

УДК 517.997

ПРИБЛИЖЕННО-ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

© 2022 г. А. В. Данеев^{a,*}, В. Н. Сизых^{a,**}

^a Иркутский государственный ун-т путей сообщения, Иркутск, Россия

*e-mail: daneev@mail.ru

**e-mail: sizykh_vn@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2022 г.

После доработки 13.04.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Изложен новый подход к аналитическому конструированию линейных и нелинейных иерархических по контурам управления, многофункциональных систем автоматического управления реального (ускоренного) масштаба времени, базирующийся на совместном использовании технологий динамического программирования и метода квазилинеаризации. Для непрерывных динамических систем приведены основы теории нелинейного синтеза в формулировке, которая допускает формирование оптимальной, приближенно-оптимальной и субоптимальных стратегий управления относительно заранее неизвестной, но определяемой на малых длинах оптимизации вектор-функции оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0002338822060063

Введение. Управление — создание в каждый текущий момент времени целенаправленных воздействий на объект управления в зависимости от доступной информации о поведении объекта и действующих на него возмущений. В теории управления рассматриваются три принципа управления: 1) по разомкнутому контуру, 2) по замкнутому контуру, 3) в реальном или в ускоренном времени (времени, на которое прогнозируется движение объекта [1, 2]). При использовании первого принципа до начала процесса управления по априорной информации строится программа (программное управление), которая в процессе управления не корректируется. При втором принципе управления текущие управляющие воздействия (позиционные управления) создаются по заранее (до начала процесса управления) составленным правилам, определенным на всевозможной информации, которая может появиться о поведении объекта и действующих на него возмущений в процессе управления. Эти правила реализуются в форме прямых, обратных и комбинированных связей. При использовании третьего принципа управления перечисленные связи заранее не создаются, их текущие (потребные будущие) значения вычисляются в реальном (ускоренном) масштабе времени в процессе функционирования объекта. Здесь эти связи являются гомеостатическими (нежесткими), как у обычных систем автоматического управления (САУ). Они создаются и обновляются в процессе функционирования объекта в управляющем устройстве.

Подход к проблеме синтеза непрерывных динамических систем, ориентированный на принцип оптимального управления (ОУ) в реальном или в ускоренном времени, был предложен в начале 70-х годов В.С. Шендриком (по инициативе Б.Н. Петрова) и развит А.А. Красовским и его учениками [1]. Наибольший вклад в развитие данного направления теории ОУ внес В.Н. Буков [2]. В начале 90-х годов принцип управления в реальном времени был “переоткрыт” Р. Габасовым и Ф.М. Кирилловой и успешно развивается в белорусской школе математиков [3].

Известно, что на традиционные алгоритмы последовательных улучшений накладываются достаточно жесткие условия по сходимости и выбору начальных приближений [8, 9]. На пути использования только достаточных условий оптимальности или теории квазилинеаризации простых и надежных (гарантирующих поточечную сходимость) методов, как отмечалось еще

Р. Беллманом [4], создать не удалось. Для преодоления этих трудностей в статье развивается многометодная технология, основанная на сочетании метода квазилинеаризации с достаточными условиями оптимальности. Предлагается применить квазилинеаризацию для **локальной** оптимизации в окрестности стационарности точек функции Гамильтона, а достаточные условия оптимальности — для **интервальной** оптимизации. Основная идея предлагаемой двухметодной технологии: за счет интервальной оптимизации осуществлять грубый поиск начального приближения по достаточным условиям, а затем итерационным путем уточнять полученное приближение по условиям локальной оптимальности (стационарности или в форме принципа минимума).

Для организации минимизирующих последовательностей слабой минимали формулируется вспомогательная (вырожденная по формулировке) задача приближенно-оптимального синтеза. Вырожденность здесь заложена в саму постановку проблемы управления и проявляется особым образом: исходная (невырожденная) задача синтеза доопределяется до сингулярной с целью включения предельных функций управления в множество допустимых, но таким образом, чтобы преобразованная задача содержала оптимальное решение. Если в традиционных постановках вырожденных задач управления сингулярная кривая подлежит определению, то в преобразованной задаче она известна: ею является оптимальная траектория исходной задачи.

Таким образом, в отличие от известных подходов к решению задачи приближенно-оптимального синтеза регуляторов, когда в методе решения используется имеющаяся неоднозначность в выборе производящих функций со свойствами функции Ляпунова, в данном случае существует место другое продолжение теории достаточных условий: путем фазовой линеаризации уравнений динамической системы и интегранта функционала исходной задачи нелинейного синтеза относительно заранее неизвестных, но определяемых в процессе функционирования объекта постоянных на малых интервалах времени оптимальных значений вектор-функций управления (квазилинеаризации) и через формирование градиентной стратегии ньютоновского типа по вариациям управлений на тех же интервалах последовательно определяются и уточняются точки стационарности искомой минимали. С целью фиксации предельных элементов минимизирующих последовательностей поиска оптимального решения по условиям стационарности предлагается использовать функционал обобщенной работы А.А. Красовского.

Разработаны эффективный метод совмещенного синтеза и процедуры решения двухточечной краевой задачи по схеме дифференциального динамического программирования (ДП), обеспечивающие поинтервальную монотонно убывающую (релаксационную) сходимосты процессов управления по необходимым условиям локальной оптимальности. Сформулированы основные теоремы и приводится один из вариантов алгоритмической реализации метода. Необходимость в такой разработке обусловлена фактическим отсутствием надежных методов нелинейного синтеза цифровых регуляторов, гарантирующих высокую точность и устойчивость решения при приемлемых вычислительных затратах.

1. Постановка задачи приближенно-оптимального синтеза управлений. Под оптимизацией непрерывных процессов управления будем понимать решение задачи выбора на отрезке времени $T = [t_0, t_k]$ позиционного управления

$$u = u(t_0, x(t_0), t, x(t)) \tag{1.1}$$

для динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.2}$$

такого, чтобы на траектории движения объекта $x(t)$, удовлетворяющей заданным ограничениям на множествах начального и конечного состояний

$$\mu(t_0, x(t_0), t_k, x(t_k)) = 0, \quad \mu \in R^p, \tag{1.3}$$

функционал

$$I = V_3(t_0, x(t_0), t_k, x(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(t, x(t), u(t))dt, \quad I \in R^1, \tag{1.4}$$

достигал минимума (максимума) или наименьшей (наибольшей) точной грани (инфимума \inf или супремума \sup). Здесь $u \in R^m, x \in R^n$, функции f, μ, V_3 и f_0 — заданные кусочно-непрерывные по t и непрерывные и достаточно гладкие по x, u (дифференцируемые или абсолютно непрерывные) векторные и скалярные функции указанных аргументов.

В дальнейшем будем рассматривать менее общую постановку задачи оптимизации – постановку задачи нелинейного синтеза, для которой условие (1.3) без потери общности может учитываться в конструкции модифицированного лагранжиана; а скалярная функция $V_3(x(t_k)) = V_3(t_k, x(t_k))$ определяет граничные условия только на правом конце траектории (терминальное множество). Граничные условия на левом конце траектории $x(t_0) = x^0 \in R^n$ выбираются произвольными. Конечные ограничения на граничные условия и на значения управляющих функций и траектории процесса (1.3) будем записывать как

$$(x(t), u(t)) \in F(t), \quad (1.5)$$

где $F(t) \subset G_x \times G_u$, $G_x = X$, $G_u = U$ является декартовым произведением множеств топологической степени $(n + m)$, зависящим от времени t .

Множество пар вектор-функций $\{x(t), u(t)\}$, удовлетворяющих дифференциальной связи (1.2) и конечным ограничениям (1.5), называют множеством допустимых D . Предполагается, что $D \neq \emptyset$.

Пару функций $\{x_{\text{оп}}(t), u_{\text{оп}}(t)\} \in D$ будем называть оптимальным процессом (минималью) для I на D , если

$$I(x_{\text{оп}}(t), u_{\text{оп}}(t)) = d. \quad (1.6)$$

Здесь $d = \inf_D I(x(t), u(t))$ – нижняя точная грань функционала (1.4).

Нижнюю точную грань функционала (1.4) в общей теории экстремальных задач называют опорным функционалом (опорой) [5].

Последовательность $\{x_s(t), u_s(t)\} \in D$, на которой

$$I(x_s, u_s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} d, \quad (1.7)$$

является минимизирующей для функционала I на множестве D .

