ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 4, с. 3–21

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-40

О СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ КЛАССА НЕУСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И l_1-ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Д. Н. Ибрагимов[a],*, А. В. Осокин[a], А. Н. Сиротин[a],, К. И. Сыпало[a]**

[a] *МАИ (национальный исследовательский ун-т), ФГУП ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия*

**e-mail: rikk.dan@gmail.com*

***e-mail: asirotin2@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2022 г.
После доработки 03.03.2022 г.
Принята к публикации 28.03.2022 г.

Обсуждаются вопросы построения множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарным ограничением на скалярное управление в смысле l_1-нормы. Для классов не полностью управляемых и не полностью достижимых линейных систем предельные множества управляемости и достижимости соответственно построены явным образом. Приведены примеры.

DOI: 10.31857/S0002338822040102

Введение. При решении задач управления динамическими системами нередко приходится учитывать различные ограничения, связанные с техническими аспектами изучаемой системы. Такого рода ограничения приводят к тому, что система из заданного начального состояния может быть переведена в ограниченное множество терминальных состояний даже при бесконечном временном горизонте. Данный факт делает актуальным исследование не только вопросов достижимости и управляемости различных динамических систем, но и разработку методов построения и оценивания предельных множеств достижимости и управляемости для произвольной системы управления. Кроме того, множества управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления [1, 2] для систем с дискретным временем.

В случае линейных систем с дискретным временем и скалярным управлением, не ограниченным в смысле l_p-нормы, известно, что множества достижимости и управляемости за конечное число шагов представляют собой выпуклые многогранники [1]. Однако данное свойство при переходе к бесконечному времени может не сохраняться. Более того, в [3–5] продемонстрировано, что в общем случае предельное множество управляемости и достижимости представляет собой цилиндрическое множество с выпуклым сечением. Принципиальная управляемость и достижимость такой линейной системы управления определяется структурой ее матрицы, а именно расположением ее собственных значений относительно круга единичного радиуса с центром в нуле на комплексной плоскости.

Тем не менее данные результаты относятся к линейным системам без суммарного ограничения на последовательность управляющих воздействий [1, 3, 4]. С другой стороны, зачастую ограничения на функцию управления являются гладкими [2, 6, 7], что связано с необходимыми условиями применимости классических оптимизационных методов [8, 9], хотя с точки зрения технической реализации рассматриваемой математической модели более корректно было бы использовать линейные или кусочно-линейные ограничения. Например, при описании задачи коррекции орбиты спутника [10, 11] следует учитывать два типа ограничений на управление: ограничение на силу каждого корректирующего импульса, обусловленное мощностью двигателя, и ограничение, связанное с количеством топлива. Последнее в математической модели движения спутника может быть представлено в виде ограничения на сумму модулей всех управляющих воздействий.

В статье изучаются вопросы построения предельных множеств достижимости и управляемости систем с интегральным ограничением на управление в смысле l_1-нормы. Принципиальной особенностью данной работы является то, что данные множества удается построить явным образом. В разд. 2 в виде леммы сформулированы основные свойства множеств достижимости линейных систем с дискретным временем и скалярным ограниченным управлением, в частности доказано, что каждое такое множество представляет собой выпуклый и симметричный относительно начала координат многогранник. Также в разд. 2 доказано, что аналогичные свойства справедливы и для предельных множеств управляемости не полностью достижимых систем. В разд. 3 приведены важные следствия из данных утверждений, в частности доказаны аналогичные свойства для множеств управляемости не полностью управляемых систем и представлены оценки множества вершин предельных множеств управляемости и достижимости. В разд. 4 полученные теоретические результаты продемонстрированы на примерах построения множеств управляемости и достижимости для различных систем управления.

1. Формулировка задачи. Рассматривается автономная линейная система с дискретным временем

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,\ldots\} \tag{1.1}$$

и скалярным ограниченным по импульсу управлением

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u(k)| \le t, \quad t \in (0,\infty). \tag{1.2}$$

Это ограничение можно рассматривать как ограничение на l_1-норму последовательностей управлений $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ — соответствующие матрицы системы; $u(k) \in \mathbb{R}$ — скалярное управление в момент времени $k \in \mathbb{Z}_+$; $t \in (0,\infty)$ — произвольный параметр, характеризующий суммарные энергозатраты для управления.

Считается, что система (1.1) без ограничений на управления является управляемой, т.е. выполнено ранговое условие Калмана

$$\operatorname{rank}(b|Ab|\cdots|A^{n-1}b) = n. \tag{1.3}$$

Пусть $\mathcal{Y}_t(k) \subset \mathbb{R}^n$ — множество достижимости системы (1.1), (1.2) за k шагов, т.е. это множество всех возможных терминальных состояний системы, в которые она может попасть из 0 за k шагов посредством использования допустимых в смысле ограничений (1.2) управлений:

$$\mathcal{Y}_t(k) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i bu(k-1-i), \sum_{i=0}^{k-1} |u(i)| \le t \right\}, \quad k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}.$$

Через $\mathcal{Y}_t$ обозначается предельное множество достижимости:

$$\mathcal{Y}_t = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_t(k).$$

Аналогично вводится множество $\mathcal{X}_t(k)$ 0-управляемости за k шагов дискретной системы, определяемой соотношениями (1.1) и (1.2). Это множество всех возможных начальных состояний $x(0)$ системы, из которых она может попасть в 0 за k шагов посредством использования допустимых в смысле ограничений (1.2) управлений:

$$\mathcal{X}_t(k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 = \sum_{i=0}^{k-1} A^i bu(k-1-i) + A^k x, \sum_{i=0}^{k-1} |u(i)| \le t \right\}, \quad k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_t$ — предельное множество 0-управляемости:

$$\mathcal{X}_t = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_t(k).$$

Обозначим через $\sigma(A) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ спектр матрицы A, т.е. множество всех собственных значений A с учетом кратности. Целью статьи является исчерпывающее описание множеств $\mathcal{X}_t$ и $\mathcal{Y}_t$ для одного класса систем, удовлетворяющих соотношениям (1.1)–(1.3). Более точно будут изучаться предельные множества достижимости $\mathcal{Y}_t$ для асимптотически устойчивых систем, т.е. тех систем, для которых справедливо условие

$$\rho(A) := \max_{\alpha_i \in \sigma(A)} |\alpha_i| < 1. \tag{1.4}$$

Аналогично изучаются множества 0-управляемости $\mathcal{X}_t$ для неустойчивых систем с условием

$$\min_{\alpha_i \in \sigma(A)} |\alpha_i| > 1. \tag{1.5}$$

Оказывается, что для выделенного класса систем (1.1)–(1.3) множества управляемости могут быть описаны явным образом, что приводит к возможности конструктивного построения допустимых управлений в задачах оптимального управления.

