ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 6, с. 77–84

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНОГО ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА

Ф. А. Алиев[a,b,*], Н. С. Гаджиева[a,], Г. Г. Маммадова[a], А. А. Намазов[a], М. С. Халилов[c]**

[a] *Институт прикладной математики, Бакинский государственный ун-т, Баку, Азербайджан*
[b] *Институт информционных технологий НАН Азербаайджана, Баку, Азербайджан*
[c] *Бакинский государственный ун-т, Баку, Азербайджан*
**e-mail: f_aliev@yahoo.com*
***e-mail: nazile.m@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.03.2022 г.
После доработки 12.04.2022 г.
Принята к публикации 30.05.2022 г.

Рассматривается усредненная по времени математическая модель дискретного газлифтного процесса. При первой итерации строится аналитическое выражение для газожидкостной смеси на конце подъемника с использованием малого параметра (малый параметр принимается как величина, обратная глубине скважины) и предполагается, что коэффициент гидравлического сопротивления имеет разные значения в двух разных частях подъемника. Для нахождения указанного коэффициента используется метод наименьших квадратов. Вводятся экспериментальные данные и минимизируется целевая функция, которая характеризует близость физических переменных, полученных из модели и из этих данных. Окончательный результат представлен в приводимом примере, и он совпадает с соответствующими величинами, найденными другими методами.

DOI: 10.31857/S000233882205002X

0. Введение. В системах управления широко применяется метод наименьших квадратов, когда ищутся параметры модели, и для этой цели используются экспериментальные данные [1, 2].

Как известно, в [3–10] разработаны разные алгоритмы, определены параметры образования газожидкостной смеси (ГЖС) на башмаке скважины и среднее значение коэффициента гидравлического сопротивления (КГС) [11] на подъемнике. Если считать значение КГС по всей длине скважины постоянным, то это ослабляет решение полученных результатов и требуется усилить постановку этих задач. Поэтому в [12, 13] приведены общие алгоритмы определения КГС на разных участках скважины, применяя методы наименьших квадратов [14–17] с использованием статистических данных из истории скважины [18, 19]. Однако реализация этого алгоритма [20, 21] затруднена из-за вычисления градиента соответствующей целевой функции для нахождения КГС на каждом участке. Как известно [22–25], расчет среднего значения КГС по всей длине скважины с помощью асимптотических методов позволяет получить аналитическое выражение для его вычислений в первом приближении по малому параметру μ.

В работе приводится метод определения КГС в двух частях скважины с дискретным временем. Применяется метод наименьших квадратов, который сводится к минимизации квадратичной целевой функции, и окончательно получается аналитическое выражение для КГС.

Известно, что движение газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике газлифтной скважины описываются следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений, правая часть которой включает в себя малый параметр [26, 27]:

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{2a_i\rho_i F_i Q_i^2}{c_i^2\rho_i^2 F_i^2\mu - Q_i^2}, & Q(0) = u, \\ \dot{P}_i = \dfrac{2a_i c_i^2\rho_i^2 F_i^2 Q_i^2}{c_i^2\rho_i^2 F_i^2\mu - Q_i^2}, & P(0) = P_0, \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{0.1}$$

где параметр a_i находится из выражения $2a_i = g_i/\omega_i + \lambda_i\omega_i/2D_i$, $i = 1, 2$. Здесь g_1, g_2 – ускорение выпуска, ω_1, ω_2 – скорость движения смеси, λ_1, λ_2 – коэффициенты гидравлического сопротивления, D_1, D_2 – эффективные диаметры, ρ_1, ρ_2 – плотности газа, F_1, F_2 представляют собой площади сечения M в кольцевом пространстве и в подъемнике соответственно, Q_i, $i = 1, 2$, – массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, c_1, c_2 – скорость звука в кольцевом пространстве и в подъемнике соответственно, μ – малый параметр (малый параметр принимается как величина, обратная глубине скважины – $1/l$, l – высота скважины), u – заданная величина, $P_i, i = 1, 2$, – давление газа и ГЖС, P_0 – заданная величина.