2. Квазилинеаризация и достаточные условия оптимальности. Введем непрерывную и достаточно гладкую (дифференцируемую или абсолютно непрерывную) функцию $\varphi(t, x) \in \Phi$ и рассмотрим следующие конструкции [5, с. 263]:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + f_0(t, x, u), \quad (2.1)$$

$$\Phi(x(t_0), x(t_k)) = V_3(x(t_k)) - \varphi(t_k, x(t_k)) + \varphi(t_0, x(t_0)). \quad (2.2)$$

Для того чтобы пара $(x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) \in D$ была минималью в задаче (1.1)–(1.5), достаточно существования такой гладкой функции $\varphi(t, x)$, чтобы выполнялись условия [6]

$$\mu(t) = R(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) = \inf_{(x, u) \in F(t)} R(t, x, u) \quad \text{для любого } t \in [t_0, t_k], \quad (2.3)$$

$$\Phi(x_{\text{оп}}(t_0), x_{\text{оп}}(t_k)) = \inf_{\substack{x(t_0) \in F_x(t_0) \\ x(t_k) \in F_x(t_k)}} \Phi(x(t_0), x(t_k)), \quad (2.4)$$

где включение $x(t) \in F_x(t)$ определяет ограничение на значения вектора состояния системы (1.2), $F_x(t)$ – проекция множества $F(t)$ на пространство X .

Учтем в исходных конструкциях (2.3), (2.4) тейлоровское разложение функций f, f_0 в малой окрестности локальной минимали $(x_0(t), u_0(t)) = (x_{\text{оп}}(t), u_{\text{оп}}(t, \tau)|_{\tau=t})$:

$$f(t, x, u) = f(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f(t, x_0, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(t, x_0, u)}{\partial u} \delta u + \lim_{\substack{|\delta x| \rightarrow 0 \\ |\delta u| \rightarrow 0}} O(|\delta x|, |\delta u|), \quad (2.5)$$

$$f_0(t, x, u) = f_0(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f_0(t, x_0, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_0(t, x_0, u)}{\partial u} \delta u + \lim_{\substack{|\delta x| \rightarrow 0 \\ |\delta u| \rightarrow 0}} O(|\delta x|, |\delta u|), \quad (2.6)$$

где для краткости обозначим

$$\frac{\partial f(t, x_0, u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \right]_{x=x_0}, \quad \frac{\partial f_0(t, x_0, u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_0(t, x, u)}{\partial x} \right]_{x=x_0},$$

$$\frac{\partial f(t, x, u_0)}{\partial u} = \left[\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u} \right]_{u=u_0}, \quad \frac{\partial f_0(t, x, u_0)}{\partial u} = \left[\frac{\partial f_0(t, x, u)}{\partial u} \right]_{u=u_0}.$$

Здесь $O(|\delta x|, |\delta u|)$ представляет члены более высокого порядка малости [7, с. 19], чем модули $|\delta x|$ и $|\delta u|$ (т.е. $\lim_{\substack{|\delta x| \rightarrow 0 \\ |\delta u| \rightarrow 0}} O(|\delta x|, |\delta u|)$) на длинах оптимизации Δt с точностью определения погрешностей вы-

числений 5–7% в точках стационарности функции Гамильтона, причем в (2.5) остаточный член представляет собой вектор, а в (2.6) – скаляр. Так как предполагается, что члены разложения выше второго порядка пренебрежительно малы, и принимается, что незначимая функция времени $\mu(t) = R(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) = \inf_{(x, u) \in F(t)} R(t, x, u) = 0$, то достаточные условия (2.3), (2.4) с учетом (2.5), (2.6) переписутся в виде

$$\inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) \right) + \inf_{x \in F_x} \left(\left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial x} \right] \delta x \right) +$$

$$+ \inf_{u \in U} \left(\left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f_0}{\partial u} \right] \delta u \right) = 0, \quad (2.7)$$

$$\inf_{\substack{x(t_0) \in F_x(t_0) \\ x(t_k) \in F_x(t_k)}} \left(\left(\frac{\partial V_k(x_0(t_k))}{\partial x(t_k)} - \frac{\partial \varphi(t_k, x_0(t_k))}{\partial x(t_k)} \right) \delta x(t_k) + \frac{\partial \varphi(t_0, x_0(t_0))}{\partial x(t_0)} \delta x(t_0) \right) = 0. \quad (2.8)$$

Выражения в квадратных скобках формулы (2.7) могут быть записаны через скалярную функцию $H(t, x, \varphi_x, u) = \partial \varphi(t, x) / \partial x \cdot f + f_0$. Тогда формулу (2.8) можно представить как

$$\inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) \right) + \inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u)}{\partial x} \delta x \right) +$$

$$+ \inf_{u \in U} \left(\frac{\partial H(t, x, \varphi_x, u_0)}{\partial u} \delta u \right) = 0. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) будет характеризовать четыре различные ситуации, каждой из которых соответствуют свои конструкции алгоритмов оптимального управления.

Первая ситуация типична при решении задач ОУ на основе принципа минимума, где постулируется сам факт существования экстремали Понтрягина: $x = x_0(t)$, $u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$, $\varphi_x = \psi^T(t)$. Тогда при фиксированных начальных условиях ($\delta x(t_0) = 0$) из (2.9) можно формально выписать уравнение сопряженной системы (уравнение импульсов), а из формулы (2.8) определить условия его трансверсальности.

Вторая ситуация имеет место при решении задач синтеза ОУ методом дифференциального ДП [8], когда об оптимальности траектории $x = x_0(t)$ можно косвенно судить по условиям оптимальности отдельных ее участков (интервалов $[t, t_k]$) при ненулевой вариации управления ($\delta u \neq 0$) на этих участках. Такой способ вычислений не связан с непосредственным варьированием управления и траектории и, как следует из формулы (2.9), сводится к поиску минимизирующей последовательности (к организации процедуры слабого локального улучшения) $u_{\text{оп}}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$, где локально-оптимальное управление $u_0(t)$ определяется по условию стационарности. При $x = x_0(t)$ функция $\varphi(t, x)$ является функцией Беллмана $S(t, x)$ ($S_x = \psi^T(t)$).

Третья ситуация соответствует случаю $x \neq x_0(t)$, $u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$, допускает и фактически рекомендует тип приближения, называемый приближением в пространстве политик [4], который

также отсутствует в классическом анализе. Политика (процедура сильного локального улучшения) $x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} x_0(t)$, согласно (2.7), (2.8), формируется по условию

$$\inf_{x \in F_x} \left(\left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial x} \right] \delta x \right) = \inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u_0)}{\partial x} \delta x \right) = 0, \quad (2.10)$$

из которого в силу стационарности точек $x_0(t)$ (функция H не зависит от x) при малой ненулевой вариации траектории δx следует тождество

$$\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u_0)}{\partial x} \equiv 0 \quad (2.11)$$

и определяется вектор x_0 . За счет организации процедуры улучшения $x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} x_0(t)$ обеспечивается приближенное вычисление функции Беллмана $S(t, x_0)$ через функцию $\varphi(t, x)$, которая здесь может быть выбрана произвольной, т.е. фактически является функцией Ляпунова.

Четвертая ситуация формально напоминает классическую постановку решения вариационных задач, так как в ней за счет квазилинеаризации предполагается использовать ненулевые вариации траектории и управления: $x \neq x_0(t)$, $u \neq u_0(t)$. Через соотношения $\frac{\partial H(t, x, \varphi_x, u_0)}{\partial u} \equiv 0$, $\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u)}{\partial x} \equiv 0$ здесь организуются итерационные процедуры улучшения $u_{\text{он}}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{он}}(t, t) = u_0(t)$, $x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} x_0(t)$, обеспечивающие выполнение необходимого условия абсолютного локального минимума функционала (1.4): при $\delta x \rightarrow 0$, $\delta u \rightarrow 0$ ожидается сходимость

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \rightarrow 0, \quad \delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u \rightarrow 0.$$

Определим множества

$$D_1(\varepsilon) = \{(x(t), u(t)) \in D : |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, t_k]\},$$

$$D_2(\varepsilon) = \{(x(t), u(t)) \in D : |u(t) - u_0(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, t_k]\}.$$

Определение 1 [9]. Пара функций $(x_0(t), u_0(t)) \in D$ называется сильной (слабой) локальной минималью, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $I(x_0, u_0) \leq I(x, u)$ для всех $(x(t), u(t)) \in D_1(\varepsilon)(D_2(\varepsilon))$.

Сформулируем теперь ряд теоретических положений о слабой минимали, которые формально следуют из анализа формул (2.8), (2.9).

