ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 6, с. 56–64

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 65.012.122

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБМЕНОВ В СЕТИ АВТОНОМНЫХ АБОНЕНТОВ[1]

© 2022 г. А. М. Грузликов[a,*], Н. В. Колесов[a,**], Е. Г. Литуненко[a,***], Ю. М. Скородумов[a,****]

[a] ГНЦ РФ АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: agruzlikov@yandex.ru

**e-mail: kolesovnv@mail.ru

***e-mail: lisa.litunenko@gmail.com

****e-mail: skorum@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2022 г.
После доработки 06.06.2022 г.
Принята к публикации 01.08.2022 г.

Предложены субоптимальные алгоритмы планирования последовательности информационных сообщений в сети связи подвижных автономных абонентов. В алгоритмах в качестве критериев оптимальности используются верхние границы либо суммарного времени доставки всех сообщений из передаваемой последовательности, либо среднего по сообщениям времени доставки. Рассмотрено несколько постановок задачи, различающихся наличием или отсутствием предварительной упорядоченности на множестве сообщений.

DOI: 10.31857/S0002338822060105

Введение. В настоящее время автономные системы используются в различных областях науки и техники. Обсуждение этих вопросов занимает важное место и в современной научно-технической литературе [1–5]. Нередко применение подобных систем связано с работой в опасных или вредных для человека условиях, вплоть до боевого применения. Они работают не только на земле, но и в космосе, воздухе и под водой. Функциональное разнообразие автономных систем весьма велико. Среди них системы обработки информации, управления, робототехнические системы. Понятно, что в случае применения сети из автономных систем (абонентов) круг решаемых задач существенно шире, нежели в случае использования одиночной системы. В связи с этим разработке таких систем специалисты уделяют наибольшее внимание, фокусируясь обычно на исследовании подвижных систем, которые, как правило, основываются на некоторой мультиагентной концепции. Ясно, что работа мультиагентной системы предполагает необходимость обмена информацией между агентами для координации совместных действий. В этом случае встает вопрос об использовании сети из автономных абонентов (АА). Информационное взаимодействие между АА может осуществляться в разных условиях. Прежде всего, может быть различной среда распространения, например, воздушная или водная [6–10]. Для каждой среды справедлива своя скорость распространения информации, своя помехосигнальная обстановка, скорость затухания информационного сигнала и т.п. Так, например, скорость обмена информацией в водной среде через гидроакустический канал существенно ниже скорости обмена в воздушной среде через радиоканал. Понятно, что в общем случае сообщение будет достигать по сети узла-адресата не напрямую, а через цепочку узлов-ретрансляторов, но ограничение на радиус обмена в каждом случае будет свое. Кроме того, при движении АА маршрут доставки сообщения может меняться из-за изменения топологии сети. В этих условиях существенно возрастают требования к организации информационных обменов, что делает необходимым оптимизацию для передаваемых сообщений не только используемых маршрутов, но и последовательности этих сообщений.

Обсуждаемый в настоящей статье материал посвящен исследованию вопросов организации информационных обменов в сети АА. Основной ее вклад связан с предложениями по субопти-

[1] Работа проводилась при поддержке гранта РНФ № 22-29-00339.

мизации последовательности передачи сообщений, т.е. по планированию информационных обменов.

1. Постановка задачи. Далее предполагается, что рассматриваемая сеть имеет вид неориентированного графа и состоит из одинаковых узлов, функционирующих по одному и тому же алгоритму. Сеть стационарна, что гарантирует постоянство средних значений интенсивностей потоков обменов (заявок), обслуживаний и очередей [11]. В результате взаимного обмена сообщениями каждому узлу известны координаты всех остальных узлов, что позволяет ему строить минимальные по расстоянию маршруты (пути в неориентированном графе) доставки сообщений. Доставка сообщений происходит с помощью некоторого известного алгоритма маршрутизации, опирающегося на таблицы маршрутизации [12]. Для любого сообщения маршрут всегда существует, т.е. аппараты не расходятся слишком далеко друг от друга. В простейшем случае, когда узел-адресат находится на допустимом расстоянии, маршрут доставки одношаговый (не использующий ретранслирующих узлов). Каждый узел периодически излучает сформированную в нем последовательность сообщений, которая состоит из собственных сгенерированных в узле сообщений, а также из сообщений, поступивших в данный узел извне для ретрансляции к другому адресату. Понятно, что в общем случае различным упорядоченностям сообщений, передаваемых узлом, будет соответствовать различная оперативность доставки сообщений. Далее в качестве критерия оперативности используем либо суммарное время Δ_s доставки всех сообщений из передаваемой последовательности, либо среднее по сообщениям время $\overline{\Delta}$ доставки. Для удобства изложения будем сопровождать параметры сообщения, расположенного на k-й позиции в очереди рассматриваемого узла, нижним индексом $[k]$. В результате для такого сообщения время ожидания в очереди и время переноса имеют обозначения $e^w_{[k]}$ и $e^t_{[k]}$ соответственно. При этом под временем переноса будем понимать время от момента начала передачи сообщения до момента конца его приема, а под временем доставки $\Delta_{[k]}$ сообщения между передающим узлом и узлом-адресатом — сумму