Отметим, что если первое уравнение системы (0.1) не зависит от решения второго, то ее можно решать отдельно методом разделения переменных. С помощью первого метода Эйлера первое уравнение системы (0.1) представляет собой цепочку из двух нелинейных рекуррентных формул:

$$Q(k+1) = Q(k) + h\frac{2a_1\rho_1F_1Q^2(k)}{c_1^2\rho_1^2F_1^2\mu - Q^2(k)}, \quad 0 \le k \le N-1, \quad Q(0) = u, \tag{0.2}$$

$$Q(k+1) = Q(k) + h\frac{2a_2\rho_2F_2Q^2(k)}{c_2^2\rho_2^2F_2^2\mu - Q^2(k)}, \quad N \le k \le 2N-1, \tag{0.3}$$

где $Q(k) = \rho_1\omega_1F_1$, $k = \overline{0, N}$, и $Q(k) = \rho_2\omega_2F_2$, $k = \overline{N+1, 2N}$, – объемы газа и ГЖС соответственно, h – шаг интегрирования.

1. Постановка задачи. Теперь разделим длину скважины газлифтного колодца l на две разные части (l_0, l_1) и (l_1, l_2). В этом случае уравнение движение ГЖС (0.2) в каждом интервале (l_0, l_1) и (l_1, l_2) описывается следующими нелинейными разностными уравнениями:

$$Q(k+1) = Q(k) + h\frac{2a_{2,i}\rho_2F_2Q^2(k)}{c_2^2\rho_2^2F_2^2\mu - Q^2(k)}, \quad N \le k \le 2N-1. \tag{1.1}$$

Здесь

$$2a_{2,i} = \frac{g_2}{\omega_2} + \frac{\lambda_{2,i}\omega_2}{2D_2}, \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

$\lambda_{2,i}$ – КГС в каждом интервале (l_0, l_1) и (l_1, l_2).

Пусть имеются n значений экспериментальных данных (т.е. измеряемые при наблюдении над объектом параметры модели):

$$Q^j(l_0) = \tilde{Q}_N^j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.3}$$

где n – число наблюдений. Требуется найти такие значения КГС $\lambda_{2,1}$ и $\lambda_{2,2}$ в каждом из интервалов (l_0, l_1) и (l_1, l_2), при которых в конце подъемника разность между решением $Q(l_2) = Q_{2N}$ уравнения (2.1) и значениями

$$Q^j(l_2) = \tilde{Q}_{2N}^j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

вычисленными с использованием начальных данных (1.3), будет минимальной.

Для решения задачи идентификации вводится следующая целевая функция:

$$I(a_{2,1}, a_{2,2}) = \sum_{j=1}^{n}[Q_{a_{2,1},\, a_{2,2}}^j(l_2) - \tilde{Q}_{2N}^j]^2 + \beta a_{2,1}^2 + \beta a_{2,2}^2 \to \min, \tag{1.5}$$

где два последних нетрадиционных для метода наименьших квадратов слагаемых есть штраф с коэффициентом $\beta > 0$ (параметр регуляризации Тихонова) за большие значения искомых параметров. Он обеспечивает невырожденность матрицы коэффициентов линейной системы уравнений – условий минимума функции (1.5).

2. Метод решения. Находим решение уравнения (1.1) в первом приближении в каждом интервале (l_0, l_1) и (l_1, l_2). Действительно, легко предположить, что в окрестности малого параметра $\mu = 0$ решение уравнения (2.1) порядка $O(\mu)$ линеаризуется по формуле Тейлора следующим образом:

$$\begin{gathered}Q(k+1) \approx \left.\left(Q(k) + h\frac{2a_{2,i}\rho_2 F_2 Q^2(k)}{c_2^2\rho_2^2F_2^2\mu - Q^2(k)}\right)\right|_{\mu=0} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left.\left(Q(k) + h\frac{2a_{2,i}\rho_2 F_2 Q^2(k)}{c_2^2\rho_2^2F_2^2\mu - Q^2(k)}\right)\right|_{\mu=0}\mu = \\ = Q(k) - 2ha_{2,i}\rho_2F_2 - h\frac{2a_{2,i}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{Q^2(k)}\mu, \quad i = 1,2.\end{gathered} \tag{2.1}$$

