ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 6, с. 103–111

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.854.33

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ СТРЕЛЬБЕ[1]

© 2022 г. Н. В. Антипова[a], Л. Ванг[b,c], А. П. Тизик[d], В. И. Цурков[a,*]

[a] Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

[b] Математический факультет, Нанкинский ун-т аэронавтики и космонавтики, Нанкин, КНР

[c] Лаборатория математического моделирования и высокопроизводительных расчетов авиатранспортных средств, Нанкин, КНР

[d] Центральный научно-исследовательский ин-т связи, Москва, Россия

*e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.
После доработки 06.07.2022 г.
Принята к публикации 01.08.2022 г.

Метод последовательной модификации коэффициентов целевой функции распространяется на трехиндексные задачи об эффективной стрельбе. На каждом шаге итеративного процесса решаются задачи с тремя ограничениями и одной связывающей переменной. Рассматривается вырождение из-за неединственности решения упомянутых промежуточных задач. Дается процедура снятия вырождения. Окончательный алгоритм строит точное решение исходной задачи булевого программирования.

DOI: 10.31857/S0002338822060026

Введение. В [1] упоминается о постановках задач об эффективной стрельбе и их связи с классическими задачами транспортного типа. Другие транспортные постановки, близкие к ним, представлены в [2–4]. В [5] предлагается метод последовательной модификации коэффициентов целевых функций для линейных задач транспортного типа. Он является альтернативным для известного симплекс-метода и его модификаций. Для двухиндексной задачи в отличие от последовательного изменения допустимых решений или двойственных переменных здесь итеративно пересчитываются коэффициенты целевой функции. Строится монотонный по целевой функции процесс, который окончательно приводит к оптимуму, хотя последовательные решения (так называемые псевдорешения) не допустимы к исходным ограничениям. Особым местом является так называемое вырождение, когда из промежуточных задач невозможно сформировать исходный оптимум. Это преодолевается для каждого конкретного случая по-разному, иногда довольно сложными процедурами.

В работе рассматриваемый подход применяется для трехиндексной задачи об эффективной стрельбе. Имеется некоторое количество батарей, целей и различного вида снарядов. Каждая батарея делает несколько выстрелов разными снарядами и по разным целям. Общее количество выстрелов всех батарей равно количеству целей, умноженному на количество различных снарядов. Для выстрела по каждой цели каждым видом снарядов у каждой батареи имеется коэффициент эффективности стрельбы. Задача состоит в том, чтобы определить такой план стрельбы, при котором достигается максимум суммы эффективностей.

1. Постановка задачи. Имеется m батарей, n целей, l видов снарядов. Задана трехмерная матрица d_{jik} размера $m \times n \times l$. Ее элементы – *коэффициенты эффективности* выстрела из i-й батареи по j-й цели k-м видом снарядов являются неотрицательными числами:

$$d_{jik} \geq 0.$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-53019) и Государственного фонда естественных наук Китая (гранты № 11971231; 1211153001).

Будем искать трехмерную матрицу плана стрельбы, элементы которой x_{ijk} принимают значение единица, если производится выстрел из i-й батареи по j-й цели k-м видом снарядов, и 0, если такого выстрела не производится:

$$x_{ijk} \in \{0,1\}.$$

Ограничения задачи об эффективной стрельбе записываются так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = a_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,k}, \tag{1.1}$$

где a_{ij} – количество k-го вида снарядов, выпускаемых i-й батареей по всем n целям. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,l}, \tag{1.2}$$

где b_{jk} – количество k-го вида снарядов, выпускаемых по j-й цели всеми m батареями. Наконец,

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ijk} = c_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

где c_{ij} – общее количество выстрелов i-й батареи по j-й цели всеми видами снарядов.

В каждую из n целей должно быть выпущено по одному снаряду каждого из l видов снарядов. Таким образом, условия баланса имеют вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} b_{jk} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = nl. \tag{1.4}$$

Необходимо максимизировать суммарную эффективность всех nl выстрелов:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} d_{ijk} x_{ijk} \to \max \tag{1.5}$$

при ограничениях (1.1)–(1.4).