2. Множества достижимости. Охарактеризуем основные свойства множеств достижимости $\mathcal{Y}_t(k)$ системы (1.1)–(1.2). В данном случае не требуется использование условия управляемости Калмана (1.3). Здесь и везде далее через $\operatorname{conv}(\mathcal{Y})$ обозначена выпуклая оболочка множества $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ – наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее $\mathcal{Y}$ в качестве подмножества [9, 12].

Л е м м а. Для каждого натурального k справедливы утверждения:

(i) $\mathcal{Y}_t(k)$ – полиэдр;

(ii) множество $\mathcal{Y}_t(k)$ замкнуто, ограничено и симметрично относительно 0;

(iii) $\mathcal{Y}_t(k)$ – выпуклый многогранник, т.е.

$$\mathcal{Y}_t(k) = t \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b).$$

Здесь

$$\operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b) := \operatorname{conv}(b, Ab, \ldots, A^{k-1}b, -b, -Ab, \ldots, -A^{k-1}b);$$

(iv) $0 \in \operatorname{int} \mathcal{Y}_t(k)$ при $k \geq n$;

(v) $\mathcal{Y}_t(k) \subset \mathcal{Y}_t(m)$ при $m \geq k$;

(vi) $\mathcal{Y}_t(k) = t\mathcal{Y}_1(k)$;

(vii) $\mathcal{Y}_t(k) \cap \mathcal{Y}_t(m) \neq \varnothing$ при $k, m \in \mathbb{N}$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

В силу определения предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_t$ есть счетное объединение множеств достижимости $\mathcal{Y}_t(k)$ за k шагов, и поэтому некоторые перечисленные выше свойства могут перестать быть верными. Здесь будут рассмотрены особенности предельного множества достижимости $\mathcal{Y}_t$ для асимптотически устойчивой системы, определяемой соотношениями (1.1), (1.2) и (1.4), т.е. когда все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости. Как известно [3, 4], данная ситуация соответствует системе, которая не является полностью достижимой, т.е. вектор состояния которой может попасть за конечное число шагов из 0 не во все точки пространства $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а. Пусть для системы (1.1)–(1.2) выполняются условия (1.3) и (1.4). Тогда существует $K \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_t(K). \tag{2.1}$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

3. Следствия теоремы. Нижним пределом последовательности множеств $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ [13, Гл. 1, § 1, п. 1] называется множество $\liminf \mathcal{Y}_t(k)$, состоящее из точек, принадлежащих всем множествам $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, кроме, быть может, конечного их числа.

С л е д с т в и е 1. Пусть для системы (1.1)–(1.2) выполняются условия (1.3), (1.4). Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_t = \lim_{k\to\infty} \mathcal{Y}_t(k).$$

Доказательство. Формализуя определение нижнего предела последовательности множеств, получаем

$$\liminf \mathcal{Y}_t(k) = \{x : \exists k \quad \forall m \geq k \quad x \in \mathcal{Y}_t(m)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m).$$

В силу утверждения (v) леммы находим

$$\bigcap_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m) = \mathcal{Y}_t(k),$$

что приводит к равенству

$$\liminf \mathcal{Y}_t(k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k).$$

Аналогично верхним пределом последовательности множеств $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ [13, Гл. 1] называется множество $\limsup \mathcal{Y}_t(k)$, состоящее из точек, принадлежащих бесконечному числу различных множеств $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Формализуя определение, получаем

$$\limsup \mathcal{Y}_t(k) = \{x : \forall k \quad \exists m \geq k \quad x \in \mathcal{Y}_t(m)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m).$$

В силу утверждения (v) леммы приходим к равенствам

$$\bigcup_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m),$$

$$\limsup \mathcal{Y}_t(k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k).$$

Окончательно

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k) = \liminf \mathcal{Y}_t(k) = \limsup \mathcal{Y}_t(k) := \lim_{k\to\infty} \mathcal{Y}_t(k) = \mathcal{Y}_t.$$

Следствие 2. Предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_t$ обладает всеми свойствами (i), (ii), (iv), (vi) леммы множеств достижимости $\mathcal{Y}_t(k)$ для конечного числа шагов $k \geq n$.

Данное утверждение вполне объясняется использованием предельного перехода в следствии 1.

Из теоремы вытекает, что число K определяется не единственным образом. Тем не менее, выберем соответствующее минимальное число из (2.1):

$$K_{\min} = \min\{K : \mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_t(K)\}. \tag{3.1}$$

Число $K_{\min}$ из (3.1) можно эффективно оценить сверху. Действительно, поскольку в конечномерном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы эквивалентны [14, Гл. 3, § 4], то имеется хотя бы одно число $\gamma \in (0,\infty)$, такое, что для произвольного $y = (y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$

$$\|y\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq \gamma \|y\|_1, \tag{3.2}$$

где

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

Введем в рассмотрение функционал Минковского выпуклого множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, у которого $0 \in \operatorname{int} \mathcal{A}$, определяемый [9, 12, 14] по формуле

$$\mu(x,\mathcal{A}) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda\mathcal{A}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

В силу [12, теорема 15.2; 14, Гл. III, § 2, теорема 3] определения (3.3), эта формула задает некоторую норму в $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_{\mathcal{Y}_t(k)} := \mu(x, \mathcal{Y}_t(k)), \quad k \geq n, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) получаем

$$\begin{gathered}\|y\|_{\mathcal{Y}_t(n)} = \min\{\lambda > 0 : y \in \lambda \mathcal{Y}_t(n)\} = \\ = \min\{\lambda > 0 : y \in \lambda t \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{n-1}b)\} = \\ = t^{-1} \min\{\lambda > 0 : y \in \lambda \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{n-1}b)\} = \\ = t^{-1} \min\left\{\lambda > 0 : y = \lambda \sum_{i=1}^{n} A^{n-i} b u_i, \sum_{i=1}^{n} |u_i| = 1\right\} = \\ = t^{-1} \min\left\{\lambda > 0 : y = \sum_{i=1}^{n} A^{n-i} b u_i, \sum_{i=1}^{n} |u_i| = \lambda\right\}.\end{gathered}$$