Теорема 1 (условия локальной оптимальности в форме принципа минимума¹). Если в задаче (1.1)–(1.5) существует локальная минималь (x_0, u_0) , то в каждой точке стационарности выполняются следующие условия:

$$1) \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial t} + \bar{H}(t, x_0, \psi) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} = \psi^T(t),$$

$$2) V_3(x_0(t_k)) = \varphi(t_k, x_0(t_k)) - \varphi(t_0, x_0(t_0)),$$

$$3) \bar{H}(t, x_0, \psi) = H(t, x_0, \psi, u_0) = \inf_{u \in U} H(t, x_0, \psi, u).$$

¹ Формально условия теоремы 1 совпадают с принципом максимума Л.С. Понтрягина. Связь этих условий с достаточными условиями оптимальности установлена в работах В.Ф. Кротова [10]. Однако они также соответствуют традиционной схеме ДП (в форме принципа минимума [5]) и определяют решение не одной, а семейства задач оптимального управления.

Здесь условиям 1), 2) соответствует канонически сопряженная система уравнений, формирующая двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial \bar{H}^T(t, x_0, \Psi)}{\partial \Psi} = f(t, x_0, u_0), \quad x_0(t_0) = x^0, \quad (2.12)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial \bar{H}^T(t, x_0, \Psi)}{\partial x} = -\frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} \Psi - \frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial x}, \quad \Psi^T(t_k) = \frac{\partial V_3(x_0(t_k))}{\partial x(t_k)}. \quad (2.13)$$

Из условия 3) определяется вектор управления $u_0(t) = u_{\text{оп}}(t, t) = \arg \min_{u \in U} H(t, x_0, \Psi, u)$, в локальном смысле доставляющий минимум функционалу (1.4):

$$I_* = V_3(x_0(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(t, x_0(t), u_0(t)) dt, \quad I_* = \inf_{(x, u) \in D} I(x, u). \quad (2.14)$$

Таким образом, в рассмотренной выше первой ситуации локальная минималь (оптимальная программа) и опорный функционал I_* вычисляются через решение двухточечной краевой задачи (2.12), (2.13).

Отметим, что предположение теоремы 1 о том, что пара (x_0, u_0) – локальная минималь в задаче (1.1)–(1.5), несколько эвристично, пока не доказан факт ее существования [7, с. 24–26]. Этот факт устанавливается путем такой переформулировки исходной задачи ОУ, при которой имеется возможность организации процедур поиска минимизирующих последовательностей, монотонно сходящихся по u к локальной минимали.

Теорема 2 (условия первого порядка локального минимума²). Для того чтобы пара (x_0, u_0) была слабой локальной минималью задачи (1.1)–(1.6), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1) \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} = \frac{\partial S(t, x_0)}{\partial x} = \Psi^T(t),$$

$$2) V_3(x_0(t_k)) = \varphi(t_k, x_0(t_k)) - \varphi(t_0, x_0(t_0)),$$

3) $\partial H(t, x_0, \Psi, u_0) / \partial u \equiv 0$ для $u \in \text{int } U$ или $U = R^m$ и при ненулевой допустимой вариации управления δu .

Замечание 1. По-видимому, на границах множества U следующее из анализа (2.9) равенство $\inf_{u \in U} (\partial H(t, x, \varphi_x, u_0) / \partial u \cdot \delta u) = 0$ уступит место соотношению $\inf_{u \in U} (H(t, x_0, \Psi, u) - \xi(t)) = 0$, где ε – малое число, $\xi(t)$ – непрерывная и кусочно-гладкая на множестве малой меры функция. Тогда условие 3) теоремы 2 можно заменить на условие $\inf_{u \in U} H(t, x_0, \Psi, u) \equiv 0$.

Теорема 2 соответствует случаю решения задачи локально-оптимального синтеза ОУ по схеме дифференциального ДП [8]. Здесь локальное улучшение управления осуществляется через квазилинеаризацию дифференциальной связи (1.3) и интегранта функционала качества (1.4) в окрестности $u_0(t)$, т.е.

$$\dot{x} = f(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u, \quad (2.15)$$

$$I(u(\cdot)) = V_3(x_0(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} (f_0(t, x_0(t), u_0(t)) + \frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u) dt = I_* + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u \right) dt. \quad (2.16)$$

Непосредственно из формул (2.15), (2.16) видно, что при организации процедуры приближений $u_{\text{оп}}(t, \tau) \rightarrow u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$ значения функционала (2.16) стремятся к нижней точной грани I_* функционала исходной задачи (1.1)–(1.5).

Аналогичные теореме 2 утверждения сформулированы в [11, 12] для схемы приближения в пространстве политик и аналога вариационной схемы в задаче локализации и улучшения.

² В оптимальном управлении эти условия получены и доказаны В.А. Батуриным [9].

3. Метод решения двухточечных краевых задач для непрерывных динамических систем по схеме дифференциального ДП. 3.1. Релаксационное расширение пространства состояний. Следующий конструктивный шаг к практической реализации рассмотренных выше схем решения задачи (1.1)–(1.5) состоит в определении стратегии приближенного синтеза оптимальных в локальном смысле управлений через релаксационное расширение пространства состояний. Релаксационное расширение связано с исследованием свойств предельных элементов минимизирующих последовательностей поиска управлений, которые определяют исходную постановку задачи синтеза для дифференциальной системы (1.3).

В основу организации поиска предельных элементов положены [13]:

идея квазилинеаризации – фазовой линеаризации процесса (1.3) и интегранта функционала (1.4) относительно оптимальных, определяемых в процессе функционирования объекта, и постоянных на конечном числе малых длин оптимизации Δt параметров $u_0 = u^*$ по формулам (2.15), (2.16);

предположение о допустимости выбора управлений и/или траекторий, мало отличающихся от оптимальных на конечном числе длин Δt , что дает возможность организовать приближенную стратегию синтеза на паре (u, u_0) по схеме дифференциального ДП:

$$\frac{d \delta u}{dt} = \vartheta, \quad \delta u = u - u_0, \quad (3.1)$$

где ϑ – “новый” m -вектор управления.

Если длины оптимизации Δt малы, то производные в (3.1) с достаточной степенью точности описываются соотношением

$$u(t) = u_0(t) + \vartheta \Delta t,$$

которое может быть реализовано в виде итерационной процедуры ньютоновского типа для определения локальной минимали: при $\vartheta \rightarrow 0$ в каждой точке стационарности обеспечивается выполнение условия $u(t) \rightarrow u_0(t)$. Поэтому выбор градиентной стратегии типа (3.1) естественен, соответствует идеологии квазилинеаризации и идее нелинейного синтеза в процессе функционирования объекта (1.3) (совмещенного синтеза) на малых длинах Δt . Этим самым и сама задача синтеза представляется в линеаризованном виде: множество всех точек $x(t_k)$ терминального члена функционала (1.5) становится близко к выпуклому [14].

3.2. Применение функционала обобщенной работы в задаче приближенно-оптимального синтеза регуляторов. Суть градиентной стратегии (3.1) – релаксационное расширение пространства состояний (1.3): $y = (x, \delta u)$ для схемы дифференциального ДП. Поэтому требуется таким образом переформулировать исходную постановку задачи оптимизации (1.1)–(1.5), чтобы была возможность зафиксировать предельные элементы минимизирующих последовательностей в точках стационарности $u = u_0$. Для этого предлагается применить функционал обобщенной работы (ФОР) [1]

$$I(y(\cdot)) = S_3(y(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} [Q_p(\theta, y) + L_{31}(\vartheta) + L_{31}(\vartheta_0)] d\theta, \quad (3.2)$$

результат минимизации которого есть цена I_* исходной задачи синтеза. Здесь $L_{31}(\vartheta) = 0.5 \vartheta^T r^{-1} \vartheta$, $L_{31}(\vartheta_0) = 0.5 \vartheta_0^T r^{-1} \vartheta_0$ – некоторые квадратичные формы от “новых” управлений. Интегрант линеаризованного в окрестности вектора $u_0(t)$ функционала (1.4) в ФОР (3.2) для схемы дифференциального ДП задается в виде

$$Q_p(t, y) = f_0(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u.$$

Переменная ϑ_0 на длинах Δt является постоянным, не варьируемым параметром: $\vartheta_0 = \vartheta^*$.

Задача получения оптимального решения линеаризованного на малых длинах оптимизации Δt процесса (1.3) формулируется следующим образом: организовать итерационные процедуры поиска слабой минимали (теорема 2), обеспечивающие инфимум ФОР (3.2) при дифференциальных связях (1.3).