Задача (1.1)–(1.5) является линейной оптимизационной задачей с булевыми переменными и относится к трехиндексным планарным задачам. Она считается NP-трудной.

2. Метод решения задачи. Для начала решим $ml + nl + mn$ задач с одним ограничением каждая. Первые ml задач

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ijk} x_{ijk} \to \max \tag{2.1}$$

при ограничениях (1.1). Вторые nl задач

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ijk} x_{ijk} \to \max \tag{2.2}$$

при ограничениях (1.2). Третьи mn задач

$$\sum_{k=1}^{l} d_{ijk} x_{ijk} \to \max \tag{2.3}$$

при ограничениях (1.3). Здесь и далее предполагаем, что условия баланса (1.4) соблюдены при составлении задачи. Все $ml + nl + mn$ задач легко решаются простым нахождением наибольших d_{ijk} в количестве, равном правым частям оганичений (2.1)–(2.3).

Если в результате решения вышеупомянутых $ml + nl + mn$ задач значения переменных удовлетворяют ограничениям (1.1)–(1.3), то тем самым решена исходная задача (1.3)–(1.5). Сумма значений целевых функций в оптимальных решениях задач (2.1)–(2.3), деленная на три, будет значением целевой функции в оптимальном решении задачи (1.1)–(1.5). В противном случае будем говорить, что получено первое псевдорешение этой задачи. Заметим, что значение целевой функции первого псевдорешения не меньше значения целевой функции искомого оптимального решения исходной задачи. Построим последовательность псевдорешений с монотонно убывающими значениями целевых функций.

Для получения второго псевдорешения решим следующую задачу с тремя ограничениями:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j1} = a_{11}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i11} = b_{11}, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{11k} = c_{11}, \tag{2.6}$$

$$d_{111}x_{111} + \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{3}d_{1j1}x_{1j1} + \sum_{i=2}^{m}\frac{1}{3}d_{i11}x_{i11} + \sum_{k=2}^{l}\frac{1}{3}d_{11k}x_{11k} \to \max. \tag{2.7}$$

В этой задаче x_{111} – единственная общая переменная в ограничениях (2.4)–(2.6). Очевидно, что в оптимальное решение задачи (2.4)–(2.7) со значением единица войдут $a_{11} - 1$ переменных из (2.4) с наибольшими коэффициентами в целевой функции (2.7), соответственно $b_{11} - 1$ переменных из ограничения (2.5) и $c_{11} - 1$ переменных из (2.6). Выберем в целевой функции (2.7) все переменные, входящие в ограничение (2.4), кроме общей переменной, отсортируем по убыванию коэффициенты целевой функции при этих переменных и возьмем коэффициент с номером, равным a_{11}. Этот коэффициент обозначим M_1. Аналогично через M_2 обозначим b_{11}-й коэффициент целевой функции среди переменных, входящих в ограничение (2.5) без общей переменной, а через M_3 – c_{11}-й коэффициент в целевой функции среди переменных, входящих в (2.6) без общей переменной. Могут иметь место три случая:

$$d_{111} < M_1 + M_2 + M_3, \tag{2.8}$$

$$d_{111} = M_1 + M_2 + M_3, \tag{2.9}$$

$$d_{111} > M_1 + M_2 + M_3. \tag{2.10}$$

В первом случае (2.8), в оптимальное решение задачи (2.4)–(2.7) войдут дополнительно переменная из (2.4) с коэффициентом M_1 в целевой функции, переменная из (2.5) с коэффициентом M_2 в целевой функции и переменная из (2.6) с коэффициентом M_3 в целевой функции.

Во втором случае (2.9) у задачи (2.4)–(2.7), очевидно, более чем одно оптимальное решение, а значит, имеет место вырождение.

В третьем случае (2.10) к безусловно вошедшим в решение переменным добавляется переменная x_{111}.

