ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 4, с. 22–30

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 531.38

УПРАВЛЕНИЕ АМПЛИТУДОЙ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. Ф. Голубев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

e-mail: golubev@keldysh.ru

Поступила в редакцию 26.01.2022 г.
После доработки 31.01.2022 г.
Принята к публикации 28.03.2022 г.

Предложен оригинальный метод поиска оптимального управления амплитудой колебаний в окрестности положения равновесия склерономной многомерной механической системы. Одна степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На ее движение влияют другие, непосредственно управляемые степени свободы. В число непосредственно управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не содержит сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность анализируемой исходной системы дифференциальных уравнений. На примере конкретной маятниковой системы продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

DOI: 10.31857/S0002338822040084

Введение. Задачи управления амплитудой нелинейных колебаний представляют издавна значительный интерес для исследований как с теоретической, так и с практической точек зрения. К настоящему времени существует развитая теория резонансного возбуждения колебаний, которая широко используется в практических приложениях [1, 2]. Проблема построения оптимального управления как для линейных, так и для нелинейных колебательных систем имеет существенные отличия от резонансных постановок. Она часто ставится и исследуется в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [3, 4]. Среди колебательных систем особый интерес вызывают колебательные системы с дефицитом управления, когда система содержит степени свободы, для которых невозможно непосредственное управление, а их требуемое изменение достигается опосредованно за счет подходящего управления по другим степеням свободы [5, 6]. Примеры решения некоторых задач с дефицитом управления системами, находящимися в окрестности положения равновесия и содержащими одну неуправляемую степень свободы, можно найти в [7–10]. Как следует из указанных работ, системы могут быть весьма непростыми. На первоначальном этапе исследования таких систем представляется разумным выбрать координаты управляемых степеней свободы в качестве функций управления, считая, что возможна их идеальная реализация. Основная трудность применения принципа максимума Понтрягина в таком случае состоит в том, что координаты управляемых степеней свободы, как правило, входят в уравнения движения вместе со своими производными. Из-за этого размерность фазового пространства может быть уменьшена лишь на число управляемых координат системы, что может быть недостаточно для эффективного решения задачи по методу Понтрягина.

В предлагаемой статье для решения задач оптимального управления колебаниями позиционных систем с дефицитом управления по одной степени свободы развивается оригинальный метод оптимизации, формализм которого основан на подходе Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева [11] к решению проблем оптимального управления. Метод позволяет получить решение в виде синтеза управления колебаниями в классе кусочно-непрерывных управляющих координат в зависимости от неуправляемой координаты. Управление колебаниями понимается в смысле увеличения или уменьшения амплитуды колебаний, которая служит критерием оптимальности.

1. Постановка проблемы. Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_1,\ldots,q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n – число степеней свободы системы, q_i – обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ – обобщенные скорости, а симметричная матрица (a_{ij}) зависит от координат и положительно определена. Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

в которых t – время, Q_i – обобщенные силы. Пользуясь произволом в нумерации обобщенных координат, будем считать, что первая обобщенная координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщенные силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой x:

$$q_1 = x.$$

Обобщенную силу Q_1 будем считать позиционной в том смысле, что она может зависеть только от x и других обобщенных координат, а от обобщенных скоростей не зависит. Пусть первыми в наборе $(q_2,\ldots,q_n)$ идут $s-1$ координат, от которых обобщенная сила Q_1 зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат не входят явно в выражение для Q_1. Все координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1,s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1,n-s}$, причем $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_{s-1}) \in R^{s-1}$ – вектор координат, непосредственно влияющих на значение Q_1, $\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_{n-s}) \in R^{n-s}$ – вектор координат, от которых Q_1 явно не зависит, так что $\partial Q_1/\partial w_k = 0$, $k = \overline{1,n-s}$. В число w-координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{x}^2 + 2\dot{x}\left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k\right)\right] + T^*,$$

где $s-1$ – число u-координат и

$$T^*(x,\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1}\dot{u}_j\dot{u}_r + 2\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,k+s}\dot{u}_j\dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{k+s,r+s}\dot{w}_k\dot{w}_r\right).$$