В первом приближении необходимо из решения (2.1) вычислить $Q^j(l_2)$ и, учитывая это значение в целевой функции (1.4), можно рассчитать градиент этой целевой функции. Далее, приравняв к нулю этот градиент, вычисляем параметры $a_{2,1}, a_{2,2}$ в интервалах (l_0, l_1) и (l_1, l_2). Для этого сначала в точке l_1 находим $Q(l_1)$ из (2.1):

$$Q(l_1) = Q(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - l_1\frac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{Q^2(l_0)}\mu, \quad l_1 = 10h. \tag{2.2}$$

В точке l_2 из (2.1) нопределяем $Q(l_2)$ и в окрестности параметра $\mu = 0$ линеаризуем его с порядком $O(\mu)$:

$$\begin{gathered}Q(l_2) = Q(l_1) - 2l_2a_{2,2}\rho_2F_2 - l_2\frac{2a_{2,2}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{Q^2(l_1)}\mu \approx Q(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - \\ - l_1\frac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{Q^2(l_0)}\mu - 2l_2a_{2,2}\rho_2F_2 - l_2\frac{2a_{2,2}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{\left[Q(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - l_1\dfrac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{Q^2(l_0)}\mu\right]^2}\mu = \\ = Q(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - l_1\frac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{Q^2(l_0)}\mu - 2l_2a_{2,2}\rho_2F_2 - \frac{2a_{2,2}c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2]^2}\mu, \quad l_2 = 20h.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Если для $Q(l_2)$ учесть асимптотическое разложение (2.3) в целевой функции (1.4) и раскрыть квадратичное выражение, отбросив члены, содержащие множитель μ^2, то в первом приближении для целевой функции I получим асимптотическое выражение относительно малого параметра μ:

$$\begin{gathered}I(a_{2,1}, a_{2,2}) = \sum_{j=1}^{n}\Bigg\{[Q^j(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - 2l_2a_{2,2}\rho_2F_2 - \tilde{Q}_2^j]^2 - \\ - 2[Q^j(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - 2l_2a_{2,2}\rho_2F_2 - \tilde{Q}_2^j]\left[l_1\frac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{2,2}c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2]^2}\right]\mu\Bigg\} + \beta a_{2,1}^2 + \beta a_{2,2}^2.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Теперь можно вычислить градиент целевой функции (2.4):

$$\frac{\partial I(a_{2,1}, a_{2,2})}{\partial a_{2,1}} = A_1(a_{2,1}, a_{2,2}) + \mu B_1(a_{2,1}, a_{2,2}), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial I(a_{2,1}, a_{2,2})}{\partial a_{2,2}} = A_2(a_{2,1}, a_{2,2}) + \mu B_2(a_{2,1}, a_{2,2}), \tag{2.6}$$

где

$$A_1(a_{2,1}, a_{2,2}) = \sum_{j=1}^{n}\{2[Q^j(l_0) - 2l_1a_{2,1}\rho_2F_2 - 2l_2a_{2,2}\rho_2F_2 - \tilde{Q}_2^j](-2l_1\rho_2F_2)\} + 2\beta a_{2,1},$$

$$B_1(a_{2,1},a_{2,2})=\sum_{j=1}^{n}\left\{4l_1\rho_2F_2\left[\frac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3l_1}{(Q^j(l_0))^2}+\frac{2a_{2,2}c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2]^2}\right]-\right.$$
$$\left.-2[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2-2l_2a_{2,2}\rho_2F_2-\tilde{Q}_2^j]\left[\frac{2c_2^2\rho_2^3F_2^3l_1}{(Q^j(l_0))^2}+\frac{4a_{2,2}c_2^2\rho_2^4F_2^4l_2l_1}{[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2]^3}\right]\right\},$$

$$A_2(a_{2,1},a_{2,2})=\sum_{j=1}^{n}\{2[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2-2l_2a_{2,2}\rho_2F_2-\tilde{Q}_2^j](-2l_2\rho_2F_2)\}+2\beta a_{2,2},$$

$$B_2(a_{2,1},a_{2,2})=\sum_{j=1}^{n}\left\{4l_2\rho_2F_2\left[\frac{2a_{2,1}c_2^2\rho_2^3F_2^3l_1}{(Q^j(l_0))^2}+\frac{2a_{2,2}c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2]^2}\right]-\right.$$
$$\left.-2[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2-2l_2a_{2,2}\rho_2F_2-\tilde{Q}_2^j]\frac{2c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}\rho_2F_2]^2}\right\}.$$