Решив задачу (2.4)–(2.7), преобразуем ее, сохраняя оптимальное решение, в три независимые задачи, каждая из которых имеет одно из ограничений (2.4)–(2.6). Для этого в первом случае, переписав условие (2.8) как равенство

$$d_{111} = M_1 + M_2 + M_3 - \delta, \quad \delta > 0,$$

представим целевые функции трех задач с одним из ограничений (2.4)–(2.6) соответственно как

$$\left(M_1 - \frac{\delta}{3}\right)x_{111} + \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{3}d_{1j1}x_{1j1} \to \max, \tag{2.11}$$

$$\left(M_2 - \frac{\delta}{3}\right)x_{111} + \sum_{i=2}^{m}\frac{1}{3}d_{11k}x_{11k} \to \max, \tag{2.12}$$

$$\left(M_3 - \frac{\delta}{3}\right)x_{111} + \sum_{k=2}^{l}\frac{1}{3}d_{1j1}x_{1j1} \to \max. \tag{2.13}$$

Во втором случае условие (2.9) уже является равенством и коэффициенты целевых функций (2.11)–(2.13) при x_{111} равны M_1, M_2, M_3.

Таблица 1. Коэффициенты эффективности стрельбы первой батареи двумя видами снарядов по трем целям

Вид снаряда	Номер цели		
	1	2	3
1	3	6	11
2	4	9	12

В третьем случае, преобразовав условие (2.10) в равенство

$$d_{111} = M_1 + M_2 + M_3 + \gamma, \quad \gamma > 0,$$

коэффициенты в целевых функциях (2.11)–(2.13) при x_{111} запишем как $M_1 + \gamma/3$, $M_2 + \gamma/3$ и $M_3 + \gamma/3$.

В итоге получаем второе псевдорешение с уменьшенным значением целевой функции. Заметим, что значение целевой функции каждого псевдорешения не меньше, чем значение целевой функции в искомом оптимальном решении исходной задачи (1.1)–(1.5). Решая циклически все mnl задач с тремя ограничениями, строим последовательность псевдорешений с монотонно убывающей целевой функцией, ограниченной снизу значением целевой функции в оптимальном решении исходной задачи (1.1)–(1.5).

3. Вырождение. Заметим, что если в предельном состоянии итерационного процесса при решении произвольной задачи с тремя ограничениями некоторая не общая переменная участвует в вырождении, то она участвует в вырождении и в той задаче, где эта переменная является общей. И наоборот, участие в вырождении какой-то общей переменной влечет за собой ее участие в вырождении в качестве не общей переменной. Другими словами, в предельном состоянии множество переменных, участвующих в вырождении в каждом ограничении, определено однозначно. Отсюда следует, что после того, как заданы переменные, безусловно входящие в решение, для получения допустимого, а следовательно, оптимального решения, достаточно последовательно дополнить решение из числа переменных, входящих в вырождение.

4. Пример. Имеются две батареи, три цели и два вида снарядов. Коэффициенты эффективности стрельбы первой и второй батарей даны в табл. 1 и 2 соответственно. Ограничения этой задачи запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}
x_{111} + x_{121} + x_{131} = 2,\\
x_{112} + x_{122} + x_{132} = 1,\\
x_{211} + x_{221} + x_{231} = 1,\\
x_{212} + x_{222} + x_{232} = 2,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
x_{111} + x_{211} = 1,\\
x_{121} + x_{221} = 1,\\
x_{131} + x_{231} = 1,\\
x_{112} + x_{212} = 1,\\
x_{122} + x_{222} = 1,\\
x_{132} + x_{232} = 1,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
x_{132} + x_{232} = 1,\\
x_{121} + x_{122} = 1,\\
x_{131} + x_{132} = 1,\\
x_{211} + x_{212} = 1,\\
x_{221} + x_{222} = 1,\\
x_{231} + x_{232} = 1.
\end{gathered}$$

Таблица 2. Коэффициенты эффективности стрельбы второй батареи двумя видами снарядов по трем целям

Вид снаряда	Номер цели		
	1	2	3
1	10	13	29
2	11	14	19

Целевая функция:

$$3x_{111}+6x_{121}+11x_{131}+4x_{112}+9x_{122}+12x_{132}+$$
$$+10x_{211}+13x_{221}+29x_{231}+11x_{212}+14x_{222}+19x_{232}\to\max.$$

Первый цикл. Первая задача:

$$x_{111}+x_{121}+x_{131}=2,$$
$$x_{111}+x_{211}=1,$$
$$x_{111}+x_{112}=1,$$
$$3x_{111}+2x_{121}+11/3x_{131}+4/3x_{112}+10/3x_{211}\to\max.$$