В системе (1.1) выделим уравнение для координаты x:

$$\frac{d}{dt}\left(a_{11}\dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x,\mathbf{u}), \tag{1.2}$$

где $F(x,\mathbf{u}) = Q_1(x,u_1,\cdots,u_{s-1})$. Примем координату x в качестве независимой переменной на участке ее монотонного изменения: $\dot{x} \neq 0$ и обозначим буквой $\mathbf{y} = (\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{w},\mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$, вектор управляющих координат и их производных по координате x. Тогда уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$\dot{x}\frac{d}{dx}[f(x,\mathbf{y})\dot{x}] - p(x,\mathbf{y})\dot{x}^2 = F(x,\mathbf{u}), \tag{1.3}$$

где

$$f(x,\mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}w'_k,$$

$$p(x,\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\sum_{j=1}^{s-1}\frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x}u'_j + 2\sum_{k=1}^{n-s}\frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x}w'_k\right) + \frac{\partial T^*(x,\mathbf{y})}{\partial x}.$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\begin{vmatrix}u_j^m \le u_j(x) \le u_j^M\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}w_k^m \le w_k(x) \le w_k^M\end{vmatrix}, \quad j = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{1, n-s}. \tag{1.4}$$
$$\begin{vmatrix}\dot u_j^m \le \dot u_j(x) \le \dot u_j^M\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\dot w_k^m \le \dot w_k(x) \le \dot w_k^M\end{vmatrix},$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщенные силы $Q_2, \ldots, Q_n$ вычисляются в соответствии с уравнениями (1.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ реализовались. Предположим, что это сделано, так что ограничения (1.4) удовлетворяются, и можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^{x} \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(x, \mathbf{y})\dot x^2 - \dot x \frac{d}{dx}[f(x, \mathbf{y})\dot x] \right\} dx = 0, \tag{1.5}$$

где x_0 – начальное значение независимой переменной x, $\lambda(x, \mathbf{y})$ – любая функция. Уравнение (1.5) эквивалентно уравнению (1.3). Заметим, что если $f(x, \mathbf{y}) \ne 0$, то уравнение (1.3) допускает интегрирующий множитель. Выберем его в качестве λ:

$$\lambda = f(x, \mathbf{y}) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2p(x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right), \quad f(x, \mathbf{y}) \ne 0. \tag{1.6}$$

Тогда равенство (1.5) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^{x} \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2}[\dot x^2 f(x, \mathbf{y})\lambda(x, \mathbf{y})]\Big|_{x_0}^{x} = 0$$

или

$$\int_{x_0}^{x} \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2}\left[f^*(x, \dot x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})\lambda^*(x, \dot x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})\right]\Big|_{x_0}^{x}, \tag{1.7}$$

где

$$f^*(x, \dot x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11}\dot x + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot u_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot w_k,$$
$$\lambda^*(x, \dot x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = f^*(x, \dot x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2p(x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right). \tag{1.8}$$

В том случае, когда $\dot x = \dot x(x)$ обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.7) становится несобственным из-за того, что при $\dot x = 0$ значения $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}}/\dot x$ и $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}}/\dot x$ могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.7) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные f^* и λ^* не содержат отмеченной особенности.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x} F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \tag{1.9}$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot x_0 = \dot x(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ – следующее значение координаты x, когда $\dot x_1 = \dot x(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot x_0 = \dot x_1 = 0, \tag{1.10}$$

а также

$$
\begin{aligned}
f^*(x_0, \dot{x}_0, \mathbf{u}(x_0), \dot{\mathbf{u}}(x_0), \mathbf{w}(x_0), \dot{\mathbf{w}}(x_0)) &= \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j(x_0) + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k(x_0),\\
f^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}(x_1), \dot{\mathbf{u}}(x_1), \mathbf{w}(x_1), \dot{\mathbf{w}}(x_1)) &= \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j(x_1) + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k(x_1).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J.