$$\Delta_{[k]} = e^w_{[k]} + e^t_{[k]}. \tag{1.1}$$

Для одношагового маршрута получаем

$$e^t_{[k]} = e_{[k]} + \frac{d_{[k]}}{v} = e_{[k]} + e^d_{[k]}. \tag{1.2}$$

Здесь $e_{[k]}$ — длительность сообщения на k-й позиции в очереди, $e^d_{[k]} = d_{[k]}/v$ — время прохождения сигнала между передающим узлом и узлом-адресатом, $d_{[k]}$ — расстояние между передающим узлом и узлом-адресатом для сообщения на k-й позиции в очереди, v — скорость распространения звука в заданной акватории.

В случае многошагового маршрута выражение для времени доставки сообщения принимает вид

$$\Delta_{[k]} = \sum_{i=1}^{r_{[k]}} (e^w_{[k],i} + e^t_{[k],i}), \tag{1.3}$$

где $r_{[k]}$ — общее число шагов маршрута, по которому передается сообщение, находящееся на k-й позиции в очереди, i — порядковый номер шага маршрута.

Преобразуем это выражение, выделив из общей суммы слагаемое, характеризующее первый шаг:

$$\Delta_{[k]} = e^w_{[k]} + e^t_{[k]} + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} (e^w_{[k],i} + e^t_{[k],i}). \tag{1.4}$$

Ясно, что в случае многошагового маршрута предсказать размер и содержание очередей сообщений в узлах-ретрансляторах на маршруте следования передаваемого сообщения невозможно. В связи с этим при дальнейшем анализе воспользуемся не точным значением для $\Delta_{[k]}$, а его оценкой $\hat{\Delta}_{[k]}$, где время ожидания на каждом последующем шаге, кроме первого, заменим на его верхнюю границу. Для этого обозначим через $\overline{n}$ верхнюю границу для длины очередей, а через E —

верхнюю границу длительности сообщений. В результате их произведение составит верхнюю границу времени ожидания на любом шаге для рассматриваемого сообщения. Тогда получаем

$$\hat{\Delta}_{[k]} = e^{w}_{[k]} + e^{t}_{[k]} + (r_{[k]} - 1)\overline{n}E + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e^{t}_{[k],i}. \tag{1.5}$$

Понятно, что это выражение представляет собой верхнюю границу для времени доставки сообщения, находящегося на k-й позиции в очереди рассматриваемого узла.

Итак, задача состоит в разработке алгоритмов субоптимального упорядочения (планирования) выходной очереди сообщений, построенных с помощью прогнозных оценок для времен доставки сообщений. При передаче сообщения по многошаговому маршруту алгоритм упорядочения применяется на каждом его шаге во всех ретранслирующих узлах сети с формированием новых прогнозов. Для этого далее предлагается идти по пути использования известных [13—17] и разработки новых алгоритмов планирования.

2. Планирование неупорядоченных сообщений. Рассмотрим сначала случай, когда на множестве передаваемых сообщений отсутствует какая-либо предварительная упорядоченность. В качестве критерия будем применять оценку (верхнюю границу) $\hat{\Delta}_s$ для суммарного времени доставки всех сообщений, выражение для которой можно получить из (1.5):

$$\hat{\Delta}_s = \sum_{k=1}^{n} \hat{\Delta}_{[k]} = \sum_{k=1}^{n} [e^{w}_{[k]} + e^{t}_{[k]} + (r_{[k]} - 1)\overline{n}E + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e^{t}_{[k],i}]. \tag{2.1}$$

Тогда справедливо утверждение.