В этой задаче в первое ограничение кроме общей переменной входят x_{121} и x_{131}. Коэффициенты при них в целевой функции равны 2 и 11/3. Правая часть первого ограничения равна 2, второй по величине коэффициент равен 2, т.е. $M_1=2$. Во второе ограничение кроме общей переменной входит только x_{211} с коэффициентом 10/3. Правая часть второго ограничения равна 1, таким образом $M_2=10/3$. Аналогично $M_3=4/3$. Имеет место соотношение (2.8), отсюда решение первой задачи $x_{111}=0$, $x_{121}=x_{131}=x_{112}=x_{211}=1$. Целевые функции (2.11)–(2.13) задач с одним ограничением запишутся так:

$$x_{111}+2x_{121}+11/3x_{131}\to\max,$$
$$x_{111}+10/3x_{211}\to\max,$$
$$x_{111}+4/3x_{112}\to\max.$$

Коэффициенты здесь и далее округлены.

Вторая задача:

$$x_{111}+x_{121}+x_{131}=2,$$
$$x_{121}+x_{221}=1,$$
$$x_{121}+x_{122}=1,$$
$$x_{111}+6x_{121}+11/3x_{131}+3x_{122}+13/3x_{221}\to\max.$$

Ее решение: $x_{121}=0$, $x_{111}=x_{131}=x_{122}=x_{221}=1$. Целевые функции задач с одним ограничением следующие:

$$x_{111}+1/2x_{121}+11/3x_{131}\to\max,$$
$$7/2x_{121}+13/3x_{221}\to\max,$$
$$2x_{121}+3x_{122}\to\max.$$

Третья задача:

$$x_{111}+x_{121}+x_{131}=2,$$
$$x_{131}+x_{132}=1,$$
$$x_{131}+x_{231}=1,$$
$$x_{111}+1/2x_{121}+11x_{131}+4x_{132}+29/3x_{231}\to\max.$$

Ее решение: $x_{131} = 0$, $x_{111} = x_{121} = x_{132} = x_{231} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$x_{111} + 0.5x_{121} + 0.25x_{131} \to \max,$$
$$3.25x_{131} + 4x_{132} \to \max,$$
$$7.5x_{131} + 29/3x_{231} \to \max.$$

Четвертая задача:

$$x_{112} + x_{122} + x_{132} = 1,$$
$$x_{111} + x_{112} = 1,$$
$$x_{112} + x_{212} = 1,$$
$$x_{111} + 4x_{112} + 3x_{122} + 4x_{132} + 11/3x_{212} \to \max.$$

Ее решение: $x_{112} = x_{122} = 0$, $x_{111} = x_{132} = x_{212} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$2.25x_{112} + 3x_{122} + 4x_{132} \to \max,$$
$$x_{111} + 0.25x_{112} \to \max,$$
$$1.5x_{112} + 11/3x_{212} \to \max.$$

Пятая задача:

$$x_{112} + x_{122} + x_{132} = 1,$$
$$x_{121} + x_{122} = 1,$$
$$x_{122} + x_{222} = 1,$$
$$2.25x_{112} + 9x_{122} + 4x_{132} + 2x_{121} + 14/3x_{222} \to \max.$$

Ее решение: $x_{112} = x_{122} = 0$, $x_{132} = x_{121} = x_{222} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$2.25x_{112} + 3x_{122} + 4x_{132} \to \max,$$
$$2x_{121} + 1.5x_{122} \to \max,$$
$$4.5x_{122} + 14/3x_{222} \to \max.$$

Шестая задача:

$$x_{112} + x_{122} + x_{132} = 1,$$
$$x_{131} + x_{132} = 1,$$
$$x_{132} + x_{232} = 1,$$
$$2.25x_{112} + 3x_{122} + 12x_{132} + 3.25x_{131} + 19/3x_{232} \to \max.$$

Ее решение: $x_{112} = x_{132} = 0$, $x_{122} = x_{131} = x_{232} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$2.25x_{112} + 3x_{122} + 2.85x_{132} \to \max,$$
$$3.25x_{131} + 3x_{132} \to \max,$$
$$6.15x_{132} + 19/3x_{232} \to \max.$$