Следовательно, найдется вектор $u^n = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, такой, что

$$\|u^n\|_1 = \lambda, \quad y = A_n u^n.$$

По условию (1.3) матрица A_n невырождена и тогда

$$u^n = A_n^{-1} y.$$

Теперь получаем последовательно

$$\begin{gathered}\|y\|_{\mathcal{Y}_t(n)} = t^{-1} \min\left\{\lambda > 0 : y = A_n u^n, \|u^n\|_1 = \lambda\right\} = \\ = t^{-1} \min\left\{\lambda > 0 : \|A_n^{-1} y\|_1 = \lambda\right\} = t^{-1} \|A_n^{-1} y\|_1 \leq t^{-1} \|A_n^{-1}\|_1 \|y\|_1.\end{gathered}$$

Таким образом, можно положить

$$\gamma = t^{-1} \|A_n^{-1}\|_1,$$

и, следовательно, неравенство (3.2) установлено.

Если найдется $K_1 \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq 1 \quad \text{при} \quad k \geq K_1, \tag{3.5}$$

то

$$K_1 \geq \max\{K_{\min}, n\}. \tag{3.6}$$

Действительно, из (3.4) и (3.5) следует включение

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(n) \quad \text{при} \quad k \geq K_1.$$

В силу п. (v) леммы верно включение

$$\mathcal{Y}_t(n) \subset \mathcal{Y}_t(K_1),$$

и, следовательно,

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(K_1) \quad \text{при} \quad k \geq K_1.$$

Так как

$$\mathcal{Y}_t(K_1) = t \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{K_1} b),$$

то

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(K_1) \quad \text{при} \quad k = 0, \ldots, K_1,$$

и поэтому

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(K_1) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом,

$$\mathrm{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^k b) \subset \mathrm{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{K_1} b) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathcal{Y}_t(k) \subset \mathcal{Y}_t(K_1), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{Y}_t(K_{\min}) = \mathcal{Y}_t = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k) \subset \mathcal{Y}_t(K_1),$$

т.е. верно (3.6).

В силу теоремы Шура [15, теорема 2.3.1] об унитарности триангуляции найдутся унитарная матрица U и верхняя треугольная матрица Λ, такие, что

$$A = U \Lambda U^{\mathrm{T}}.$$

Положим

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2,n-1} & \lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots & \lambda_{3,n-1} & \lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выберем $\delta > 0$ и соответствующую матрицу

$$D_\delta = \mathrm{diag}\left\{\delta, \delta^2, \delta^3, \ldots, \delta^n\right\}.$$

Затем вычислим матрицу

$$D_\delta \Lambda D_\delta^{-1} = D_\delta \begin{pmatrix} \delta^{-1}\lambda_{11} & \delta^{-2}\lambda_{12} & \delta^{-3}\lambda_{13} & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{1,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{1n} \\ 0 & \delta^{-2}\lambda_{22} & \delta^{-3}\lambda_{23} & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{2,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \delta^{-3}\lambda_{33} & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{3,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{n-1,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta^{-n}\lambda_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \delta^{-1}\lambda_{12} & \delta^{-2}\lambda_{13} & \cdots & \delta^{-n+2}\lambda_{1,n-1} & \delta^{-n+1}\lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \delta^{-1}\lambda_{23} & \cdots & \delta^{-n+3}\lambda_{2,n-1} & \delta^{-n+2}\lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots & \delta^{-n+4}\lambda_{3,n-1} & \delta^{-n+3}\lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \delta^{-1}\lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь положим

$$C_\delta = D_\delta U^{\mathrm{T}}$$

и введем соответствующую векторную норму $\|\cdot\|_{C_\delta} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, определяемую по формуле

$$\|x\|_{C_\delta} := \|C_\delta x\|_1 \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Соответствующая матричная норма $\|\cdot\|_{C_\delta} : \mathbb{R}^{n\times n} \to [0,\infty)$ порождается векторной нормой $\|\cdot\|_{C_\delta}$ и для $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется формулой

$$\|A\|_{C_\delta} = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_{C_\delta}}{\|x\|_{C_\delta}} = \max_{x\neq 0}\frac{\|C_\delta Ax\|_1}{\|C_\delta x\|_1} = \max_{x\neq 0}\frac{\|C_\delta A C_\delta^{-1} C_\delta x\|_1}{\|C_\delta x\|_1} =$$
$$= \max_{y\neq 0}\frac{\|C_\delta A C_\delta^{-1} y\|_1}{\|y\|_1} = \|C_\delta A C_\delta^{-1}\|_1 .$$

Далее получаем для $k \in \mathbb{N}$

$$\|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \le \gamma\|A^k b\|_1 = \gamma\|C_\delta^{-1} C_\delta A^k b\|_1 \le \gamma\|C_\delta^{-1}\|_1\|C_\delta A^k b\|_1 =$$
$$= \gamma\|C_\delta^{-1}\|_1\|A^k b\|_{C_\delta} \le \gamma\|C_\delta^{-1}\|_1\|A\|_{C_\delta}^k\|b\|_{C_\delta} .$$

Полагая $\delta > 1$, оценим величину

$$\|A\|_{C_\delta} = \|C_\delta A C_\delta^{-1}\|_1 = \|D_\delta U^{\mathrm{T}} U \Lambda U^{\mathrm{T}} U D_\delta^{-1}\|_1 = \|D_\delta \Lambda D_\delta^{-1}\|_1 =$$
$$= \max\left\{|\lambda_{11}|, |\delta^{-1}\lambda_{12}| + |\lambda_{22}|, |\delta^{-2}\lambda_{13}| + |\delta^{-1}\lambda_{23}| + |\lambda_{33}|, \ldots,\right.$$
$$\left.|\delta^{-n+1}\lambda_{1n}| + \ldots + |\delta^{-1}\lambda_{n-1,n}| + |\lambda_{nn}|\right\} \le$$
$$\le \max\left\{|\lambda_{11}|, |\lambda_{22}| + \delta^{-1}|\lambda_{12}|, |\lambda_{33}| + \delta^{-1}(|\lambda_{13}| + |\lambda_{23}|), \ldots,\right.$$
$$\left.\le \left||\lambda_{nn}| + \delta^{-1}(|\lambda_{1n}| + \ldots + |\lambda_{n-1,n}|)\right|\right\} \le$$
$$\le \max_{1\le i\le n}|\lambda_{ii}| + \delta^{-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}|\lambda_{ij}| = \rho(A) + \delta^{-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}|\lambda_{ij}|.$$