Теперь рассмотрим обратное движение маятника. Для того, чтобы сохранить смысл введенного функционала, обозначим $\xi = -x$. Пусть $\mathbf{y}_\xi = (\mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}, \mathbf{w}'_\xi)$, где $\mathbf{u}'_\xi = d\mathbf{u}/d\xi$, $\mathbf{w}'_\xi = d\mathbf{w}/d\xi$, вектор управляющих координат и их производных по координате ξ в этом случае. Уравнение (1.2) принимает вид

$$
\frac{d}{dt}\left(a_{11}\dot{\xi} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j - \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -F(-\xi, \mathbf{u}). \tag{1.12}
$$

Уравнение (1.3) можно представить как

$$
\dot{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)\dot{\xi}\right] - p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)\dot{\xi}^2 = -F(-\xi, \mathbf{u}), \tag{1.13}
$$

где

$$
f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) = a_{11} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}u'_{j\xi} - \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}w'_{k\xi},
$$

$$
p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi} + 2\sum_{j=1}^{s-1}\frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial \xi}u'_{j\xi} + 2\sum_{k=1}^{n-s}\frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial \xi}w'_{k\xi}\right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y}_\xi)}{\partial \xi}.
$$

Следовательно, получаем

$$
\lambda_\xi = f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)\exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)}d\xi\right), \tag{1.14}
$$

и формулу (1.7) можно переписать следующим образом:

$$
\int_{\xi_0}^{\xi}\lambda_\xi F(-\xi, \mathbf{u})d\xi = -\frac{1}{2}\left[f_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})\lambda_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})\right]\Big|_{\xi_0}^{\xi}, \tag{1.15}
$$

где

$$
f_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11}\dot{\xi} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j - \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{1,s+k}\dot{w}_k,
$$

$$
\lambda_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = f_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})\exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)}d\xi\right).
$$

Амплитуда колебаний имеет вид $J = \xi_1 - \xi_0$, где $\xi_1 > \xi_0$, $\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}(\xi_0) = 0$, $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}(\xi_1) = 0$ и $\dot{\xi}(\xi) \neq 0$, если $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$. Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(\xi)$, $\mathbf{w}(\xi)$, при которых значение функционала J максимально (минимально).

2. Оптимальное раскачивание (успокоение) колебаний. Пусть λ определена формулой (1.6). Тогда справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 1 (принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.2) и существуют две точки x_0 и x_1, причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\mathbf{w}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении x_0 обеспечивают максимум величины x_1, служат уравнения

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_M(x) = \arg\max_{\mathbf{u}}[\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M)F(x, \mathbf{u})],\\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_1) = \arg\min_{\dot{\mathbf{w}}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M)\dot{w}_k\right],\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0, служат уравнения

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_m(x) = \arg\min_{\mathbf{u}}[\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m)F(x, \mathbf{u})],\\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_0) = \arg\max_{\dot{\mathbf{w}}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)\dot{w}_k\right],\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Т е о р е м а 2 (принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.2) и имеются две точки x_0 и x_1, такие, что $x_0 < x_1$ $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1, выражаются равенствами

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_m(x) = \arg\min_{\mathbf{u}}[\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m)F(x, \mathbf{u})],\\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_1) = \arg\max_{\dot{\mathbf{w}}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)\dot{w}_k\right],\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0, выражаются уравнениями

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_M(x) = \arg\max_{\mathbf{u}}[\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M)F(x, \mathbf{u})],\\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_0) = \arg\min_{\dot{\mathbf{w}}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M)\dot{w}_k\right],\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Доказательство приведенных теорем достигается применением формул (1.7) и (1.15), а также с учетом того, что в уравнении (1.2) коэффициент $a_{11} > 0$. Обозначим

$$\Upsilon = F(x, \mathbf{u}) + p(x, \mathbf{y})\dot{x}^2 - \dot{x}\frac{d}{dx}[f(x, \mathbf{y})\dot{x}].$$