Чтобы найти параметры $a_{2,1},a_{2,2}$, приравняем выражения (2.5) и (2.6) к нулю и получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial I(a_{2,1},\ a_{2,2})}{\partial a_{2,1}}=A_1(a_{2,1},a_{2,2})+\mu B_1(a_{2,1},a_{2,2})=0\\[2mm] \dfrac{\partial I(a_{2,1},\ a_{2,2})}{\partial a_{2,2}}=A_2(a_{2,1},a_{2,2})+\mu B_2(a_{2,1},a_{2,2})=0.\end{cases}\tag{2.7}$$

Введем разложение параметров $a_{2,1},a_{2,2}$ по степеням малого параметра следующим образом [28]:

$$a_{2,1}=a_{2,1}^0+\mu a_{2,1}^1+\ldots,\quad a_{2,2}=a_{2,2}^0+\mu a_{2,2}^1+\ldots\tag{2.8}$$

Теперь примем во внимание разложение (2.8) в выражениях $A_1(a_{2,1},a_{2,2})$, $A_2(a_{2,1},a_{2,2})$:

$$A_1(a_{21}^0,a_{22}^0,a_{21}^1,a_{22}^1)=A_1^0(a_{2,1}^0,a_{2,2}^0)+\mu A_1^1(a_{2,1}^1,a_{2,2}^1),\tag{2.9}$$

$$A_2(a_{21}^0,a_{22}^0,a_{21}^1,a_{22}^1)=A_2^0(a_{2,1}^0,a_{2,2}^0)+\mu A_2^1(a_{2,1}^1,a_{2,2}^1),\tag{2.10}$$

где

$$A_1^0(a_{2,1}^0,a_{2,2}^0)=\sum_{j=1}^{n}\{[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}^0\rho_2F_2-2l_2a_{2,2}^0\rho_2F_2-\tilde{Q}_2^j](-4l_1\rho_2F_2)\}+2\beta a_{2,1}^0,$$

$$A_1^1(a_{2,1}^1,a_{2,2}^1)=8nl_1^2\rho_2^2F_2^2a_{2,1}^1+8nl_1l_2\rho_2^2F_2^2a_{2,2}^1+2\beta a_{2,1}^1,$$

$$A_2^0(a_{2,1}^0,a_{2,2}^0)=\sum_{j=1}^{n}\{[Q^j(l_0)-2l_1a_{2,1}^0\rho_2F_2-2l_2a_{2,2}^0\rho_2F_2-\tilde{Q}_2^j](-4l_2\rho_2F_2)\}+2\beta a_{2,2}^0,$$

$$A_2^1(a_{2,1}^1,a_{2,2}^1)=8nl_1l_2\rho_2^2F_2^2a_{2,1}^1+8nl_2^2\rho_2^2F_2^2a_{2,2}^1+2\beta a_{2,2}^1.$$

Далее, учитывая разложение (2.8) в выражении $B_1(a_{2,1},a_{2,2})$, запишем

$$B_1(a_{21}^0,a_{22}^0,a_{21}^1,a_{22}^1)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{8l_1^2a_{21}^0c_2^2\rho_2^4F_2^4}{(Q^j(l_0))^2}+\frac{8l_1^2a_{21}^1c_2^2\rho_2^4F_2^4}{(Q^j(l_0))^2}\mu+\frac{2a_{22}^0c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q^j(l_0)-2l_1(a_{21}^0+\mu a_{21}^1)\rho_2F_2]^2}+\right.$$
$$+\frac{2a_{22}^1c_2^2\rho_2^3F_2^3l_2}{[Q^j(l_0)-2l_1(a_{21}^0+\mu a_{21}^1)\rho_2F_2]^2}\mu-2[Q^j(l_0)-2l_1(a_{21}^0+\mu a_{21}^1)\rho_2F_2-2l_2(a_{22}^0+\mu a_{22}^1)\rho_2F_2-\tilde{Q}_2^j]\times$$
$$\left.\times\left[\frac{2c_2^2\rho_2^3F_2^3l_1}{(Q^j(l_0))^2}+\frac{4a_{22}^0c_2^2\rho_2^4F_2^4l_2l_1}{[Q^j(l_0)-2l_1(a_{21}^0+\mu a_{21}^1)\rho_2F_2]^3}+\frac{4a_{22}^1c_2^2\rho_2^4F_2^4l_2l_1}{[Q^j(l_0)-2l_1(a_{21}^0+\mu a_{21}^1)\rho_2F_2]^3}\mu\right]\right\}.$$