Выберем число δ произвольно из условия

$$\delta > \max\left\{1, \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}|\lambda_{ij}|}{1-\rho(A)}\right\}.$$

Здесь используется условие (1.4). Зафиксируем выбранную постоянную δ из этого неравенства, тогда верно неравенство

$$\|A\|_{C_\delta} < 1,$$

и

$$\|A\|_{C_\delta}^k \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Поскольку δ не зависит от параметра k, то соответствующие величины

$$\|C_\delta^{-1}\|_1 \ne 0, \quad \|b\|_{C_\delta} \ne 0$$

также не зависят от k. Следовательно, найдется, по крайней мере, одно число $K_2 \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\gamma\|C_\delta^{-1}\|_1\|A\|_{C_\delta}^{K_2}\|b\|_{C_\delta} \le 1 \tag{3.7}$$

или

$$\|A\|_{C_\delta}^{K_2} \le \gamma^{-1}\|C_\delta^{-1}\|_1^{-1}\|b\|_{C_\delta}^{-1}.$$

Таким образом,

$$K_2 \ge \max\{K_{\min}, n\}, \tag{3.8}$$

и выполняется неравенство

$$\left\|A^k b\right\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \le 1 \quad \text{при} \quad k \ge K_2. \tag{3.9}$$

Действительно, получаем

$$\left\|A^k b\right\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \le \gamma \left\|C_\delta^{-1}\right\|_1 \|A\|_{C_\delta}^{K_2} \|b\|_{C_\delta} \le 1,$$

что доказывает требуемое.

Сказанное представляет собой соответствующее утверждение.

С л е д с т в и е 3. Для минимального числа шагов множеств достижимости из (3.1) справедливы оценки

$$K_{\min} \le \max\{K_1, K_2\},$$

определяемые соотношениями (3.5), (3.6) и (3.8), (3.9).

Представленные ранее результаты могут быть расширены на некоторый более широкий класс систем (1.1), (1.2). При этом доказательства изменяются незначительно, и поэтому они опущены.

С л е д с т в и е 4. Пусть имеется последовательность вещественных чисел $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, такая, что

$$\nu_k > 0, \quad \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \nu_k^{-1} < \infty,$$

которая порождает для системы (1.1), (1.4) множества управлений:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k |u(k)| \le t, \quad t \in (0,\infty).$$

Если $\mathcal{Y}_t^\nu(k)$ и $\mathcal{Y}_t^\nu$ – соответствующие множества достижимости, то выполняются аналогичные условия леммы и теоремы и, следовательно, $\mathcal{Y}_t^\nu$ – выпуклый многогранник.

Поскольку предельное множество достижимости есть выпуклый многогранник, то существует возможность воспользоваться классическим результатом из выпуклого анализа и оценить количество допустимых управлений, необходимых для достижения заданного терминального состояния.

С л е д с т в и е 5. Для каждого $y \in \mathcal{Y}_t$ найдутся не более $n + 1$ ненулевых допустимых управлений $\{u^*(k_1),\ldots,u^*(k_{n+1})\}$, таких, что

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} A^{k_i} b u^*(k_i), \quad \sum_{i=1}^{n+1} |u^*(k_i)| \le t.$$

При этом минимальное число шагов для терминального состояния $y \in \mathcal{Y}_t$ определяется числом $K_{\min}$ и оценками из следствия 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы для произвольного $y \in \mathcal{Y}_t$ верно включение

$$y \in t\,\mathrm{conv}(b, Ab,\ldots,A^{K-1}b,-b,-Ab,\ldots,-A^{K-1}b)$$

для некоторого K. Построим множество

$$\mathcal{G} := \{c_1,\ldots,c_M\}, \quad \mathcal{Y}_t = \mathrm{conv}\,\mathcal{G}, \quad c_i \in \mathcal{Y}_t,$$

в котором расположены вершины c_i многогранника $\mathcal{Y}_t$ и $M \le 2K$. Воспользуемся теоремой Каратеодори [9, теорема 1.14.1; 12, теорема 17], используя ее геометрическое описание [16, теорема 2.4]: множество $\mathcal{Y}_t$ представляет собой выпуклую оболочку множества $\mathcal{G}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и поэтому есть объединение всех m-симплексов в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в $\mathcal{Y}_t$ при $m \le n$. Следовательно, каждая точка $y \in \mathcal{Y}_t$ принадлежит хотя бы одному m-симплексу из вершин c_i множества $\mathcal{G}$. Тогда по определению найдутся числа $v_1,\ldots,v_{n+1}$, такие, что

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} v_i c_{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 1, \quad v_i \ge 0, \quad c_{k_i} \in \mathcal{G}.$$

Положим

$$u^*(k_i) = t\begin{cases} v_i, & c_{k_i} \in t\{b, Ab, \ldots, A^{K-1}b\}, \\ -v_i, & c_{k_i} \in t\{-b, -Ab, \ldots, -A^{K-1}b\}. \end{cases}$$

Тогда получаем запись, эквивалентную утверждению следствия.

Опишем аналогичные свойства множеств 0-управляемости для рассматриваемого класса систем.

С л е д с т в и е 6. Для систем (1.1)–(1.3) и (1.5) множества 0-управляемости $\mathcal{X}_t(k)$ за конечное число шагов обладают свойствами, аналогичными свойствам леммы.