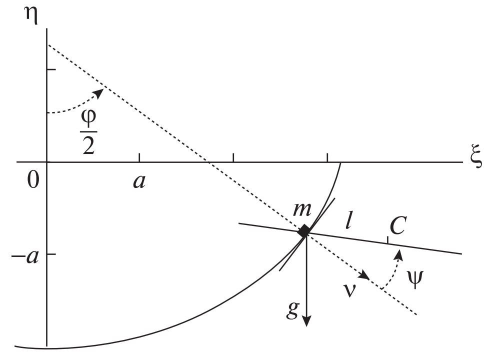

Рисунок. Маятник с точкой подвеса на циклоиде

При варьировании управляющих функций будем считать тождественно выполненным уравнение движения: $\Upsilon \equiv 0$. Интегрирующий множитель будет меняться вместе с изменением управления. Вместе с тем вариация тождества (1.5) примет вид

$$\int_{x_0}^{x} (\Upsilon\delta\lambda + \lambda\delta\Upsilon)dx = \int_{x_0}^{x} \lambda\delta\Upsilon dx = 0.$$

Поэтому при анализе влияния управления в формулах (1.7) и (1.15) множители λ и λ_ξ играют вспомогательную роль и не участвуют в процессе оптимизации. Они служат лишь для тождественного преобразования уравнения движения. Заметим также, что из формул (1.6) и (1.14) следует, что знаки множителей λ и λ_ξ совпадают со знаками функций $f(x,\mathbf{y})$ и $f(-\xi,\mathbf{y}_\xi)$ соответственно.

Рассмотрим сначала утверждение I теоремы 1. Пусть значение координаты $x = x_1$ соответствует максимально достижимому отклонению системы от положения равновесия, но первое равенство формулы (2.1) в какой-нибудь внутренней точке отрезка $[x_0,\ x_1]$ нарушено. Тогда, как следует из формулы (1.7), в этой точке можно за счет управления $\mathbf{u}$, оставив значения других управлений неизменными, увеличить подынтегральную функцию в (1.7), а за счет этого увеличить значение скорости $\dot{x}_1 > 0$. Тогда вырастет и новое значение координаты $x = x_1$, при котором скорость $\dot{x}$ сделается равной нулю. Полученное противоречие доказывает необходимость выполнения первого соотношения равенства (2.1). Второе соотношение равенства (2.1) аналогичным образом следует из того, что функции f^* в (1.8), (1.11) линейно зависят от скоростей системы.

Для доказательства утверждения II теоремы 1 следует воспользоваться формулой (1.15) с последующей интерпретацией полученного результата в терминах независимой переменной x. Действительно, тогда должно быть

$$\mathbf{u}_m = \arg\max_{\mathbf{u}}[-\chi(\xi,\mathbf{u}_M,\mathbf{u}'_M,\mathbf{w}_M,\mathbf{w}'_M)F(-\xi,\mathbf{u})] = \arg\min_{\mathbf{u}}[\chi(x,\mathbf{u}_m,\mathbf{u}'_m,\mathbf{w}_m,\mathbf{w}'_m)F(x,\mathbf{u})],$$
$$\dot{\mathbf{w}}_m = \arg\min_{\dot{\mathbf{w}}}\left[-\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(\xi_1,\mathbf{u}_M,\mathbf{w}_M)\dot{w}_k\right] = \arg\max_{\dot{\mathbf{w}}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0,\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_m)\dot{w}_k\right].$$

Теорема 2 является взаимной по отношению к теореме 1, и поэтому доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Подробное доказательство приведенных выше теорем с помощью метода первой вариации читатель может найти в [12].

3. Пример. Маятник с точкой подвеса на перевернутой циклоиде. Материальная точка массы m движется без трения в вертикальной плоскости по перевернутой циклоиде (брахистохроне). К этой точке подвешен стержень, имеющий массу M и центральный момент инерции I. Стержень способен совершать колебания в той же плоскости. Требуется, управляя движением стержня, заставить точку m двигаться по циклоиде с возрастающей амплитудой колебаний около ее нижней точки. Обозначим буквой l расстояние от центра масс C стержня до точки подвеса. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к циклоиде в точке подвеса стержня, а ψ — угол между стержнем и вектором $\boldsymbol{\nu}$. Угол ψ примем в качестве управления с целью раскачивания системы, ограничив его допустимые значения: $\psi_m \le \psi \le \psi_M$ (рисунок).