Если третий, четвертый и пятый члены последнего выражения в окрестности параметра $\mu = 0$ линеаризовать и отбросить все члены, содержащие множитель μ^2, получим

$$B_1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) = B_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) + \mu B_1^1(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^1). \tag{2.11}$$

Здесь

$$B_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{8l_1^2 a_{21}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} -$$
$$- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \left[\frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{4a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3}\right]\Bigg\},$$

$$B_1^1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) = \sum_{j=1}^{n} \left\{\frac{8l_1^2 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{8a_{22}^0 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_1 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} + \right.$$
$$+ \frac{2a_{22}^1 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \times$$
$$\times \left[\frac{24 a_{22}^0 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^5 F_2^5 l_2 l_1^2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^4} + \frac{4a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3}\right] +$$
$$\left. + 4[l_1 a_{21}^1 \rho_2 F_2 \mu + l_2 a_{22}^1 \rho_2 F_2] \left[\frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{4a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3}\right]\right\}.$$

Теперь примем во внимание разложение (2.8) в выражении $B_2(a_{2,1}, a_{2,2})$:

$$B_2(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) = \sum_{j=1}^{n} \left\{4l_2 \rho_2 F_2 \left[\frac{2(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1) c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2(a_{22}^0 + \mu a_{22}^1) c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1)\rho_2 F_2]^2}\right] - \right.$$
$$\left. - 2[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1)\rho_2 F_2 - 2l_2(a_{22}^0 + \mu a_{22}^1)\rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1)\rho_2 F_2]^2}\right\}.$$

Здесь также второй множитель последнего выражения линеаризуем в окрестности параметра $\mu = 0$ и отбрасываем все члены, содержащие множитель μ^2:

$$B_2(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) = B_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) + \mu B_2^1(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^1), \tag{2.12}$$

где

$$B_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = \sum_{j=1}^{n} \left\{\frac{8l_1 l_2 a_{21}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - \right.$$
$$\left. - 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2}\right\},$$

$$B_2^1(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) = \sum_{j=1}^{n} \left\{\frac{8l_1 l_2 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{8a_{22}^0 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_1 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} + \frac{2a_{22}^1 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - \right.$$
$$- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \frac{8a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} +$$
$$\left. + 4[l_1 a_{21}^1 \rho_2 F_2 + l_2 a_{22}^1 \rho_2 F_2 \mu] \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2}\right\}.$$

Таким образом, если учитывать соотношения (2.9)–(2.12) в системе нелинейных алгебраических уравнений (2.7) и отбросить все члены, содержащие множитель μ^2, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров $a_{2,1}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^0, a_{2,2}^1$:

$$\begin{cases} A_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) + \mu(A_1^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) + B_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0)) = 0, \\ A_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) + \mu(A_2^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) + B_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0)) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Отсюда если уравнение (2.7) для любого μ верно, то из (2.13) следует

$$\begin{cases} A_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0, \\ A_1^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) + B_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0) = 0, \\ A_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0, \\ A_2^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) + B_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Для нахождения параметров $a_{2,1}^0$, $a_{2,2}^0$ из первого и третьего уравнений системы (2.14) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \left(4l_1\rho_2F_2 + \dfrac{\beta}{nl_1\rho_2F_2}\right) & 4l_2\rho_2F_2 \\ 4l_1\rho_2F_2 & \left(4l_2\rho_2F_2 + \dfrac{\beta}{nl_2\rho_2F_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,1}^0 \\ a_{2,2}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[Q^j(l_0) - \tilde{Q}_2^j] \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[Q^j(l_0) - \tilde{Q}_2^j] \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Для определения параметров $a_{2,1}^1, a_{2,2}^1$ из второго и четвертого уравнений системы (2.14) запишем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} -(8nl_1^2\rho_2^2F_2^2 + 2\beta) & -8nl_1l_2\rho_2^2F_2^2 \\ -8nl_1l_2\rho_2^2F_2^2 & -(8nl_2^2\rho_2^2F_2^2 + 2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,1}^1 \\ a_{2,2}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0) \\ B_2^0(a_{21}^0, a_{22}^0) \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Таким образом, параметры $a_{2,1}^0, a_{2,2}^0$ находятся путем решения уравнения (2.15), параметры $a_{2,1}^1, a_{2,2}^1$ – путем подстановки этих значений в правую часть уравнения (2.16), параметры $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ – с помощью (2.8) находятся в первом приближении по малому параметру μ. Отсюда из соотношения (1.2) можно легко определить коэффициенты гидравлического сопротивления $\lambda_{2,1}$, $\lambda_{2,2}$.