Сформулированная задача приближенно-оптимального синтеза решается методом характеристических полос [1]. Основной результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Для процесса (1.3) оптимальное в смысле достижения локального минимума функционала (1.3) и ФОР (3.2) управление определяется процедурой слабого улучшения $u_{оп}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{оп}(t, t) = u_0(t)$, получаемой из канонически сопряженной системы: дифференциальной связи (2.15) и уравнений

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} p_x + \frac{\partial(\delta u^T \dot{p}_{\delta u})}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$\dot{p}_{\delta u} = -\frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} p_x, \quad (3.4)$$

$$\vartheta = -r p_{\delta u}, \quad (3.5)$$

$$\dot{S}(t, x, \delta u) = -f_0(t, x_0, u_0) - \frac{\partial f_0(t, x_0, u_0)}{\partial u} \delta u, \quad (3.6)$$

где S – функция Беллмана для задачи с расширенным вектором состояния; $p_x = \partial S^T / \partial x = \psi_x(t)$, $p_{\delta u} = \partial S^T / \partial \delta u = \psi_{\delta u}(t)$ – котраектории состояния и вариаций управления.

Доказательство теоремы 3 осуществляется через прямое преобразование условий оптимальности к более простым условиям в форме уравнения Ляпунова для расширенного пространства состояний с последующим его решением методом характеристик и приведено в Приложении.

4. Алгоритмы с прогнозирующей моделью. Известны и получили развитие различные варианты и редакции алгоритмов с прогнозирующей моделью [1, 2]. Базовыми из них являются алгоритм модифицированный и алгоритм с матрицей чувствительности, программную реализацию первого из которых покажем на примере использования схемы дифференциального ДП (теорема 3).

Алгоритм основан на непосредственном вычислении градиентов $p_x, p_{\delta u}$ по формулам (3.3), (3.4) и реализует процедуру слабого локального улучшения через последовательность следующих операций.

Шаг 1. Прогнозируется состояние объекта на интервале $[t_u, t_k]$ с помощью модели

$$\dot{x}_m = \chi F_m(\tau, x_m, u_m), \quad (4.1)$$

где $F_m = f(\tau, x_m, u_0) + \partial f / \partial u_m \cdot \delta u$, $x_m(\tau_u) = x(t_u)$, $u_m(\tau_u) = u(t_u)$; t_u – моменты времени, соответствующие окончанию очередного цикла оптимизации длиной Δt ; индекс “ m ” обозначает принадлежность к модельному (прогнозному) движению, χ – коэффициент масштабирования времени ($\chi = 1$ – реальный масштаб времени, $\chi \geq 2$ – ускоренный масштаб времени). Прогноз движения модели осуществляется интегрированием уравнений (4.1) в ускоренном прямом времени τ с различными начальными условиями $x_m^i(t_u)$, $i = \bar{1}, m+1$, лежащими в окрестности текущего состояния объекта $x(t_u)$.

Шаг 2. Определяются значения вектора $x_m(\tau_k)$ и на основе предварительно продифференцированной по x_m и по u_m функции S_3 вычисляются ее градиенты в конечный момент времени $\tau_k = t_k$:

$$p_k(\tau_k) = -\frac{\partial S_3^T(x_m(\tau_k), \delta u(\tau_k))}{\partial x_m(\tau_k)}, \quad p_{\delta u}(\tau_k) = -\frac{\partial S_3^T(x_m(\tau_k), \delta u(\tau_k))}{\partial \delta u(\tau_k)}. \quad (4.2)$$

Шаг 3. С начальными условиями (4.2) на интервале $[\tau_0, \tau_k]$ с шагом $\Delta \tau$ при $j = 0$ интегрируется в ускоренном обратном времени система уравнений (2.15), (3.3)–(3.6):

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\chi F_m(\tau, x_m, u_{mj}), \\ \dot{p}_x &= \frac{\partial f_0^T(\tau, x_m, u_{mj})}{\partial x_m} + \frac{\partial f^T(\tau, x_m, u_{mj})}{\partial x_m} p_x - \frac{\partial(\delta u^T \dot{p}_{\delta u})}{\partial x_m} \end{aligned}$$

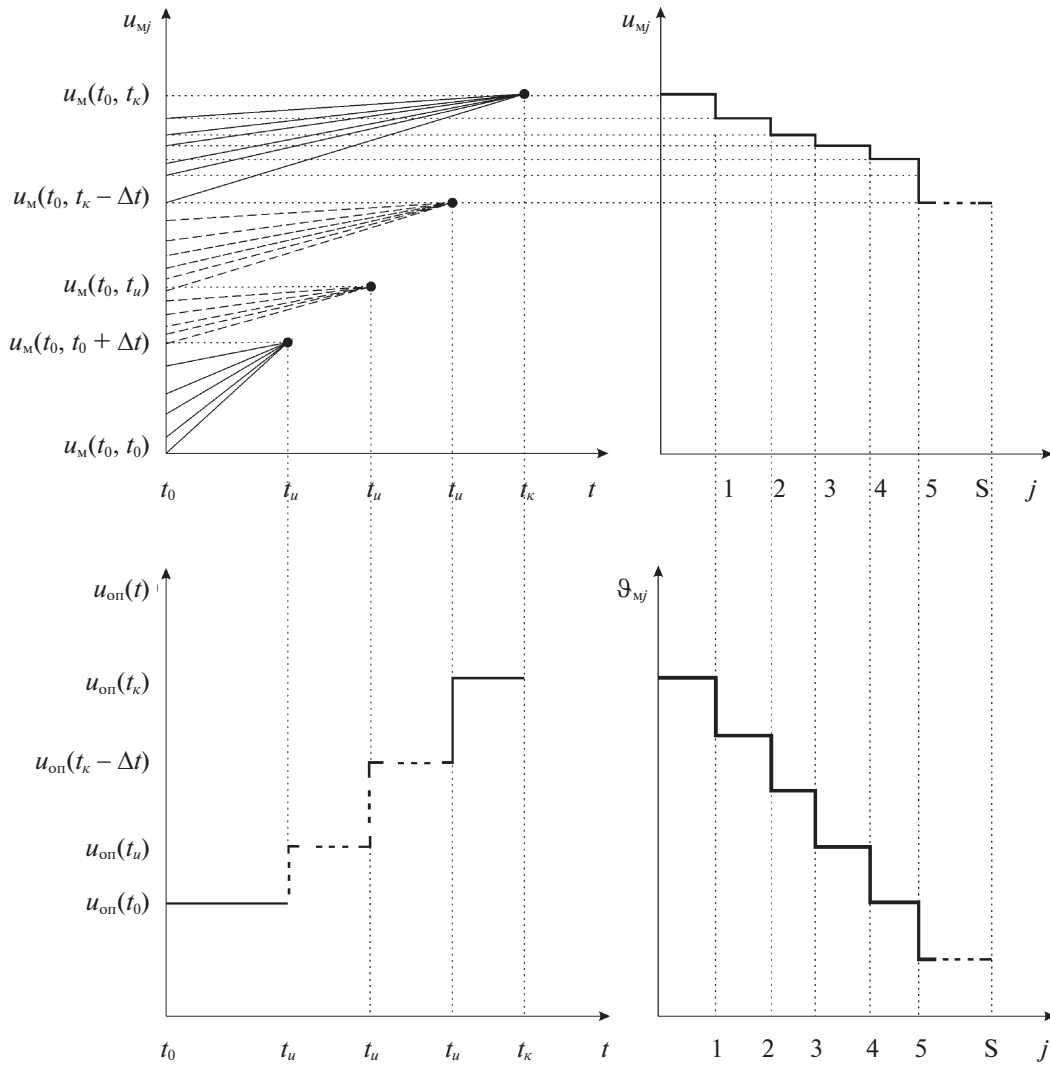


Рис. 1. Алгоритм модифицированный

$$\dot{p}_{\delta u} = \frac{\partial f_0^T(\tau, x_M, u_{Mj})}{\partial x_M} + \frac{\partial f^T(\tau, x_M, u_{Mj})}{\partial u_M} p_k, \quad \vartheta_{Mj} = r p_{\delta u}, \quad (4.3)$$

$$u_{Mj+1} = u_{Mj} - \vartheta_{Mj+1}(T_{\Pi} - n \Delta \tau),$$

$$T_{\Pi} = t_k - t_0, \quad \Delta \tau = k \Delta t, \quad k = T_{\Pi} / \Delta \tau, \quad k = \overline{1, l}.$$

Здесь T_{Π} – время прогнозирования.

Замечание 2. При организации итерационной процедуры в уравнениях прогнозирующей модели (ПМ) вместо вектора u_0 рассматривается модельное управление предыдущей итерации u_{Mj} .