Седьмая задача:

$$x_{211} + x_{221} + x_{231} = 1,$$
$$x_{111} + x_{211} = 1,$$
$$x_{211} + x_{212} = 1,$$
$$10x_{211} + 13/3x_{221} + 29/3x_{231} + x_{111} + 11/3x_{212} \to \max.$$

Ее решение: $x_{211} = x_{221} = 0$, $x_{111} = x_{212} = x_{231} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$6.5x_{211} + 13/3x_{221} + 29/3x_{231} \to \max,$$
$$x_{111} + 0.5x_{211} \to \max,$$
$$3x_{211} + 11/3x_{212} \to \max.$$

Восьмая задача:

$$x_{211} + x_{221} + x_{231} = 1,$$
$$x_{121} + x_{221} = 1,$$
$$x_{221} + x_{222} = 1,$$
$$6.5x_{211} + 13x_{221} + 29/3x_{231} + 3.5x_{121} + 14/3x_{222} \to \max.$$

Ее решение: $x_{211} = x_{221} = 0$, $x_{121} = x_{231} = x_{222} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$6.5x_{211} + 9x_{221} + 29/3x_{231} \to \max,$$
$$3.5x_{121} + 2x_{221} \to \max,$$
$$2x_{221} + 14/3x_{222} \to \max.$$

Девятая задача:

$$x_{211} + x_{221} + x_{231} = 1,$$
$$x_{131} + x_{231} = 1,$$
$$x_{231} + x_{232} = 1,$$
$$6.5x_{211} + 9x_{221} + 29x_{231} + 7.5x_{131} + 19/3x_{232} \to \max.$$

Ее решение: $x_{231} = 1$, $x_{131} = x_{211} = x_{221} = x_{232} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$6.5x_{211} + 9x_{221} + 11x_{231} \to \max,$$
$$7.5x_{131} + 9x_{231} \to \max,$$
$$9x_{231} + 19/3x_{232} \to \max.$$

Десятая задача:

$$x_{212} + x_{222} + x_{232} = 2,$$
$$x_{112} + x_{212} = 1,$$
$$x_{211} + x_{212} = 1,$$
$$11x_{212} + 14/3x_{222} + 19/3x_{232} + 1.5x_{112} + 3x_{211} \to \max.$$

Ее решение: $x_{212} = x_{232} = 1$, $x_{112} = x_{211} = x_{222} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$5x_{212} + 14/3x_{222} + 19/3x_{232} \to \max,$$
$$1.5x_{112} + 2x_{212} \to \max,$$
$$3x_{211} + 4x_{212} \to \max.$$

Одиннадцатая задача:

$$x_{212} + x_{222} + x_{232} = 2,$$
$$x_{122} + x_{222} = 1,$$
$$x_{221} + x_{222} = 1,$$
$$5x_{212} + 14x_{222} + 19/3x_{232} + 4.5x_{122} + 2x_{221} \to \max.$$

Ее решение: $x_{222} = x_{232} = 1$, $x_{212} = x_{122} = x_{221} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$5x_{212} + 6.5x_{222} + 19/3x_{232} \to \max,$$
$$4.5x_{122} + 4.75x_{222} \to \max,$$
$$2x_{221} + 2.75x_{222} \to \max.$$

Двенадцатая задача:

$$x_{212} + x_{222} + x_{232} = 2,$$
$$x_{132} + x_{232} = 1,$$
$$x_{231} + x_{232} = 1,$$
$$5x_{212} + 6.5x_{222} + 19x_{232} + 6.15x_{132} + 9x_{231} \to \max.$$

Ее решение: $x_{212} = x_{222} = x_{132} = x_{231} = 1$, $x_{232} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$5x_{212} + 6.5x_{222} + 4.5x_{232} \to \max,$$
$$6.15x_{132} + 6.0x_{232} \to \max,$$
$$9x_{231} + 8.5x_{232} \to \max.$$

Первый цикл на этом окончен. Допустимое решение при этом еще не получено, так как, например, в шестой задаче $x_{132} = 0$, а в двенадцатой $x_{132} = 1$.