3. Пример. Остановимся на реализации предложенного метода на примере из [18, 22]. Пусть параметры выражений (0.2)–(0.3) и целевой функции (1.5) имеют следующий вид:

$$c_1 = 331 \text{ m/s}, \quad \rho_1 = 0.717 \text{ kg/m}^3 \quad D_1 = \sqrt{114^2 - 73^2} \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$c_2 = 850 \text{ m/s}, \quad \rho_2 = 700 \text{ kg/m}^3, \quad D_2 = 0.073 \text{ m},$$

$$N = 11, \quad h = 0.1, \quad u = 0.21, \quad n = 5, \quad \beta = 0.1.$$

Тогда уравнение движения газа и ГЖС внутри подъемника в газлифтном процессе описывается как

$$Q(k+1) = Q(k) + h\frac{(8.7080\text{e-}004)Q^2(k)}{(2.0423\text{e-}010) - Q^2(k)}, \quad 0 \le k \le N - 1,$$

$$Q(k+1) = Q(k) + h\frac{0.2993Q^2(k)}{(1.2656\text{e-}017) - Q^2(k)}, \quad N \le k \le 2N - 1.$$

Применяя статистические данные в виде

$$\tilde{Q}_{2N}^1 = 1.8873, \quad \tilde{Q}_{2N}^2 = 1.9626, \quad \tilde{Q}_{2N}^3 = 2.3764, \quad \tilde{Q}_{2N}^4 = 2.4298, \quad \tilde{Q}_{2N}^5 = 2.7317,$$

составим целевую функцию (1.5) и после этого из (2.15), (2.16) получим, что

$$a_{2,1}^0 = 8.2229 \times 10^5, \quad a_{2,1}^1 = -6.7272 \times 10^{-4}, \quad a_{2,1} = 8.2229 \times 10^5,$$

$$a_{2,2}^0 = 0, \quad a_{2,2}^1 = 6.6580 \times 10^{-10}, \quad a_{2,2} = 6.6580 \times 10^{-10}.$$

КГС в каждом из интервалов (l_0, l_1) и (l_1, l_2) имеет вид

$$\lambda_{2,1} = \frac{D_2}{\omega_2}\left(2a_{2,1} + \frac{g}{\omega_2}\right) = 0.2646, \quad \lambda_{2,2} = \frac{D_2}{\omega_2}\left(2a_{2,2} + \frac{g}{\omega_2}\right) = 3.4752 \times 10^{-12}.$$