Дополнительно вместе с соотношениями (4.3) вычисляется функция Беллмана для задачи с расширенным вектором состояния

$$\dot{S}(\tau, x_M, \delta u) = \chi Q_p(\tau, x_M, \delta u), \quad \delta u = u_{Mj+1} - u_{Mj}. \quad (4.4)$$

Матрицы частных производных векторной и скалярной функций F_M, Q_p по компонентам $x_M, \delta u$ вычисляются на основе прогнозов (4.1).

Шаг 4. На длинах оптимизации Δt организуется итерационная процедура уточнения точек стационарности локальной минимали (рис. 1) при $j = \overline{1, N_3}$ по формулам (4.3), (4.4). Условием останова итерационной процедуры является выполнение неравенства $\delta u \leq \epsilon_3$ или при более грубой оценке по точности вычислений: $j \leq N_3$.

Шаг 5. При выполнении условия останова вновь полученное управление принимается за оптимальное управление $u_{mj+1} = u_0$ и подается на объект (1.3). Через промежуток времени Δt шаги 1 – 4 алгоритма повторяются (рис. 1). При этом на каждом участке Δt в модели (4.3) с заданной точностью выполняется условие: $\vartheta_{mj} = \vartheta_0 = 0$.

5. Свойства сходимости алгоритмов с прогнозирующей моделью. Недостатком всех современных численных методов, используемых в прямых методах (например, метода обратных задач динамики [15]) и в непрямых методах интервальной оптимизации в точной формулировке, служит отсутствие строго математического доказательства их сходимости. Процедуры прямых методов являются градиентными и позволяют определить только локальный экстремум, а не минимизировать функционал (1.4) во всей области его определения. Для рассмотренных же выше методов интервальной оптимизации зачастую характерна “овражная” ситуация: застревание процесса в окрестности одной из точек локального экстремума, в силу чего задача (1.1)–(1.5) или имеет решение, далекое от истинного, или же вообще может наблюдаться расхождение процессов управления.

Для преодоления этих трудностей предлагается применить процедуру дифференциального ДП для получения грубого начального приближения точек стационарности локальной минимали, а градиентную процедуру квазилинеаризации – для последующего уточнения этих точек. Поэтому доказательство сходимости алгоритмов, построенных на основе формул (2.15), (3.3), (3.4) теоремы 3, должно состоять из двух этапов: доказательства сходимости процессов по условиям стационарности к решению исходной задачи (1.1) – (1.5), доказательства сходимости к локальной минимали в окрестности точек стационарности по методу квазилинеаризации. Рассмотрим оба эти этапа.

5.1. Свойства сходимости алгоритмов с прогнозирующими моделями при интервальной оптимизации процессов управления. Доказательство сходимости по рассмотренной выше схеме дифференциального ДП основывается на рассмотрении свойств предельных элементов минимизирующих последовательностей поиска локальной минимали (x_0, u_0) . Для выявления этих свойств введем понятие множества достижимости [16–18].

Определение 2. Множеством достижимости $X(t, X_0, \tau)$ в момент времени τ систем (2.15), (3.3), (3.4) называется множество, порожденное в момент времени t множеством начальных состояний X_0 этих систем.

Множество достижимости при $\tau \rightarrow t$ оценивается результатом минимизации функционала (3.2) – приближенно вычисленным через итерационную процедуру улучшения $u_{оп}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{оп}(t, t) = u_0(t)$ значением опорного функционала I_* в момент времени t ($t \in [t_0, t_k]$), равного значению оптимального в локальном смысле функционала (1.4) исходной задачи синтеза (1.1)–(1.5).

Определение 3. Предельным множеством достижимости $X^*(t, X_0, \tau)$ систем (2.15), (3.3), (3.4) будем называть фиксированное в момент времени $\tau = t$ множество, порожденное множеством начальных состояний X_0 этих систем.

Предельное множество достижимости при $u_{оп}(t, t) = u_0(t)$ определяет одинаковый результат минимизации ФОР (3.2) в расширенной формулировке (теорема 3) и функционала (1.4) в исходной постановке задачи нелинейного синтеза (1.1)–(1.5).

Теорема 4 (об определении элементов предельного множества достижимости). Если управление $u = u_0(t)$ соответствует локальному минимуму функционала (1.4) и определяет локальную минималь процесса (1.3) на незамкнутых множествах $u \in R^m, x \in R^n$, то существуют такие векторная, ненулевая и непрерывная функция p_x и скалярная функция ϕ , которые удовлетворяют следующим условиям:

1) управляемой прогнозирующей модели – решаемой в ускоренном времени системе канонически сопряженных уравнений: дифференциальной связи (1.3) и векторному уравнению

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} p_x, \quad p(t_k) = \frac{\partial V_3^T(x(t_k))}{\partial x(t_k)}, \quad (5.1)$$

2) условию стационарности точек функции Гамильтона по u .

$$\frac{\partial H^T}{\partial \delta u} = \dot{p}_{\delta u} = \frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} p_x = 0, \quad (5.2)$$

3) условию равенства нулю предельных элементов минимизирующей последовательности по u в градиентной процедуре (3.5):

$$\vartheta = \vartheta_0 = -rp_{\delta u} = 0, \quad (5.3)$$

4) условию минимума локального функционала, определяемого через вычисление функции Ляпунова:

$$\dot{I}(t) = \dot{\phi}(t, x_0) = -f_0(t, x_0, u_0), \quad \phi(t_k, x_0(t_k)) = V_3(x_0(t_k)). \quad (5.4)$$

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Таким образом, теорема 4 завершает доказательство сходимости алгоритмов с прогнозирующей моделью по условиям стационарности. Основное свойство слабой локальной минимали состоит в том, что при отсутствии ограничений на управление она определяется стационарными точками функции Гамильтона, которые удовлетворяют векторному уравнению $\partial H / \partial \delta u = 0$.

Заметим, что один и тот же результат минимизации ФОР (3.2) в постановке задачи синтеза ОУ с релаксационным расширением пространства состояний и функционала (1.4) в исходной постановке позволяет сделать вывод о том, что предельные множества достижимости для расширенной задачи совпадают с множеством достижимости задачи (1.1)–(1.5). Главное отличие расширенной формулировки задачи нелинейного синтеза заключается в том, что она определяет минимизирующую последовательность по u поиска слабой локальной минимали, тогда как в исходной формулировке только констатируется факт ее существования. Если управление можно однозначно определить (синтезировать) в виде обратных связей $u = u_0(t, x, p_x)$, то решение исходной задачи (1.1)–(1.5) сводится к решению двухточечной краевой задачи для дифференциальной системы (1.3), (5.1), (5.2).

По-видимому, слабая локальная минималь существует только тогда, когда при выполнении необходимого условия (стационарности или принципа минимума) одновременно (как в теории устойчивости) выполняется и достаточное условие оптимальности, но не наоборот. В задаче нелинейного синтеза это не совсем очевидно.

5.2. Свойства сходимости алгоритмов с прогнозирующей моделью в окрестности точек стационарности локальной минимали. Процедура дифференциального ДП позволяет получить грубое начальное приближение точек стационарности локальной минимали на длинах оптимизации Δt (рис. 1). Для уточнения данного решения используется квазилинеаризация – градиентная процедура (3.1) последовательного улучшения точек стационарности. Поэтому можно утверждать, что в алгоритмах с прогнозирующей моделью метод квазилинеаризации есть просто применение метода Ньютона–Рафсона–Канторовича в функциональном пространстве [4, 19]. Так как сходимость метода имеет место для начальных приближений из какой-либо окрестности точек стационарности слабой локальной минимали, то градиентная процедура (3.1) является локально сходящейся.

Известно [4], что метод квазилинеаризации имеет основные свойства – монотонность и квадратичную сходимость. Докажем аналогичные свойства локальной сходимости алгоритмов с прогнозированием, следуя методике Беллмана.

1. Монотонность.

Определение 4 [20]. Если при реализации градиентной процедуры (3.1) значения функционала (3.2) на итерациях u_j монотонно убывают, то последовательность $u_j \rightarrow u_0$ называется релаксационной, а параметр ϑ – релаксационным параметром.

Различают два вида сходимости градиентных процедур: сходимость по функционалу и сильную сходимость (сходимость).

Определение 5. Градиентная процедура (3.1) называется сходящейся, если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - u_0\| = 0.$$

Очевидно, сходимость процедур влечет сходимость по функционалу. Обратное, вообще говоря, не верно.