Для предельного множества 0-управляемости $\mathcal{X}_t$ выполняется утверждение, аналогичное теореме.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для систем (1.1), (1.2) введем обозначения

$$\mathcal{X}_{t,A}(k) := \mathcal{X}_t(k), \quad \mathcal{X}_{t,A} := \mathcal{X}_t, \quad \mathcal{Y}_{t,A}(k) := \mathcal{Y}_t(k), \quad \mathcal{Y}_{t,A} := \mathcal{Y}_t,$$

отвечающие матрице A. Также для системы

$$y(k+1) = A^{-1}y(k) + bv(k), \quad \sum_{k=0}^{\infty}|v(k)| \le t,$$

построим аналогичные множества управляемости $\mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k)$, $\mathcal{X}_{t,A^{-1}}$, $\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k)$, $\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}$, отвечающие матрице A^{-1}. В силу предположения (1.5) матрица A не вырождена.

Справедливо равенство

$$\mathcal{X}_{t,A}(k) = A^{-1}\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k). \tag{3.10}$$

Действительно, согласно определению $y \in \mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k)$, если и только если

$$y = A^{-(k-1)}bv(0) + \ldots + bv(k-1), \quad \sum_{i=0}^{k-1}|v(i)| \le t,$$

$$A^{k-1}y = A^k(A^{-1}y) = bv(0) + \ldots + A^{k-1}bv(k-1), \quad \sum_{i=0}^{k-1}|v(i)| \le t.$$

Полагая

$$u(0) = -v(k-1), \ldots, u(k-1) = -v(0),$$

приходим к выводу, что

$$A^{-1}y \in \mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k),$$

т.е.

$$A^{-1}\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k) \subset \mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k).$$

Обратно, если $x \in \mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k)$, то

$$x = -A^{-1}bu(0) - \ldots - A^{-k}bu(k-1), \quad \sum_{i=0}^{k+1}|u(i)| \le t,$$

$$Ax = -A^{(k-1)}bu(k-1) - \ldots - bu(0), \quad \sum_{i=0}^{k+1}|u(i)| \le t.$$

Снова делая замену

$$v(0) = -u(k-1), \ldots, v(k-1) = -u(0),$$

приходим к выводу, что

$$Ax \in \mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k),$$

т.е.

$$A\mathscr{X}_{t,A}(k) \subset \mathscr{Y}_{t,A^{-1}}(k).$$

Равенство (3.10) доказано.

Ясно, что теперь следствие 6 вытекает из (3.10) и утверждений леммы и теоремы.

4. Комментарии и примеры. В данном разделе построим различные примеры, демонстрирующие основные результаты леммы и теоремы.

Пример 1. Положим размерность фазового пространства $n = 2$, матрицу системы определим следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

При этом для любого $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ данная система удовлетворяет условиям (1.3) и (1.4).

Величина $K_{\min}$, определяемая соотношениями (3.1), в действительности сильно зависит от вектора b. В общем случае справедливо равенство

$$A^k b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} b_1 & \frac{k}{2^{k-1}} b_2 \\ 0 & \frac{1}{2^k} b_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Если предположить, что $b_2 = 0$, то с учетом п. (iii) леммы и теоремы получим, что

$$\mathscr{Y}_t(k) = t \cdot \operatorname{conv}\{\pm b\} = [-t|b_1|, t|b_1|] \times \{0\}.$$

Таким образом, $K_{\min} = 1$.

Если предположить, что $b_1 = 0$, то с учетом п. (iii) леммы верно равенство

$$\mathscr{Y}_t(k) = t|b_2| \cdot \operatorname{conv}\left\{ \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ldots, \pm\begin{pmatrix} \frac{k}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} \right\}.$$

Если положить

$$\lambda_1 = \frac{2k-1}{2^k}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{2^k},$$

то для $k \geq 3$ верно, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 1,$$

$$\lambda_1 b + \lambda_2(-A^2 b) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k}{2^{k-1}} \\ \frac{-1}{2^k} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют включения

$$-A^k b \in \operatorname{conv}\{b, -A^2 b, 0\},$$

$$A^k b \in \operatorname{conv}\{-b, A^2 b, 0\}.$$

Тогда с учетом теоремы верно, что

$$\mathscr{Y}_t(k) = \mathscr{Y}_t(3), \quad k \geq 3,$$

$$K_{\min} \leq 3.$$

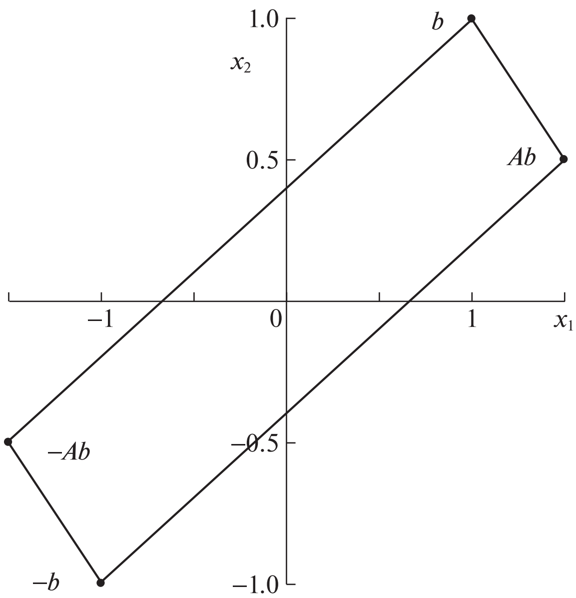

Рис. 1. Множество $\mathcal{Y}_t(2)$

При этом следующая система несовместна:

$$\begin{cases} \lambda_1 b - \lambda_2 b + \lambda_3 Ab - \lambda_4 Ab = A^2 b, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $tA^2 b \notin \mathcal{Y}_t(2)$, т.е.

$$\mathcal{Y}_t(2) \neq \mathcal{Y}_t(3),$$

$$K_{\min} \geq 3.$$

Окончательно получим равенство $K_{\min} = 3$.

Для случая $b = (1\ 1)^{\mathrm{T}}$, $t = 1$ построим соответствующие множества достижимости графически. Результаты проиллюстрированы на рис. 1–3.