Для описания движения введем абсолютную правоориентированную декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$. Ось $O\eta$ направим вертикально вверх. Ось $O\xi$ расположим в плоскости движения. Тогда ось $O\zeta$ будет перпендикулярна указанной плоскости. Уравнение перевернутой циклоиды представим в виде

$$\xi = a(\varphi + \sin\varphi), \quad \eta = -a(1 + \cos\varphi), \quad \zeta = 0,$$

где $a > 0$ – постоянная, а φ – обобщенная координата, задающая положение точки m на циклоиде. Циклоида выпукла вниз. Ее внешняя нормаль $\mathbf{v} = (\nu_\xi, \nu_\eta, 0)$ имеет координаты

$$\nu_\xi = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \nu_\eta = -\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ образует с отрицательным направлением оси $O\eta$ угол $\varphi/2$.

Центр масс стержня имеет координаты

$$\xi_c = a(\varphi + \sin\varphi) + l\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right), \quad \eta_c = -a(1 + \cos\varphi) - l\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right).$$

Далее

$$\dot\xi_c = 2a\dot\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2} + l\left(\frac{\dot\varphi}{2} + \dot\psi\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right), \quad \dot\eta_c = a\dot\varphi\sin\varphi + l\left(\frac{\dot\varphi}{2} + \dot\psi\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right).$$

Кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = 2(m + M)a^2\dot\varphi^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2Mla\dot\varphi\left(\frac{\dot\varphi}{2} + \dot\psi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \frac{Ml^2 + I}{2}\left(\frac{\dot\varphi}{2} + \dot\psi\right)^2.$$

Найдем силовую функцию:

$$U = mga(1 + \cos\varphi) + Mg\left[a(1 + \cos\varphi) + l\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\right].$$

Система уравнений Лагранжа записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(A_\psi\dot\varphi + B_\psi\dot\psi) + C_\psi = -Mlg\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + Q_\psi,\\ \frac{d}{dt}(A_\varphi\dot\varphi + B_\varphi\dot\psi) + C_\varphi = -(m + M)ga\sin\varphi - \frac{Mgl}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right),\end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$A_\psi = \left(2Mla\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \frac{Ml^2 + I}{2}\right),$$

$$B_\psi = (Ml^2 + I), \quad C_\psi = 2Mla\dot\varphi\left(\frac{\dot\varphi}{2} + \dot\psi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi.$$

$$\begin{cases} A_\varphi = 4(m + M)a^2\cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) + 2Mla\cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \dfrac{Ml^2 + I}{4},\\ B_\varphi = 2Mla\cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \dfrac{Ml^2 + I}{2},\\ C_\varphi = \left[2(m + M)a^2\dot\varphi^2 + 2Mla\dot\varphi\left(\dfrac{\dot\varphi}{2} + \dot\psi\right)\cos\psi\right]\sin\varphi,\end{cases} \tag{3.2}$$

Q_ψ – обобщенная сила, обеспечивающая требуемое изменение угла ψ.

В уравнениях (3.1) в качестве управляющей координаты выбирается угол ψ. В соответствии с уравнением (1.3) получим

$$f = A_\varphi + B_\varphi\psi', \quad p = -\left[2(m + M)a^2 + 2Mla\left(\frac{1}{2} + \psi'\right)\cos\psi\right]\sin\varphi, \tag{3.3}$$

где ψ' – производная по φ. Знак множителя λ, вычисляемого по формуле (1.6), совпадает со знаком функции f. Правая часть второго уравнения (3.1) зависит от угла ψ. Оптимизируемая по величине ψ функция в формулировке теорем 1 и 2 принимает вид

$$\Phi = \chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m)F(x, \mathbf{u}) = -\chi\left[(m + M)ga\sin\varphi + \frac{Mgl}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\right]. \tag{3.4}$$