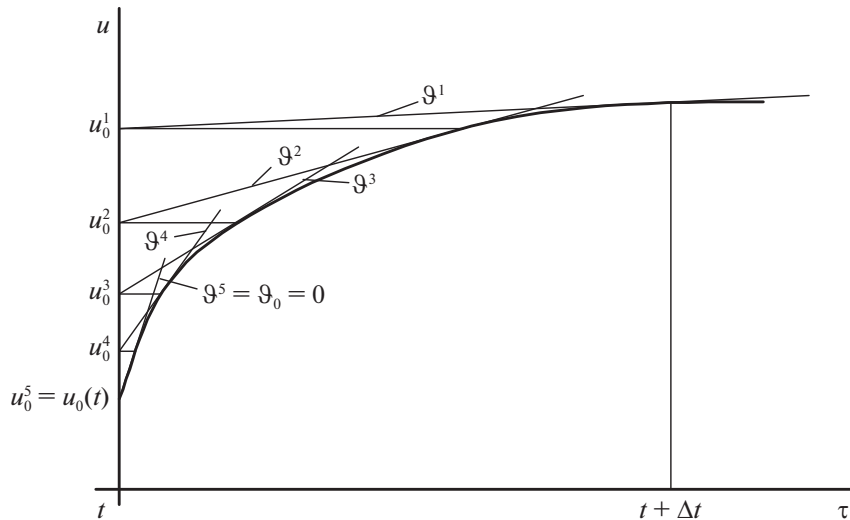


Рис. 2. График, поясняющий свойство монотонной сходимости градиентных процедур

Свойство монотонности в алгоритмах с прогнозирующей моделью подразумевает сходимость градиентной процедуры (3.1), которая в свою очередь зависит от начальных приближений в окрестности точек стационарности слабой локальной минимали и выбранного релаксационного параметра. Так как начальные приближения вычисляются по схеме дифференциального ДП, то для доказательства монотонности итерационных процедур остается определить свойство релаксационного параметра ϑ . Этот параметр имеет функциональный смысл и вычисляется по формуле (3.5): $\vartheta = -r \partial \Phi^T / \partial \delta u = -r p_{\delta u}$.

На длинах оптимизации Δt в каждой точке стационарности слабой локальной минимали параметр ϑ обращается в нуль (см. Приложение). В силу чего можно утверждать, что при $r > 0$ градиент $p_{\delta u}$ является убывающей положительной функцией времени, а переменная u по шагам итераций подчинена условию

$$u_0(t) < u_0^j(t) < \dots < u_0^2(t) < u_0^1(t).$$

Это условие характеризует свойство монотонности процесса (3.1) и для процедуры квазилинеаризации по вычисленному начальному приближению локально-оптимального управления поясняется рис. 2.

2. Квадратичная сходимость.

Второе важное и не так очевидное свойство градиентной процедуры (3.1) – это квадратичная сходимость.

Утверждение 1. Для градиентной процедуры (3.1) справедлива следующая оценка:

$$\|u_0^{j+1} - u_0\| \leq k_1 \|u_0^j - u_0\|^2, \quad |u_0^{j+1} - u_0^j| \leq k_2 \|u_0^j - u_0^{j-1}\|^2, \quad (5.5)$$

где $k_1 = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0^1} (\xi^1(\theta)/2)$, $k_2 = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0^1} (|\xi^1(\theta)|/2 + 1/\Delta t E_2)$, E_2 – единичная матрица размера $m \times m$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Вторая оценка в формуле (5.5) получается путем непосредственного преобразования рекуррентного соотношения (см. Приложение)

$$u_{0i}^{j+1} - u_{0i}^j = \xi_i^1(u_{0i}^j) - \xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) = (u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1}) \xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) + \frac{(u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1})^2}{2} \xi_i^1(\theta), \quad (5.6)$$

где $u_{0i}^{j-1} \leq \theta \leq u_{0i}^j$, $\xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) = \dot{u}_{0i}^{j-1} + \vartheta_i(u_{0i}^{j-1}) \Delta t$.

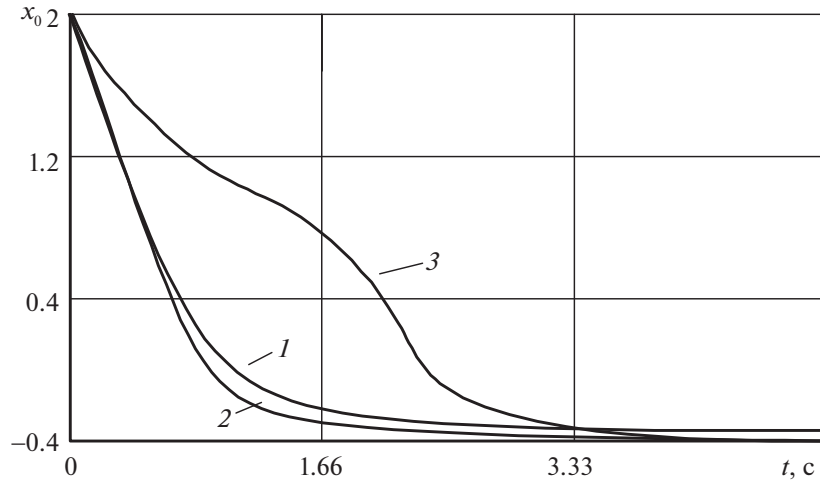


Рис. 3. Результаты моделирования при различных стратегиях управления по координате x_1

С другой стороны, $\dot{u}_{0i}^j = \dot{u}_{0i}^{j-1} + \dot{\vartheta}_i(u_{0i}^{j-1})\Delta t$ (см. Приложение). Тогда $\xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) = \dot{u}_{0i}^j = (u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1})/\Delta t$ и уравнение (5.6) запишется в виде

$$u_{0i}^{j+1} - u_{0i}^j = (u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1})^2 \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \xi_i^1(\theta) \right), \quad (5.7)$$

из которого получается оценка

$$|u_{0i}^{j+1} - u_{0i}^j| \leq k_{2i} |u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1}|^2, \quad (5.8)$$

где $k_{2i} = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0} (|\xi_i^1(\theta)|/2 + 1/\Delta t)$.

Уравнение (5.8), записанное в векторной форме, является второй искомой оценкой в формулах (5.5). Свойство, выражаемое вторыми оценками в выражениях (5.5), называется квадратичной сходимостью [4]. Очевидно, что сходимость метода квазилинеаризации значительно ускоряется по мере приближения $(x_0^j, u_0^j) \rightarrow (x_0, u_0)$. Получается, что каждый следующий шаг асимптотически удваивает число правильных знаков в данном приближении. Следовательно, свойство квадратичной сходимости оказывается особенно полезным при решении многомерных задач, и не только потому, что время расчета прямо пропорционально числу итераций, но и в силу возрастания ошибок округления при этих итерациях.

Пример. Управление колебательным процессом на скользящем интервале оптимизации.

Рассмотрим управление квазилинейным колебательным звеном в задаче слежения ($t_k = t + T_n$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2^3 + b u, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $b = 1$.

Цель управления состоит в стабилизации заданного состояния $x_3 = -0.4$ при ограничении на управление $|u| = 2$ и выбранных начальных условиях: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$.

Требуется решить задачу синтеза оптимального управления: через минимизацию ФОР (3.2):

$$I = \int_{t_0}^{t+T_n} \{0.5\beta (x_1(t) - x_3)^2 + u_{\text{оп}} k^{-1} u + 0.5r^{-1} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}_{\text{оп}}^2)\} d\theta, \quad (5.10)$$

реализовать стабилизирующую заданное состояние приближенно-оптимальную стратегию управления $u(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$ и сравнить полученный результат с результатами минимизации критерия взвешенной обобщенной работы (КВОР) [21]:

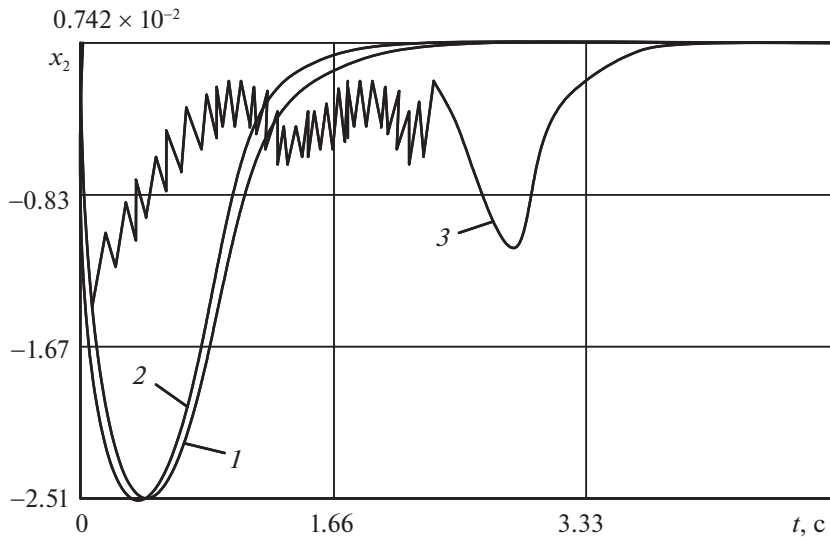


Рис. 4. Результаты моделирования при различных стратегиях управления по координате x_2