Пример 2. С учетом следствия 5 и равенства (3.10) построенные в примере 1 множества достижимости $\mathcal{Y}_t(k)$ можно преобразовать в множества 0-управляемости системы (1.1), порождаемой матрицей системы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно [12, следствие 19.5.1], для случая $b_1 = 0$ справедливо следующее равенство:

$$\mathcal{X}_{A^{-1},t} = \mathcal{X}_{A^{-1},t}(3) = A\mathcal{Y}_{A,t}(3) = t \cdot \operatorname{conv}\left\{\pm Ab, \pm A^2 b, \pm A^3 b\right\} =$$

$$= t\left|b_2\right| \cdot \operatorname{conv}\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}\right\}.$$

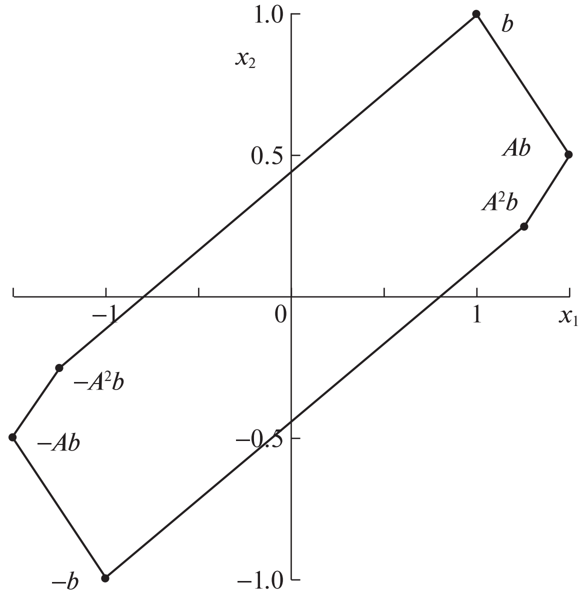

Рис. 2. Множество $\mathcal{Y}_t(3)$

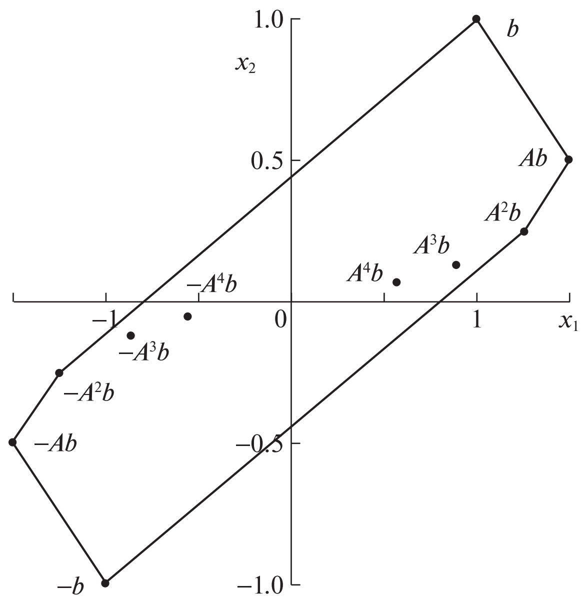

Рис. 3. Множества $\mathcal{Y}_t(4) = \mathcal{Y}_t(5) = \mathcal{Y}_t$

Пример 3. Рассмотрим случай комплексных собственных значений матрицы A, удовлетворяющих условию (1.4):

$$A = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

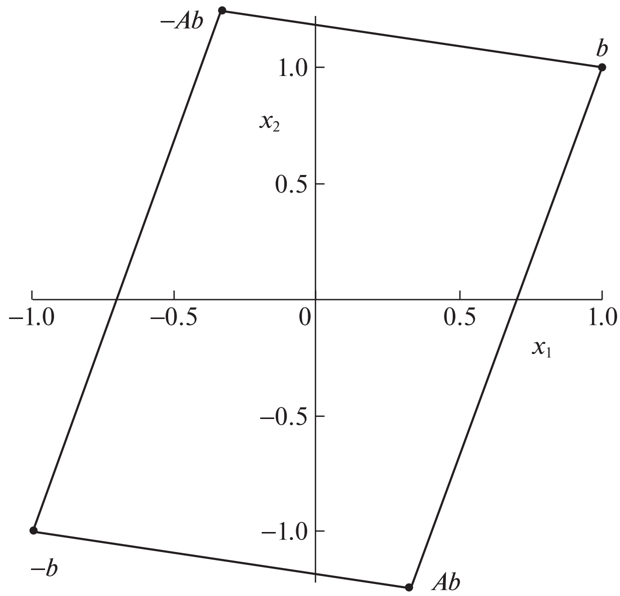

Рис. 4. Множество $\mathcal{Y}_t(2)$

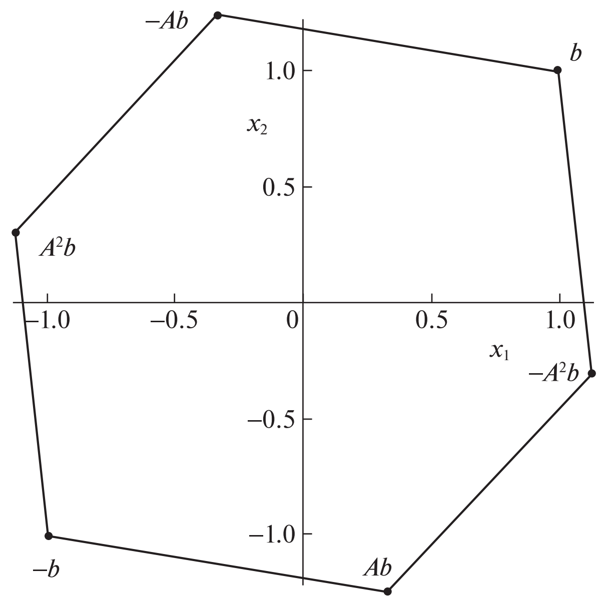

Рис. 5. Множество $\mathcal{Y}_t(3) = \mathcal{Y}_t$

Тогда для любых $b \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо представление

$$A^k b = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^k} Ab, & k = 3i+1, \\ \dfrac{1}{\alpha^k} A^2 b, & k = 3i+2, \quad \text{где} \quad i \in \mathbb{Z}_+, \\ \dfrac{1}{\alpha^k} b, & k = 3i, \end{cases}$$

откуда следует, что $K_{\min} \le 3$. Также для случая $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $t = 1$, $\alpha = 1.1$ множества достижимости $\mathcal{Y}_t(2)$ и $\mathcal{Y}_t(3)$, построенные на основе п. (iii) леммы, представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

Следует также отметить, что в силу теоремы множество $\mathcal{Y}_t(3)$ совпадает с предельным множеством достижимости $\mathcal{Y}_t$.