У т в е р ж д е н и е 1. Верхняя граница $\hat{\Delta}_s$ для суммарного времени доставки в системе связи n неупорядоченных сообщений минимальна, если сообщения упорядочены по неубыванию длительностей:

$$e_{[1]} \le e_{[2]} \le \ldots \le e_{[n]}. \tag{2.2}$$

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Теперь предположим, что на множестве сообщений нужно задавать некоторые приоритеты. Тогда можно использовать в качестве критерия верхнюю границу $\hat{\Delta}^{w}_{s}$ для суммарного взвешенного времени доставки сообщений:

$$\hat{\Delta}^{w}_{s} = \sum_{k=1}^{n} w_{[k]}\hat{\Delta}_{[k]}, \tag{2.3}$$

где $w_{[k]}$ — вес сообщения, расположенного на k-й позиции в очереди.

У т в е р ж д е н и е 2. Верхняя граница $\hat{\Delta}^{w}_{s}$ для суммарного взвешенного времени доставки неупорядоченных сообщений в системе связи минимальна, если выполняется

$$\frac{e_{[1]}}{w_1} \le \frac{e_{[2]}}{w_2} \le \ldots \le \frac{e_{[n]}}{w_n}. \tag{2.4}$$

3. Планирование частично упорядоченных сообщений. Пусть планируемые для передачи сообщения частично упорядочены путем разбиения на p непересекающихся групп со строгим упорядочением сообщений внутри них и размером n_i $i = \overline{1, p}$. Подобное упорядочение может потребоваться в силу разных дополнительных соображений, связанных с управлением передачей информации через сеть. Предполагается, что при составлении общего плана должен сохраняться зафиксированный в группе порядок передачи сообщений, а прерывания групп сообщений запрещены. Обозначим через e'_i суммарную длительность i-й группы сообщений:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n_i} e_{i,j}, \quad j = \overline{1, n_i}.$$

Утверждение 3. Верхняя граница $\hat{\Delta}_s^w$ для суммарного времени доставки сообщений в системе связи с p строго упорядоченными группами при запрете прерываний групп минимальна, если группы в плане упорядочены по неубыванию длительностей:

$$e'_{[1]} \le e'_{[2]} \le \ldots \le e'_{[p]}. \tag{3.1}$$

Пусть необходимо задать приоритеты на множестве групп сообщений. Тогда если $\hat{\Delta}_{g[k]}$ – верхняя граница времени доставки для группы, находящейся на k-й позиции в очереди, то следует минимизировать критерий

$$\hat{\Delta}_g^w = \sum_{k=1}^{p} w_{[k]}\hat{\Delta}_{g[k]}, \tag{3.2}$$

а группы сообщений с учетом утверждения 2 должны быть упорядочены по правилу

$$\frac{e'_{[1]}}{w_1} \le \frac{e'_{[2]}}{w_2} \le \ldots \le \frac{e'_{[p]}}{w_p}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что все описанные выше результаты остаются справедливыми, если в качестве критерия оптимальности использовать не верхнюю границу суммарного времени доставки, а среднюю по сообщениям верхнюю границу $\bar{\hat{\Delta}}$ (утверждения 1 и 2) или среднюю по группам сообщений верхнюю границу $\bar{\hat{\Delta}}_g$ (утверждение 3, а также (3.2)).

Ситуация усложняется, когда в условиях утверждения 3 требуется минимизировать среднюю по сообщениям верхнюю границу $\bar{\hat{\Delta}}$ времени доставки. Тогда если $n_{[k]}$ – размер группы, находящейся на k-й позиции в очереди, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Верхняя граница $\bar{\hat{\Delta}}$ среднего времени доставки сообщений в системе связи с p строго упорядоченными группами при запрете прерываний групп минимальна, если группы в плане упорядочены по неубыванию длительностей:

$$\frac{e'_{[1]}}{n_{[1]}} \le \frac{e'_{[2]}}{n_{[2]}} \le \ldots \le \frac{e'_{[p]}}{n_{[p]}}. \tag{3.4}$$

Наконец, рассмотрим наиболее сложную ситуацию, когда прерывание процесса передачи группы разрешено.

Утверждение 5. Верхняя граница $\bar{\hat{\Delta}}$ среднего времени доставки сообщений в системе связи с p строго упорядоченными группами при разрешении прерываний групп минимальна, если группы в плане упорядочены по правилам.