Заключение. Таким образом, для глубокой скважины вводится малый параметр, являющийся обратным значением высоты, представляется асимптотический метод определения КГС в первом приближении. Для определения однозначности КГС вводится параметр регуляризации Тихонова, при котором результаты на примере близки к точному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дейч А.М.* Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979.
2. *Эйксхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1979.
3. *Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.A.* Algorithm to Determine the Optimal Solution of a Boundary Control Problem // Automation and Remote Control. 2015. V. 76. № 4. P. 627–633.
4. *Aliev F.A., Ismailov N.A.* İnverse Problem to Determine the Hydraulic Resistance Coefficient in the Gaslift Process // Appl. Comput. Math. 2013. V. 12. № 3. P. 306–313.
5. *Aliev F.A., Mutallimov M.M., Askerov I.M., Raguimov I.S.* Asymptotic Method of Solution of Optimal Gas-Lift Process Modes // Mathematical Problemsi n Engineering. 2010. V. 2010. 10 p. ID 191053.
6. *Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A.* Asymptotic Method for Finding the Coefficient of Hydraulic Resistance in Lifting of Fluid on Tubing // J. Inverse and İLL-Posed Problems. 2015. V. 5. P. 511–518.
7. *Исмайлов Н.А., Мухтарова Н.С.* Метод решения дискретной задачи оптимизации с граничным управлением // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2013. V. 2. № 1. P. 20–27.
8. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Мамедова Е.В., Мухтарова Н.С.* Вычислительный алгоритм решения задачи оптимального граничного управления с неразделенными краевыми условиями // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 5. С. 22–33.
9. *Sevdimaliyev Y.M., Akbarov S.D., Guliyev H.H., Yahnioglu N.* On the Natural Oscillation of an Inhomogeneously Pre-Stressed Multilayered Hollow Sphere Filled With a Compressible Fluid // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 1. P. 132–146.
10. *Gao X.-Y., Guo Y.-J., Shan W.-R.* Similarity Reductions for a (3 + 1)-Dimensional Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation in Nonlinear Optics, Fluid Mechanics and Plasma Physics // Applied and Computational Mathematics. 2021. V. 20. № 3. P. 421–429.
11. *Альтшуль А.Д.* Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1982. 224 с.
12. *Aliev F.A., Ismailov N.A., Haciyev H., Guliev M.F.* A Method of Determine the Coefficient of Hydraulic Resistance in Different Areas of PumpCompressor Pipes // TWMS J. Pure and Appl. Math. 2016. V. 7. № 2. P. 211–217.
13. *Исмаилов Н.А.* Метод определения коэффициента гидравлического сопротивления на разных участках насосно-компрессорных труб // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2016. V. 5. № 1. P. 133–141.
14. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.* Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае // Докл. НАН Азербайджана. 2010. Т. 46. № 6. С. 6–14.
15. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.* Об одном методе линеаризации для нелинейных систем // Мехатроника автоматизазия, управление. 2012. Т. 135. № 6. С. 2–6.
16. *Rasheed Al-Salih, Martin Bohner.* Quadratic Programming Problems on Time Scales // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 2. P. 205–219.
17. *Aliev Fikret A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A.* Algorithm for Solving the Identification Problem for Determining the Fractional-Order Derivative of an Oscillatory System // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 3. P. 415–422.
18. *Davis J.C., Sampson R.J.* Statistics and Data Analysis in Geology. N.Y., 2002. 656 p.
19. *Safarova N.A., Mukhtarova N.S., Ismailov N.A.* Algorithm Defining the Hydraulic Resistance Coefficient by Lines Method in Gas-Lift Process // Miskolc Mathematical Notes. 2017. V. 18. № 2. P. 771–777.
20. *Nachaoui M., Chakib A., Nachaoui A.* An Efficient Evolutionary Algorithm for a Shape Optimization Problem Volume // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 2. P. 220–244.
21. *Qalandarov A.A., Khaldjigitov A.A.* Mathematical and Numerical Modeling of the Coupled Dynamic Thermoelastic Problems for Isotropic Bodies // TWMS J. Pure Appl. Math. 2020. V. 11. № 1. P. 119–126.
22. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Намазов А.А., Раджабов М.Ф.* Асимптотический метод решения задачи идентификации для нелинейных динамических систем // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2016. V. 5. № 1. P. 84–97.
23. *Гаджиева Н.С., Намазов А.А., Аскеров И.М., Магаррамов И.А.* Алгоритм решения задачи идентификации для определения параметров дискретных динамических систем // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2016. V. 5. № 2. P. 235–244.

24. *Hajiyeva N.S.* An Asymptotical Method for Determining the Coefficient of Hydraulic Resistance in Gas-Lift Process by the Lines Method // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2019. V. 8. № 2. P. 187–195.

25. *Iskenderov N.Sh., Allahverdiyeva S.I.* An Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation with Nonlocal Integral Condition // TWMS J. Pure Appl. Math. 2020. V. 11. № 2. P. 226–237.

26. *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.* Моделирование работы газлифтной скважины // Докл. НАНА. 2008. № 4. С. 107–116.

27. *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б.* Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикл. механика. 2010. Т. 46. № 6. С. 113–122.

28. *Mitropolskiy Y.A., Samoylenko V.Hr., Matarazzo G.* On Asymptotic Solutions to Delay Differential Equation with Slowly Varying Coefficients // Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications. 2003. V. 52. № 3. P. 971–988.