Заключение. Рассмотрены методы построения предельных множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограниченным скалярным управлением. Предполагается, что управление как функция времени является ограниченной последовательностью в смысле l_1-нормы.

Для случая, когда собственные значения матрицы системы не превосходят 1 по модулю, т.е. для не полностью достижимых систем, предельные множества достижимости удается построить явным образом: доказано, что они представляют собой выпуклый, симметричный относительно начала координат многогранник. При этом в п. (iii) леммы дано описание вершин данного многогранника. Также доказано, что последовательность множеств управляемости за конечное число шагов в этом случае представляет собой, начиная с некоторого $K_{\min}$, постоянную последовательность. В следствии 3 предложена конструктивная оценка величины $K_{\min}$.

Полученные результаты для множеств достижимости обобщены и для построения множеств 0-управляемости не полностью управляемых систем, т.е. тех систем собственные значения матриц которых по модулю строго больше 1. Данный факт сформулирован в следствии 6.

В качестве демонстрации основных результатов данной работы приведены примеры и иллюстрации построения множеств управляемости и достижимости для различных линейных систем с дискретным временем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. (i). По определению [8, Гл. 2, § 4, п. 1] множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ называется полиэдром, если его можно представить как множество решений системы из конечного числа m линейных неравенств:

$$\mathcal{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}} a^j \le b_j, a^j \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1,m}\right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n}$ замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_1:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n} = \left\{x = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\}.$$

Множество $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n}$ – полиэдр, поскольку

$$\left\{x = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}} \tilde{a}^j \le 1, j = \overline{1,2^n}\}, \qquad (\text{П.1})$$

где

$$\tilde{a}^j = (\tilde{a}_1^j,\ldots,\tilde{a}_n^j)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{a}_i^j \in \{-1,1\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,2^n}.$$

Действительно, если для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \ge 0$ верно неравенство

$$|\alpha| \le \beta,$$

то получаем соотношение

$$\alpha \le \beta, \quad -\alpha \le \beta$$

или

$$\pm\alpha \le \beta. \qquad (\text{П.2})$$

Далее рассуждения проводятся по индукции. Пусть $k = 1$, тогда для любого $x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n}$ находим

$$|x_1| \le 1 - \sum_{i=2}^{n} |x_i|. \qquad (\text{П.3})$$

Из (П.2) и (П.3) имеем

$$\pm x_1 \le 1 - \sum_{i=2}^{n} |x_i|$$

или

$$\sum_{i=2}^{n} |x_i| \le 1 \pm x_1.$$

Допустим, для произвольного $k = \overline{2, n-1}$ верно неравенство

$$\sum_{i=k}^{n} |x_i| \le 1 \pm x_1 \pm \dots \pm x_{k-1} = 1 \pm \sum_{i=1}^{k-1} x_i. \tag{П.4}$$

Тогда

$$|x_k| \le 1 \pm \sum_{i=1}^{k-1} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} |x_i|.$$

Из (П.2) получаем

$$\begin{gathered} \pm x_k \le 1 \pm \sum_{i=1}^{k-1} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} |x_i|, \\ \sum_{i=k+1}^{n} |x_i| \le 1 \pm \sum_{i=1}^{k} x_i. \end{gathered} \tag{П.5}$$

Таким образом, из утверждения (П.4) для k следует (П.5) и справедливость утверждения (П.4) для $k+1$. Следовательно, по принципу математической индукции приходим к выводу об эквивалентности неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1$$

неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \pm x_i \le 1,$$

что совпадает с (П.1).

Введем матрицу $A_k \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}$ по формуле

$$A_k := \left(b \middle| Ab \middle| \cdots \middle| A^{k-1} b\right).$$

Пусть

$$v_{i+1} := u(k-1-i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad v = (v_1, \dots, v_k)^{\mathrm{T}} \in t\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k} \subset \mathbb{R}^k. \tag{П.6}$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^i b u(k-1-i) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b v_{i+1} = A_k v.$$

Следовательно, получаем представление

$$\mathcal{Y}_t(k) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = A_k v,\ v \in t\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k} \right\} = tA_k \mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}.$$

В силу [12, теорема 19.3, Гл. IV, § 19] множество $\mathcal{Y}_t(k)$ – полиэдр как линейное отображение полиэдрального выпуклого множества.

(ii) Множество $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}$ есть по построению замкнутый единичный шар с центром 0 в метрическом пространстве $\mathbb{R}^k$ с метрикой l_1. Поэтому множество $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}$ замкнуто, ограничено и симметрично относительно 0 как соответствующий шар. Наконец, утверждения (ii) следуют из линейного представления

$$\mathcal{Y}_t(k) = tA_k\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}.$$

(iii) В силу теоремы Минковского–Вейля [8, Гл. 2, § 8, теорема 8.14] множество $\mathcal{Y}_t(k)$ есть выпуклый многогранник, поскольку оно является ограниченным полиэдром в силу (ii).

Справедливо равенство

$$\operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b) = \operatorname{conv}(0, \pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b),$$

и поэтому верно представление

$$\operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b) = \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b\lambda_{i+1} - \sum_{i=0}^{k-1} A^i b\mu_{i+1}, \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \le 1, \lambda_i, \mu_i \ge 0, i = \overline{1,k} \right\}. \tag{П.7}$$

Действительно, получаем

$$\operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b) = \operatorname{conv}(0, \pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b) = \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = 0 \cdot (\lambda_0 + \mu_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1}(-A^i b), \right. \\ \left. (\lambda_0 + \mu_0) + \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) = 1, \lambda_i, \mu_i \ge 0, i = \overline{0,k} \right\} = \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1}(-A^i b), \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) = 1 - (\lambda_0 + \mu_0), \lambda_i, \mu_i \ge 0, i = \overline{0,k} \right\} = \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1}(-A^i b), \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \le 1, \lambda_i, \mu_i \ge 0, i = \overline{1,k} \right\}.$$

Доказательства утверждения (iii) достаточно при $t = 1$, поэтому обозначим

$$\mathcal{Y}(k) := \mathcal{Y}_1(k).$$

Справедливо включение

$$\mathcal{Y}(k) \subset \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1}b). \tag{П.8}$$