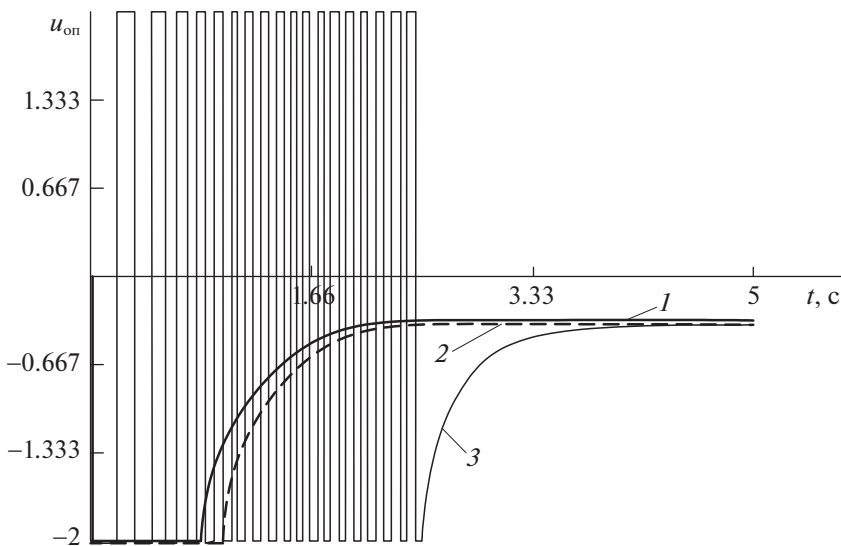


Рис. 5. Реализация различных стратегий управления

$$I = \int_{t_0}^{t+T_n} \{0.5\beta(x_1(t) - x_3)^2 + u_{оп}k^{-1}u\}d\theta, \tag{5.11}$$

при релейном $u = 2\text{sign}u_{оп}$, $-2 \leq u \leq 2$ и релейно-линейном законах управления $u = 2\text{sat}u_{оп}$: $u = 2u_{оп}$, если $u \in \text{int}U$, $U \subseteq R^m$ и $u = 2\text{sign}u_{оп}$, если $|u| \geq 2$.

Результаты минимизации ФОР (5.10) и КВОР (5.11) на основе так называемого “алгоритма модифицированного” (рис. 1) приведены на рис. 3–5.

Для проверки работоспособности алгоритма при стратегии совмещенного синтеза $u \rightarrow u_{оп}$ (кривые 2) и при субоптимальных стратегиях управления (кривые 1, 3) проводился сравнительный анализ численных расчетов.

Моделирование проводилось при шаге оптимизации $\Delta t = 0.05c$, $\varepsilon_3 = 0.01$ и при выбранных эмпирическим путем значениях параметров ФОР (5.10) и КВОР (5.11): $T_{\text{п}} = 1.6$, $\beta = 1.5$, $k = 1.2$, $r = 0.4$.

Сравнительный анализ численных расчетов показывает, что по точности и затратам на управление наиболее предпочтительна приближенно-оптимальная стратегия управления (кривые 2). Точность вычислений здесь обеспечивается за счет поинтервального уточнения точек стационарности локальной минимали при среднем числе итераций $j = 4-6$ на каждой длине оптимизации.

Качественно близкие результаты моделирования получаются при использовании комбинированной стратегии управления (кривые 1). Однако стабилизация заданного движения $x_3 = -0.4$ при применении релейно-линейного закона происходит с постоянной статической ошибкой $\Delta x_1 = 0.1$, что не всегда приемлемо с точки зрения выдерживания точностных характеристик регулятора.

Организация скользящего режима работы квазиоптимального регулятора относительно поверхности переключения – вычисляемой функции Ляпунова $V(t, x_0)$ – обеспечивается релейным законом управления (рис. 5). Использование релейного закона позволяет точно стабилизировать заданную выходную координату системы (5.9). Однако при этом заметно ухудшаются показатели качества переходных процессов и увеличиваются затраты на управление.

Заключение. Таким образом, совместное использование процедур интервальной и локальной оптимизации позволяет существенно упростить алгоритмы управления. Вместо того, чтобы для обеспечения ожидаемой квадратичной сходимости одновременно использовать характеристики первого и второго порядков (уравнения сопряженной системы и матричное нелинейное уравнение типа Риккати), предлагается применять только характеристики первого порядка, точки стационарности которых уточняются путем квазилинеаризации на длинах Δt , а грубое начальное приближение локальной минимали определяется из процедуры по схеме дифференциального динамического программирования.

На основе условий теорем 3, 4 разработано алгоритмическое обеспечение интегрированной САУ, стратифицированное по уровням управления воздушным судном (например, [22–26]), которое проверено на модельных задачах динамики перспективных автоматизированных систем предупреждения столкновений и преодоления сдвига ветра при заходе на посадку самолета среднего класса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Методика доказательства теоремы 3 сводится к следующему. Вводим расширенный вектор состояния $y = (x, \delta u)$ и преобразуем уравнения (2.15), (2.16) к виду

$$\dot{y} = f(t, y) + \Gamma_1 \vartheta, \quad (\text{П.1})$$

где $f(t, y) = (f(t, x_0, u_0) + \partial f / \partial u \cdot \delta u, 0)$ – векторная функция, получаемая при квазилинеаризации по схеме дифференциального ДП; $\Gamma_1 = [O \ E]^T$ – прямоугольная матрица при “новом” векторе управления ϑ ; E_1 – единичная матрица размерности $m \times m$ соответственно; $y(t_0) = (x(t_0), 0)$. Затем формируем ФОР для расширенного пространства состояний и управлений $X \times U \times T$ в виде (3.2) ($S_3(y(t_k)) = S_3(x(t_k))$).

Выписываем достаточные условия оптимальности:

$$\inf_{\vartheta \in R^m} \left(\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} (f(t, y) + \Gamma_1 \vartheta) + Q_p(t, y) + 0.5 \vartheta_0^T r^{-1} \vartheta_0 \right) = 0, \quad (\text{П.2})$$

из которых определяем оптимальные в локальном смысле “новые” управления ϑ :

$$\vartheta = \vartheta_0 = -r \Gamma_1 \frac{\partial \Phi^T(t, y)}{\partial y} = -r \frac{\partial \Phi^T(t, y)}{\partial \delta u}. \quad (\text{П.3})$$

Если в последних выражениях ввести обозначение $p_{\delta u} = \partial \Phi^T / \partial \delta u$, то оказывается выполненным условие (3.5) теоремы. Формула (4.3) может быть получена иначе через условие стационар-

ности: $\partial H / \partial \delta u = 0$, где $H(t, y, \varphi_y) = \partial \varphi(t, y) / \partial y (f(t, y) + \Gamma_1 \vartheta) + Q_p(t, y) + 0.5 \vartheta_0^T r^{-1} \vartheta_0$ – гамильтониан системы (4.1), $\partial \varphi(t, y) / \partial y$ – вектор-строка размерности $1 \times (n + m)$.

Выполняем постановку формулы (П.3) в выражение (П.2), в результате чего достаточные условия оптимальности запишутся в форме уравнения

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} f(t, y) + Q_p(t, y) = 0, \quad (\text{П.4})$$

где функция $\varphi(t, y)$ имеет смысл функции Ляпунова в теории устойчивости.

Формула (П.4) определяет “свободное” движение системы (4.1). Полная производная, вычисленная на “свободном” движении, вычисляется с помощью выражения

$$\dot{\varphi}(t, y) = \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} f(t, y). \quad (\text{П.5})$$

Уравнение (П.4) с учетом выражения (П.5) принимает вид

$$\dot{\varphi}(t, y) = -Q_p(t, y), \quad (\text{П.6})$$

из которого следует условие (3.6) теоремы 3.

