систем трансцендентных уравнений относительно неизвестных $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*), x_2^0$ и $\epsilon_{\min}^{(2)}$.

Последующая подстановка $\psi_*^{(M)} = \psi_*^{(2)}$ в (2.13), (2.14) окончательно определяет искомое программное управление в рассматриваемой задаче оптимизации.

Синтез оптимального регулятора. Искомый алгоритм $u^*(\bar{Q}(t), x, t)$ обратной связи определяется по найденному программному управлению уравнением регулятора (4.6) в условиях $M = 2$ в (2.8), (2.23). Если в первом приближении достаточно учесть только две моды $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$, $n = 1, 2$, в выражении (5.4) при $N_1 = N = M = 2$, то при наличии двух измерителей состояния $Q(x_u, t) = (Q(x_{uj}, t))$, $j = 1, 2$, где, в соответствии с (4.7)

$$Q(x_{uj}, t) = \bar{Q}_1(\mu_1, t) \varphi_1(\mu_1, x_{uj}) + \bar{Q}_2(\mu_2, t) \varphi_2(\mu_2, x_{uj}), \quad j = 1, 2, \tag{5.11}$$

и, согласно (5.4),

$$\varphi_n(\mu_n, x_{uj}) = q_n \cos(\mu_n x_{uj}), \quad n = 1, 2; \quad q_n = \frac{2\alpha}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n}, \tag{5.12}$$

значения \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 находятся по результатам измерения $Q(x_{uj}, t)$ решением системы уравнений (5.11) в форме (4.8). Здесь

$$\Phi_u^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mu_1, x_{u1}) & \varphi_2(\mu_2, x_{u1}) \\ \varphi_1(\mu_1, x_{u2}) & \varphi_2(\mu_2, x_{u2}) \end{bmatrix}^{-1}. \tag{5.13}$$

В итоге оптимальное управление $u^*(Q_u, x, t)$ с обратной связью по неполному измерению управляемой величины находится в форме (4.9) после подстановки (4.8), (5.13) в (4.6) при $N_1 = M = 2$. В частности, если $x_{u1} = 1, x_{u2} = 0$, то в (5.12), (5.13) будем иметь

$$\varphi_n(\mu_n, x_{u1}) = q_n \cos \mu_n; \quad \varphi_n(\mu_n, x_{u2}) = q_n, \quad n = 1, 2.$$

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при $Q^{**} = 0.5$; $\alpha = 0.5$; $t_1 = 0.2$. На рис. 1 показаны распределения температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса нагрева для двух различных значений Q_0 (кривая 1 – $Q_0 = 0.15$; $\tilde{\psi}_1^* = 4.58$; $\tilde{\psi}_2^* = -13.71$; $\epsilon_{\min}^{(2)} = 0.0035$; кривая 2 – $Q_0 = 0$; $\tilde{\psi}_1^* = 5.99$; $\tilde{\psi}_2^* = -13.15$; $\epsilon_{\min}^{(2)} = 0.003$) при выборе двух измерителей выхода объекта в точках $x_{u1} = 1, x_{u2} = 0$. Рисунок 2 иллюстрирует для случая

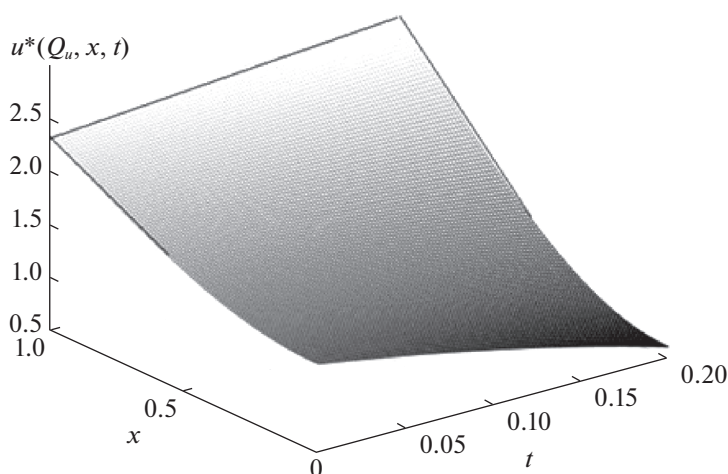


Рис. 2. Поведение управляющих воздействий на пространственно-временной плоскости в зависимости от изменяющихся во времени сигналов обратной связи

$Q_0 = 0$ поведение в процессе нагрева на пространственно-временной плоскости оптимальных управляющих воздействий, изменяющихся во времени по алгоритму (4.9) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи с нестационарными коэффициентами передачи.

Как следует из приведенных данных, алгоритм (4.9) оптимального управления обеспечивает при различных начальных условиях заданную точность равномерного приближения к требуемому конечному состоянию объекта.

Заключение. Предлагаемые методы решения линейно-квадратичных задач пространственно-временного управления системами с распределенными параметрами параболического типа разработаны применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Полученные уравнения регуляторов с автономными модальными управлениями, не стесняемыми дополнительными ограничениями и с учетом ограничений по условиям технической реализуемости пространственного распределения управляющих воздействий, сводятся к линейным алгоритмам обратной связи по наблюдаемым переменным с фиксируемыми предварительным расчетом нестационарными коэффициентами передачи и заданными зависимостями от пространственных аргументов.

Допустимые погрешности реализации предлагаемых алгоритмов обратной связи непосредственно по неполному измерению состояния объекта определяются требованиями к точности описания его модели укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

Развиваемый подход к описанию оптимальных программных управлений распространен на задачи неизменяемого во времени пространственного управления, рассматриваемого в качестве искомого проектного решения объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
3. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб.: Лань, 2017.
4. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
5. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
6. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.
7. *Чубаров Е.П.* Управление системами с подвижными источниками воздействия. М.: Энергоатомиздат, 1985.

8. *Кубышкин В.А., Финягина В.И.* Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. М.: СИНТЕГ, 2005.
9. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
10. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993.
11. *Рапопорт Э.Я.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 23–38.
12. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 42–57.
13. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
14. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
15. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Мат. сборник (новая серия). 1964. Т. 64 (106). № 1. С. 79–101.
16. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22–33.
17. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.