Действительно, если

$$y \in \mathcal{Y}(k),$$

то

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b v_{i+1}, \quad \sum_{i=1}^{k} |v_i| \le 1. \tag{П.9}$$

Положим

$$\lambda_i = \max\{0, -v_i\}, \quad \mu_i = \max\{0, v_i\},$$

тогда

$$\lambda_i + \mu_i = |v_i|, \quad \lambda_i, \mu_i \ge 0, \quad \lambda_i \cdot \mu_i = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

Следовательно,

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b v_{i+1} = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} A^i b, \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \le 1, \quad \lambda_i, \mu_i \ge 0.$$

В силу (П.7) получаем

$$y \in \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1} b).$$

Теперь покажем, что верно обратное включение

$$\operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1} b) \subset \mathcal{Y}(k). \tag{П.10}$$

Действительно, пусть $y \in \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{k-1} b)$, тогда верно разложение

$$y = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} A^i b, \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \le 1, \quad \lambda_i, \mu_i \ge 0.$$

Положим

$$v_i = \mu_i - \lambda_i.$$

Тогда верно равенство

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} (\mu_{i+1} - \lambda_{i+1}) A^i b = \sum_{i=0}^{k-1} v_{i+1} A^i b,$$

и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{k} |v_i| = \sum_{i=1}^{k} |\mu_i - \lambda_i| = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i + \lambda_i) \le 1.$$

Это означает, что по определению

$$y \in \mathcal{Y}(k).$$

Из (П.8) и (П.10) вытекает требуемое утверждение (iii).

(iv) Так как по построению $\mathcal{Y}(k)$ – непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и $0 \in \mathcal{Y}_t(k)$, по утверждению (ii) из [8, Гл. 3, § 7, п. 7, теорема 7.14] следует, что $0 \in \operatorname{ri} \mathcal{Y}_t(k)$. По условию (1.3) имеем $\operatorname{aff} \mathcal{Y}_t(k) = \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{ri} \mathcal{Y}_t(k) = \operatorname{int} \mathcal{Y}_t(k)$, что доказывает требуемое.

Доказательства утверждений (v), (vi), (vii) очевидны.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу утверждения (iii) леммы имеем

$$\mathcal{Y}_t(n) = t \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^{n-1} b).$$

Тогда из (1.3) и леммы выводим, что множество $\mathcal{Y}_t(n)$ есть симметричное ограниченное выпуклое множество, для которого $0 \in \operatorname{int} \mathcal{Y}_t(n)$.

Построим последовательность векторов $\{A^k b\}_{k \in \mathbb{N}}$. Тогда найдется число $K \in \mathbb{N}$, такое, что

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(n) \quad \text{при} \quad k \ge K. \tag{П.11}$$

Действительно, по условию (1.4) имеем $\rho(A) < 1$, тогда [15, теорема 5.6.12] верно равенство

$$\lim_{k \to \infty} A^k = O.$$

Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} A^k b = 0,$$

$$\lim_{k \to \infty} \left\| A^k b \right\|_{\mathcal{Y}_t(n)} = 0.$$

По определению сходимости числовой последовательности $\left\{\left\|A^k b\right\|_{\mathcal{Y}_t(n)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ найдется натуральное K, такое, что

$$\left\|A^k b\right\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \le 1 \quad \text{при} \quad k \ge K.$$

Теперь из (3.3) и (3.4) получаем требуемое включение (П.11).

Для произвольных векторов $a^1,\ldots,a^m,c \in \mathbb{R}^n$, $m \ge 1$, справедливо равенство

$$\operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m,c\right\} = \operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\}, \tag{П.12}$$

если

$$c \in \operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\}. \tag{П.13}$$

Действительно, по определению выпуклой оболочки верно включение

$$\operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\} \subset \operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m,c\right\}.$$

С другой стороны, из (П.13) следует также цепочка включений

$$\operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m,c\right\} \subset \operatorname{conv}\left\{\operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\} \cup \operatorname{conv}\{c\}\right\} =$$
$$= \operatorname{conv}\left\{\operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\} \cup c\right\} = \operatorname{conv}\left\{\operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\}\right\} = \operatorname{conv}\left\{a^1,\ldots,a^m\right\}.$$

Окончательно приходим к равенству (П.12).

В силу (iii) леммы имеем при $k \ge K$

$$\mathcal{Y}_t(k) = t\operatorname{conv}\left(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^K b, \pm A^{K+1} b, \ldots, \pm A^k b\right) =$$
$$= t\operatorname{conv}\left(\pm b, \pm Ab, \ldots, \pm A^K b\right) = \mathcal{Y}_t(K),$$

поскольку

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(n) \subset \mathcal{Y}_t(K) \quad \text{при} \quad k \ge K.$$

Здесь используется равенство (П.12). Следовательно, в силу п. (v) леммы заключаем

$$\mathcal{Y}_t(n) \subset \cdots \subset \mathcal{Y}_t(K) = \mathcal{Y}_t(K+1) = \cdots,$$

что доказывает равенство (2.1).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АиТ. 2015. № 9. С. 3–30.
2. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
3. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем // Изв. АН. ТиСУ. 2002. № 4. С. 5–16.
4. *Formalsky A.M., Sirotin A.N.* On the Geometric Properties of Reachable and Controllable Sets for Linear Discrete Systems // J. Optimization Theory and Applications. 2004. V. 122. № 2. P. 17–44.
5. *Сиротин А.Н.* Точное аналитическое описание множеств достижимости асимптотически устойчивых линейных дискретных систем с ограниченным по l_1-норме скалярным управлением // Вестн. МАИ. 2008. Т. 15. № 2. С. 142–146.
6. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 447 с.
7. *Табак Д., Куо Б.* Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. 280 с.
8. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
9. *Половинкин У.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

10. *Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И.* Решение навигационной задачи при автономном выведении полезной нагрузки на геостационарную орбиту с помощью двигателя малой тяги // Изв. АН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 106–118.
11. *Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И.* Интегрированная навигационная система космического аппарата на геостационарной и высокоэллиптической орбитах, функционирующая в условиях активных помех // Изв. АН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 143–154.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.
13. *Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
14. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
15. *Хорн Р., Джонсон И.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 667 с.
16. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1983. 336 с.