1. Для каждого сообщения j в i-й группе вычисляется условная верхняя граница среднего времени доставки (верхняя граница среднего времени доставки при условии размещения подгруппы сообщений, предшествующей $(j+1)$-му сообщению в i-й группе, в начале формируемой очереди):

$$\bar{\hat{\Delta}}_{i,j} = \frac{\sum_{h=1}^{j}\hat{\Delta}_{i,h}}{j}.$$

2. Для каждой i-й группы вычисляется

$$\bar{\hat{\Delta}}_{i,h_i} = \min(\bar{\hat{\Delta}}_{i,1}, \bar{\hat{\Delta}}_{i,2}, \ldots, \bar{\hat{\Delta}}_{i,n_i}).$$

3. Выбирается такая группа i^*, что

$$i^* = \arg\min_i \bar{\hat{\Delta}}_{i,h_i},$$

и первые h_{i^*} сообщений составляют начало очереди.

4. Снова вычисляются величины $\bar{\hat{\Delta}}_{i,h_i}$, но без учета сообщений, размещенных в очереди.

Таблица 1. Верхние границы времен доставки сообщений

Группа сообщений	$\hat{\Delta}_{i1}$	$\hat{\Delta}_{i2}$	$\hat{\Delta}_{i3}$	$\hat{\Delta}_{i4}$
M_1	5	15	4	–
M_2	3	14	–	–
M_3	10	2	5	7

Таблица 2. Условные средние времена доставки

Группа сообщений	$\bar{\hat{\Delta}}^1$				$\bar{\hat{\Delta}}^2$				$\bar{\hat{\Delta}}^3$				$\bar{\hat{\Delta}}^4$		$\bar{\hat{\Delta}}^5$		$\bar{\hat{\Delta}}^6$		$\bar{\hat{\Delta}}^7$	$\bar{\hat{\Delta}}^8$
M_1	5	10	8	–	5	10	8	–	15	9.5	–	–	15	9.5	15	9.5	15	9.5	4	–
M_2	3	8.5	–	–	14	–	–	–	14	–	–	–	14	–	14	–	14	–	14	14
M_3	10	6	5.6	6	10	6	5.6	6	10	6	5.6	6	5	6	7	–	–	–	–	–

5. Третий и четвертый шаги повторяются до упорядочения всех сообщений.

Еще раз заметим, что все сформулированные в выше приведенных утверждениях правила упорядочивания сообщений нацелены на минимизацию верхних границ суммарного или среднего времени доставки сообщений. Нетрудно видеть, что эти правила не изменятся, если в качестве цели упорядочивания выбрать не верхние, а нижние границы этих величин, основанные на выражении для нижней границы времени доставки:

$$\hat{\Delta}_{[k]} = e^w_{[k]} + e^t_{[k]} + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e^t_{[k],i}. \tag{3.5}$$

При формировании этого выражения для сообщений не учтены времена ожидания в очередях ретранслирующих узлов.

Пример. Сформируем очереди, используя алгоритмы из утверждений 4 и 5, для трех упорядоченных групп сообщений: $M_1 = \{m_{11}, m_{12}, m_{13}\}$, $M_2 = \{m_{21}, m_{22}\}$, $M_3 = \{m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}\}$. Верхние границы для времен доставки сообщений приведены в табл. 1.

Прерывания запрещены. Средние времена доставки сообщений для групп: $\bar{\hat{\Delta}}_1 = 8$, $\bar{\hat{\Delta}}_2 = 8.5$, $\bar{\hat{\Delta}}_3 = 6$.

Результирующая очередь: $Q_1 = M_3\, M_1\, M_2 = m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{22}$.

Прерывания разрешены. Действуя в соответствии с алгоритмом из утверждения 5, последовательно за 8 шагов размещаем в очереди фрагменты групп. Условные средние времена доставки фрагментов групп для всех шагов приведены в табл. 2.

Результирующая очередь: $Q_2 = m_{21}, m_{11}, m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}, m_{12}, m_{13}, m_{22}$.