С помощью метода характеристик определяем решение уравнения в частных производных (П.4) в виде канонически сопряженной системы [1]

$$\dot{y} = \frac{\partial H^T(t, y, p)}{\partial p} = f(t, y), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H^T(t, y, p)}{\partial y} = -\frac{\partial f^T(t, y)}{\partial y} p - \frac{\partial Q_p^T(t, y)}{\partial y}, \quad (\text{П.7})$$

где $H(t, y, p) = \partial \varphi(t, y) / \partial t + \partial \varphi(t, y) / \partial y \cdot f(t, y)$ – гамильтониан “свободного” движения системы (П.1), $p = \partial \varphi^T(t, y) / \partial y$ – вектор-столбец частных производных размерности $n \times m$.

Раскрывая векторы y, p через субвекторы $x, \delta u$ и $p_x, p_{\delta u}$ в результате декомпозиции соотношений (П.7) получим формулы, соответствующие условиям (2.15), (3.3)–(3.4) теоремы 3.

Через процедуру поиска слабой локальной минимали $u_{\text{он}}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{он}}(t, t) = u_0(t)$ находим оптимальный в смысле достижения локального минимума функционала (1.4) процесс (1.3). Таким образом, оказываются выполненными все условия теоремы 3. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4 для схемы дифференциального ДП (теорема 3). Уравнения канонически сопряженной системы (1.3), (5.1) и формула (5.4) получаются из (2.15), (3.3), (3.6) при $u = u_0(t)$. Условия стационарности (5.2) и условие 3) теоремы 2 можно вывести, следуя схеме доказательства от противного (схема Бласса). Для этого рассмотрим вариации управления, определяемые градиентной процедурой (3.1), которая на малых длинах оптимизации Δt представлена соотношением $u(t) = u_0(t) + \vartheta \Delta t$.

Из последнего выражения видно, что слабая локальная минималь (x_0, u_0) формируется через выполнение в каждой точке стационарности условия $u = u_0(t)$: точно – за счет обеспечения равенства нулю предельных элементов минимизирующих последовательностей по u : $\vartheta = \vartheta_0 = 0$; приближенно – путем уменьшения длин оптимизации: $\Delta t \rightarrow 0$.

Предположим обратное – существует управление $\tilde{u}(t) = u_0(t) + \Delta u(t)$, при котором минимум локального критерия меньше минимума локального функционала: $\tilde{I}(t) < I(t)$. Тогда $d(\tilde{u}(t) - u_0(t)) / dt = d\Delta u(t) / dt$, что противоречит условиям локальной оптимальности управления в (5.10): $d\delta u / dt = 0$. Таким образом, $\Delta u(t) = 0$ и $\vartheta = \vartheta_0 = 0$.

Далее из формулы (3.5) теоремы 3 следует, что при отсутствии левых делителей нуля субвектор $p_{\delta u}$ расширенного вектора косостояния равен $p_{\delta u} = 0$.

Производная от этого субвектора также будет равна нулю: $\dot{p}_{\delta u} = 0$, откуда в силу выполнения соотношения $\dot{p}_{\delta u} = \partial H^T / \partial \delta u$ оказывается справедливым уравнение (5.2) условия 2) теоремы 4. Теорема доказана.

Доказательство справедливости оценки (5.5) сводится к следующему. Пусть u_0^1 – начальное приближение вектора локально-оптимального управления u_0 , а общее рекуррентное соотношение выписано из (3.1):

$$u_0^{j+1} = u_0^j + \vartheta(u_0^j)\Delta t, \quad (\text{П.8})$$

где $\vartheta(u_0^j) = rp_{\delta u}(u_0^j)$.

Чтобы убедиться в справедливости оценки в (П.8) для i компонент векторов u_0^{j+1} , u_0 , $\vartheta(u_0^j)$, запишем

$$u_{0i}^{j+1} - u_{0i} = u_{0i}^j + \vartheta_i(u_0^j)\Delta t - (u_{0i} + \vartheta_i(u_0)\Delta t) = \xi_i^1(u_0^j) - \xi_i^1(u_0), \quad (\text{П.9})$$

где $\xi_i^1(u) = u_i + \vartheta_i(u)\Delta t$, $\vartheta_i(u_0) = -r_i p_{\delta u}^i(u_0) = 0$, (см. теорему 4).

Выражение (П.9) представим рядом Тейлора, в котором учтем первые три члена, включая остаточный $u_{0i}^{j+1} - u_{0i} = (u_{0i}^j - u_{0i})\xi_i^1(u_0) + 0.5(u_{0i}^j - u_{0i})^2\xi_i^1(\theta)$. Здесь по теореме о среднем (теореме Лагранжа [4]) остаточный член равен

$$\int_{u_{0i}}^{u_{0i}^j} (u_{0i}^j - \zeta)\xi_i^1(\zeta)d\zeta = \frac{(u_{0i}^j - u_{0i})^2}{2}\xi_i^1(\theta),$$

где θ – некоторое значение независимой переменной, промежуточное между u_{0i}^{j+1} , u_{0i} ; $u_{0i} \leq \theta \leq u_{0i}^j$.

Поскольку $\xi_i^1(u) = u_i + \vartheta_i(u)\Delta t$, то в точках стационарности $u_i = u_{0i}$: $\xi_i^1(u) = 0$, так как u_{0i} – не варьируемый на длинах оптимизации параметр, а условие $p_{\delta u}^i(u_0) = 0$ следует из теоремы 4. Следовательно, справедлива оценка

$$|u_{0i}^{j+1} - u_{0i}| \leq k_{1i}|u_{0i}^j - u_{0i}|^2, \quad (\text{П.10})$$

где $k_{1i} = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0^j} (\xi_i^1(\theta)/2)$.

Формула (П.10), записанная в векторном виде, является первой искомой оценкой в (5.5). Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
2. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. С. 15–18.
4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
5. Атанс М.М., Фалб П. Оптимальное управление / Под ред. Ю.И. Топчиева. М.: Машиностроение, 1968.
6. Хрусталева М.М. О достаточных условиях абсолютного минимума // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1026–1029.
7. Москаленко А.И. Оптимальное управление моделями экономической динамики. Новосибирск: Наука. СО, 1999.
8. Jacobson D.H. Differential Dynamic Programming Methods for Solving Bang-bang Control Problems // IEEE Trans. On Autom. Control. 1968. V. AC-13. № 6. P. 661–675.
9. Батуринов В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука. СО, 1997.
10. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
11. Сизых В.Н., Данеев А.В. Квазилинеаризация и достаточные условия оптимальности в задаче улучшения и локализации // Изв. Самарского научного центра РАН. 2016. Т. 18. № 4 (6). С. 1250–1260.
12. Sizykh V.N., Daneev A.V., Dambaev J.G. Methodology of Approximately Optimal Synthesis of Fuzzy Controllers for Circuit of Improvement and Localization // Far East J. of Mathematical Sciences. 2017. V. 101. № 3. P. 487–506.
13. Сизых В.Н. Итерационно-релаксационный метод приближенно-оптимального синтеза регуляторов // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 5. С. 571–574.

14. *Болтянский В.Г.* Отделимость выпуклых конусов – общий метод решения экстремальных задач // Оптимальное управление. М.: Знание, 1978.
15. *Диль В.Ф., Сизых В.Н.* Методика синтеза законов управления летательным аппаратом на основе траекторного прогнозирования и метода обратных задач динамики // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2015. № 4 (48). С. 134–138.
16. *Константинов Г.Н.* Нормирование воздействий на динамические системы. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1983.
17. *Черноусько Ф.Л., Баничук В.П.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
18. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1974.
19. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Физматгиз, 1962.
20. *Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Изд-во Магистр, 1998.
21. *Буков В.Н., Сизых В.Н.* Приближенный синтез оптимального управления в вырожденной задаче аналитического конструирования // АиТ. 1999. № 12. С. 16–32.
22. *Диль В.Ф., Сизых В.Н.* Синтез оптимального управления воздушным судном на основе уравнений нелинейной динамики // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20. № 3. С. 139–148.
23. *Данеев А.В., Диль В.Ф., Сизых В.Н.* Оптимизация процессов управления пространственным движением воздушного судна на основе уравнений нелинейной динамики // Изв. Самарского научного центра РАН. 2017. Т. 19. № 1. С. 195–200.
24. *Буков В.Н., Сизых В.Н.* Метод и алгоритмы решения сингулярно-вырожденных задач аналитического конструирования // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 5. С. 43–51.
25. *Сизых В.Н.* Итерационно-релаксационный метод нелинейного синтеза регуляторов // АиТ. 2005. № 6. С. 108–119.
26. *Данеев А.В., Сизых В.Н.* Методология проектирования алгоритмического обеспечения интегрированных систем управления авиационными транспортными средствами на основе уравнений нелинейной динамики. М.: Наука, 2021. 295 с.