Естественно принять $|\psi| \le \pi/2$, так как при превышении этих пределов конструкция системы может быть нарушена. Экстремальные значения функции Φ достигаются при

$$\psi = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \to \psi' = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для указанных экстремалей будем иметь

$$f = A_\varphi - \frac{B_\varphi}{2} = 4(m + M)a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + Mla\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi > 0.$$

Поэтому коэффициент $\chi > 0$. Сузим допустимые границы изменения угла ψ:

$$-\frac{\pi}{2} < \psi_m < 0, \quad 0 < \psi_M < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда оптимальными могут быть также режимы постоянства функции $\psi(\varphi)$, для которых $\psi' = 0$, и будет выполнено

$$f = A_\varphi = 4(m + M)a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2Mla\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \frac{Ml^2 + I}{4} > 0.$$

Следовательно, и в этом случае оказывается $\chi > 0$.

Применим утверждение I теоремы 1. Пусть $\varphi_0 < 0$ есть левая граница отклонения по углу φ, а $\varphi_1 > 0$ – соответственно правая граница, и в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Из формулы (2.1) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полуколебания состоит в применении правила

$$\psi = \begin{cases} \psi_M, & \text{если} \quad \dfrac{\varphi}{2} + \psi_M < -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}, & \text{если} \quad \dfrac{\varphi}{2} + \psi_m \le -\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\varphi}{2} + \psi_M, \\ \psi_m, & \text{если} \quad \dfrac{\varphi}{2} + \psi_m > -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда, напротив, требуется минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (2.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \begin{cases} \psi_m, & \text{если} \quad \dfrac{\varphi}{2} + \psi_m > \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}, & \text{если} \quad \dfrac{\varphi}{2} + \psi_m \le \dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\varphi}{2} + \psi_M, \\ \psi_M, & \text{если} \quad \dfrac{\varphi}{2} + \psi_M < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{3.6}$$

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (3.3); после достижения минимального отрицательного отклонения – формулы (3.2) и т.д.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (3.2), после достижения минимального отрицательного отклонения – формулы (3.3) и т.д.

Когда зависимость $\psi(\varphi)$ установлена, второе уравнение системы (3.1) становится замкнутым и его можно решать различными известными методами [2]. В частности, для решения можно применить формулу (1.7). После определения функции $\varphi(t)$ становится возможным из первого уравнения (3.1) найти обобщенную силу Q_ψ, обеспечивающую требуемое изменение угла ψ.

Из системы уравнений (3.1) видим, что при $l = 0$ угол ψ становится циклической координатой. Тогда, чтобы обеспечить раскачивание, достаточно воспользоваться правилами разд. 2 для управления скоростями в конце полуразмаха.

Заключение. Применение предложенных алгоритмов управления, получаемых из необходимых условий оптимальности (2.1)–(2.4), предполагает учет информации о моментах времени достижения экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полуколебания. Условия оптимальности (2.1)–(2.4) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [4]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. Эти условия упрощают решение соответствующих задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2, испр. М.: МЦНМО, 2018. 344 с. ISBN 978-5-94057-907-6.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.
4. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий / Пер. с франц. Ижевск: К-Динамика, 2012. 312 с. ISBN 978-5-906268-01-3.
6. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с. ISBN 978-5-9221-1460-8.
7. *Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З.* К построению оптимальных режимов раскачивания двузвенного физического маятника // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 217–226. ISSN 0032-8235.
8. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.* Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения “вверх ногами” // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 163–176. ISSN: 0002-3388. https://doi.org/10.1134/S0002338819060052
9. *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 4. С. 165–173.
10. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* О качении колеса посредством управления его дисбалансом // ПММ. Т. 70. Вып. 3. 2006. С. 371–383.
11. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63. Вып. 1а. С. 5–32.
12. *Golubev Yu.F.* Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 11. P. 2596–2607. ISSN: 1995-0802. https://doi.org/10.1134/S199508022111010X