Заключение. Исследованы вопросы планирования информационных обменов в сети автономных абонентов. Предложены субоптимальные для текущей топологии сети алгоритмы планирования обменов, удовлетворяющие критериям минимума верхних границ либо суммарного, либо среднего времени доставки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Преобразуем выражение (2.1):

$$\hat{\Delta}_s = \sum_{k=1}^{n} e^w_{[k]} + \sum_{k=1}^{n} e^t_{[k]} + \sum_{k=1}^{n} (r_{[k]} - 1)\bar{n}E + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e^t_{[k],i}.$$

Нетрудно видеть, что в этом выражении только первая сумма зависит от упорядоченности сообщений, а значит, только она и подлежит минимизации:

$$\tilde{\Delta} = \sum_{k=1}^{n} e_{[k]}^{w}.$$

Раскроем это выражение

$$\tilde{\Delta} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} e_{[j]} = (e_{[1]} + e_{[1]} + e_{[2]} + e_{[1]} + e_{[2]} + e_{[3]} + \ldots + e_{[1]} + \ldots + e_{[n-1]}) = \sum_{k=1}^{n}(n-k)e_{[k]}.$$

Известно, что сумма попарных произведений членов двух числовых последовательностей имеет минимальное значение, если одна из этих последовательностей возрастает, а другая убывает [18]. Так как коэффициенты $(n-k)$ уменьшаются с увеличением k, то минимум среднего времени доставки достигается только в том случае, когда $e_{[k]}$ возрастают с увеличением k или, по крайней мере, не убывают.

Доказательство утверждения 2. Предположим противное, а именно что упорядоченность очереди π минимизирует верхнюю границу $\hat{\Delta}_s^w$, но условие утверждения для нее не выполняется, т.е. существует такая позиция l, что

$$\frac{e_{[l]}}{w_l} > \frac{e_{[l+1]}}{w_{l+1}}. \tag{П.1}$$

Пусть L и L' – номера сообщений, находящихся в очереди π на позициях l и $l+1$. Сформируем очередь π', поменяв местами в очереди π сообщения L и L'. Доставка первых $l-1$ и последних $n_i - l - 1$ сообщений завершается в обеих очередях одновременно. В результате эти сообщения делают одинаковый вклад во взвешенную сумму в (2.3). Таким образом, различие в значении критерия (2.3) для двух вариантов очередей π и π'определяется слагаемыми для сообщений L и L'. Пусть

$$t = \sum_{j=1}^{l-1} e_{[j]}.$$

Тогда для π

$$w_L\Delta_L = w_{[l]}\Delta_{[l]} = w_L(t + e_L),$$

$$w_{L'}\Delta_{L'} = w_{[l+1]}\Delta_{[l+1]} = w_{L'}(t + e_L + e_{L'}),$$

$$w_L\Delta_L + w_{L'}\Delta_{L'} = w_L t + w_L e_L + w_{L'} t + w_{L'} e_L + w_{L'} e_{L'}.$$

Для π'

$$w_L\Delta_L = w_{[l+1]}\Delta_{[l+1]} = w_L(t + e_{L'} + e_L),$$

$$w_{L'}\Delta_{L'} = w_{[l]}\Delta_{[l]} = w_{L'}(t + e_{L'}),$$

$$w_L\Delta_L + w_{L'}\Delta_{L'} = w_L t + w_L e_{L'} + w_L e_L + w_{L'} t + w_{L'} e_{L'}.$$

Сопоставим для очередей π и π' значения суммарных вкладов критериев исследуемых сообщений L и L'. Нетрудно видеть, что для π вклад содержит $w_{L'} e_L$, но не содержит $w_L e_{L'}$ и наоборот. Однако из (П.1) следует, что $w_{L'} e_L \geq w_L e_{L'}$. Отсюда вытекает, что значение критерия (2.3) для π больше, чем для π' и что предположение о том, что эта упорядоченность минимизирует верхнюю границу $\hat{\Delta}_s^w$, неверно. Таким образом, доказываемое утверждение справедливо.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 3. Обозначим через $\hat{\Delta}_{g[k]}$ верхнюю границу времени доставки группы сообщений, находящейся среди групп на k-й позиции. Тогда верхняя граница суммарного времени доставки всех групп определяется выражением

$$\hat{\Delta}_g = \sum_{k=1}^{p} \hat{\Delta}_{g[k]}. \tag{П.2}$$

Перепишем его по аналогии с (2.1)

$$\hat{\Delta}_g = \sum_{k=1}^{p} \hat{\Delta}_{g[k]} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{k-1} e'_{[i]} + e'_{[k]} + \overline{\delta}_{g[k]} \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{k-1} e'_{[i]} + \sum_{k=1}^{p} e'_{[k]} + \sum_{k=1}^{p} \overline{\delta}_{g[k]},$$