Второй цикл. Выпишем только целевые функции (2.11)–(2.13) для задач с одним ограничением после решения всех 12 задач с тремя ограничениями. После первой задачи имеем

$$x_{111} + 0.5x_{121} + 0.25x_{131} \to \max,$$
$$x_{111} + 0.5x_{211} \to \max,$$
$$x_{111} + 0.25x_{112} \to \max.$$

После второй задачи

$$x_{111} + x_{121} + 0.25x_{131} \to \max,$$
$$3x_{121} + 2x_{221} \to \max,$$
$$2x_{121} + 1.5x_{122} \to \max.$$

После третьей задачи

$$x_{111} + x_{121} + 0.5x_{131} \to \max,$$
$$2.5x_{131} + 3x_{132} \to \max,$$
$$8x_{131} + 9x_{231} \to \max.$$

После четвертой задачи

$$2.5x_{112} + 3x_{122} + 2.85x_{132} \to \max,$$
$$x_{111} + 0.5x_{112} \to \max,$$
$$x_{112} + 2x_{212} \to \max.$$

После пятой задачи

$$2.5x_{112} + 2.6x_{122} + 2.85x_{132} \to \max,$$
$$2x_{121} + 1.8x_{122} \to \max,$$
$$4.6x_{122} + 4.75x_{222} \to \max.$$

После шестой задачи

$$2.5x_{112} + 2.6x_{122} + 2.8x_{132} \to \max,$$
$$2.5x_{131} + 2.7x_{132} \to \max,$$
$$6.5x_{132} + 6.0x_{232} \to \max.$$

После седьмой задачи

$$7x_{211} + 9x_{221} + 11x_{231} \to \max,$$
$$x_{111} + 0.5x_{211} \to \max,$$
$$2.5x_{211} + 4x_{212} \to \max.$$

После восьмой задачи

$$7x_{211} + 7.85x_{221} + 11x_{231} \to \max,$$
$$3x_{121} + 2.95x_{221} \to \max,$$
$$2.2x_{221} + 2.75x_{222} \to \max.$$

После девятой задачи

$$7x_{211} + 7.85x_{221} + 9x_{231} \to \max,$$
$$8x_{131} + 8.5x_{231} \to \max,$$
$$11.5x_{231} + 8.5x_{232} \to \max.$$

После десятой задачи

$$5x_{212} + 6.5x_{222} + 4.5x_{232} \to \max,$$
$$x_{112} + 2x_{212} \to \max,$$
$$2.5x_{211} + 4x_{212} \to \max.$$

После одиннадцатой задачи

$$5x_{212} + 6x_{222} + 4.5x_{232} \to \max,$$
$$4.6x_{122} + 5x_{222} \to \max,$$
$$2.2x_{221} + 3x_{222} \to \max.$$

После двенадцатой задачи

$$5x_{212} + 6x_{222} + 4.5x_{232} \to \max,$$
$$6.1x_{132} + 4.5x_{232} \to \max,$$
$$11.5x_{231} + 10x_{232} \to \max.$$

И хотя предел еще не достигнут, уже получено допустимое, а следовательно, оптимальное решение:

$$x_{111} = x_{121} = x_{132} = x_{231} = x_{212} = x_{222} = 1.$$

Остальные переменные равны нулю. Значение целевой функции: $3 + 6 + 12 + 29 + 11 + 14 = 75$.

Заключение. Итак, представлено применение метода последовательной модификации *целевой функции* для трехиндексной задачи об эффективной стрельбе. Однако видно, что он дословно распространяется на случай четырех, пяти и так далее индексов. На каждом шаге решаются соответственно задачи с четырьмя, пятью и так далее ограничениями. Важно заметить, что вырождение снимается весьма просто, в отличие от классической транспортной задачи, где приходится дополнительно ставить оптимизационные задачи на сети [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
2. *Триус Е.Б.* Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1967.
3. *Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З.* Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложения // Кибернетика. 1981. № 4. С. 89–113.
4. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
5. *Тизик А.П., Цурков В.И.* Метод последовательной модификации функционала для решения транспортной задачи // АиТ. 2012. № 1. С. 148–158.