где $\overline{\delta}_{g[k]}$ – верхняя граница для интервала времени от момента завершения излучения до момента завершения доставки всех сообщений из группы, находящейся на k-й позиции. В этом выражении вторая и третья суммы, представляющие суммарную длительность группы и интервал $\overline{\delta}_{g[k]}$, постоянны. При этом первая (двойная) сумма зависит от порядка групп. Применив анализ, аналогичный использованному при доказательстве утверждения 1, приходим к выводу, что группы в плане должны быть упорядочены в соответствии с (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 4. Запишем выражение для верхней границы времени доставки j-го сообщения группы, находящейся на k-й позиции:

$$\hat{\Delta}_{[k],j} = \hat{\Delta}_{[k]} - \overline{\delta}_{[k],j}, \tag{П.3}$$

где $\overline{\delta}_{[k],j}$ – верхняя граница интервала времени от момента завершения излучения j-го сообщения группы, находящейся на k-й позиции, до момента завершения процесса доставки всех сообщений этой группы.

Проанализируем выражение для верхней границы среднего по всей очереди времени доставки сообщения:

$$\bar{\hat{\Delta}}_m = \frac{\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_{[k]}} \hat{\Delta}_{[k],j}}{n}.$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись соотношением (П.3):

$$\bar{\hat{\Delta}}_m = \frac{\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_{[k]}} (\hat{\Delta}_{[k]} - \overline{\delta}_{[k],j})}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_{[k]}} \hat{\Delta}_{[k]}}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_{[k]}} \overline{\delta}_{[k],j}}{n}.$$

В этом выражении второе слагаемое – постоянная величина, не зависящая от порядка групп. Первое слагаемое не зависит от j и поэтому преобразуется к виду

$$\bar{\hat{\Delta}}_m = \frac{\sum_{k=1}^{p} n_{[k]} \hat{\Delta}_{[k]}}{n}.$$

Из сопоставления этого выражения, например, с выражением (2.3) следует справедливость данного утверждения.

Доказательство утверждения 5. Идея доказательства основывается на том, что выделяемые подгруппы можно рассматривать как группы из предыдущего утверждения, т.е. их хотя и можно прерывать, но, как доказывается, это прерывание не приводит к улучшению плана.

Рассмотрим подгруппу b некоторой группы, сформированную в соответствии с алгоритмом утверждения и содержащую n_b сообщений. Пусть

$$\bar{\hat{\Delta}}_b = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b}.$$

Если обозначить сообщение в подгруппе b парой (b, j), где j – порядковый номер сообщения в подгруппе, то подгруппа задается последовательностью $(b, 1), \ldots, (b, n_b)$. Прерывание подгруппы означает ее разбиение на две части b' и b'':

$$b' = (b,1),(b,2),\ldots,(b,i),$$

$$b'' = (b,i+1),(b,i+2),\ldots,(b,n_b).$$

Каждая из этих новых частей подгруппы имеет свою условную верхнюю границу времени доставки

$$\bar{\bar{\Delta}}_{b'} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \hat{\Delta}_{b,j}}{i}, \quad \bar{\bar{\Delta}}_{b''} = \frac{\sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b - i},$$

которые в соответствии с утверждением 4 определили бы место частей подгруппы в плане.

Нужно доказать, что подобное разбиение подгруппы b нецелесообразно, поскольку часть b' должна будет непосредственно предшествовать b'', и структура останется неизменной.

Покажем, что

$$\bar{\bar{\Delta}}_{b'} > \bar{\bar{\Delta}}_{b} > \bar{\bar{\Delta}}_{b''}.$$

Неравенство $\bar{\bar{\Delta}}_{b'} > \bar{\bar{\Delta}}_{b}$ следует из построения в соответствии с алгоритмом утверждения:

$$\bar{\bar{\Delta}}_{b'} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \hat{\Delta}_{b,j}}{i} > \bar{\bar{\Delta}}_{b} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \hat{\Delta}_{b,j} + \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{i + (n_b - i)}.$$

Умножая обе части неравенства на $i(i + (n_b - i)$, получаем

$$(i + (n_b - i))\sum_{j=1}^{i} \hat{\Delta}_{b,j} > i\left(\sum_{j=1}^{i} \hat{\Delta}_{b,j} + \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}\right).$$

Прибавляя к обеим частям последнего неравенства величину

$$(n_b - i)\sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j} - i\sum_{j=1}^{i} \hat{\Delta}_{b,j},$$

находим

$$(n_b - i)\sum_{j=1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j} > n_b \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{b} = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b} > \frac{\sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b - i} = \bar{\bar{\Delta}}_{b''}.$$

Отсюда следует, что разбиение любой группы, сформированной алгоритмом утверждения, на две подгруппы приводит к тому, что полученные подгруппы не удовлетворяют отношению порядка по минимуму $\bar{\bar{\Delta}}$, но поменять их местами нельзя из-за отношения предшествования в группе.

Покажем теперь, что перемещение b' вперед или b'' назад нецелесообразно, Пусть в исходном описании a- и c-подгруппы, первая из которых предшествует b, а вторая следует за b, т.е.

$$\bar{\bar{\Delta}}_{a} \le \bar{\bar{\Delta}}_{b} \le \bar{\bar{\Delta}}_{c}.$$

Подгруппа b' не может быть размещена перед a, так как

$$\bar{\bar{\Delta}}_{a} \le \bar{\bar{\Delta}}_{b} \le \bar{\bar{\Delta}}_{b'}.$$

Она не может быть продвинута и дальше вперед, поскольку для любой подгруппы, предшествующей a, значение $\bar{\bar{\Delta}}$ не превосходит $\bar{\bar{\Delta}}_a$. Подгруппу b' нельзя разместить и внутри a, разделив a на две части a' и a'', так как

$$\bar{\bar{\Delta}}_{a''} < \bar{\bar{\Delta}}_a \le \bar{\bar{\Delta}}_b < \bar{\bar{\Delta}}_{b'},$$

и b' нельзя расположить впереди a''. Аналогично доказывается, что b'' нельзя разместить внутри или после c.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009. 280 с.
2. *Amato C., Konidaris G.D., Cruz G., Maynor C.A., How J.P., Kaelbling L.P.* Planning for Decentralized Control of Multiple Robots under Uncertainty // Proc. of IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation. Washington, 2015. P. 1214–1248.
3. *Амелин К.С., Амелина Н.О., Граничин О.Н.* Адаптивная мультиагентная операционная система реального времени для комплексов БПЛА // Актуальные проблемы Российской космонавтики. Труды XXXVIII академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН, 2014. С. 654.
4. *Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Костенко В.В. и др.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. Владивосток: Дальнаука, 2018. 368 с.
5. *Giger G., Kandemir M., Dzielski J.* Graphical Mission Specification and Partitioning for Unmanned Underwater Vehicles // J. of Software (JSW). 2008. V. 3. №7. P. 42–54.
6. *Федосов В.П., Тарасов С.П., Пивнев П.П. и др.* Сети связи для подводных автономных роботизированных комплексов. Таганрог: ЮФУ, 2018. 178 с.
7. *Панкратов Ф.С., Малахов И.М.* Актуальные и перспективные способы построения беспроводных гидроакустических сетей доступа // Управление большими системами. 2021. Вып. 91. С. 120–143.
8. *Hamilton A., Holdcroft S., Fenucci D., Mitchell P., Morozs N., Munafò A., Sitbon J.* Adaptable Underwater Networks: The Relation between Autonomy and Communications // Remote Sensing. 2020. V. 12.
9. *Туфанов И.Е., Щербатюк А.Ф.* Некоторые результаты морских испытаний централизованной системы управления группой морских роботов // Управление большими системами. 2016. № 59. С. 233–246.
10. *Кебкал К.Г., Машошин А.И., Мороз Н.В.* Пути решения проблем создания сетевой подводной связи и позиционирования // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. № 2 (105). С. 106–135.
11. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
12. *Тель Ж.* Введение в распределенные алгоритмы. М.: МЦНМО, 2009. 616 с.
13. *Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В.* Теория расписаний. М.: Наука, 1975. 282 с.
14. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Анализ двухуровневых потоковых сетей ресурсообеспечения // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 81–94.
15. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: МГУ, 2011. 222 с.
16. *Liu J.W.S.* Real-Time Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs. NJ, 2000. 600 p.
17. *Cottet F., Kaiser J., Mammeri Z.* Scheduling in Real-Time Systems. John Wiley & Sons Ltd, 2002.
18. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.