ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 1, с. 164–176

РОБОТОТЕХНИКА

УДК 531.36

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОВОРОТА КОРПУСА ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛИ[1]

© 2023 г. **М. А. Гарбуз[a,*], М. З. Досаев[a], В. А. Самсонов[a]**

[a] *НИИ механики МГУ, Москва, Россия*

**e-mail: misha-garbuz@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.
После доработки 09.09.2022 г.
Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается движение вибрационного робота, состоящего из корпуса, двух однородных маховиков и дебаланса. Построена математическая модель плоскопараллельного движения. Показана принципиальная возможность управления дебалансом, результатом которого является поворот робота в горизонтальной плоскости. Описаны зависимости угла поворота корпуса от параметров системы. Определены условия полной остановки корпуса после совершения поворота. Проанализировано смещение корпуса из начального положения.

DOI: 10.31857/S0002338823010031, **EDN:** IZZMOG

Введение. Существует класс устройств, способных передвигаться в пространстве за счет неравномерного периодического движения внутренних элементов и сил взаимодействия различной природы между корпусом и внешней средой. Вопрос о возможности создания таких аппаратов возник в 1964 г. в связи с попыткой дискредитации ньютоновой механики, но систематические научные его исследования начались только в последнее время, например с работы [1], и продолжаются до сих пор.

С физической точки зрения способ движения таких устройств близок к виброперемещениям. Теория вибрационной механики была введена в [2]. Будем называть такие устройства вибрационными роботами. Изолированность их двигающихся частей от внешних воздействий делает актуальным применение таких роботов в условиях агрессивных сред, например, в глубине водоемов, в экстремальных климатических условиях Арктики, пустынь или на других планетах, а также в медицине [3, 4].

В [5] рассмотрена двумерная задача о наиболее быстром вращении твердого тела при перемещении внутренней массы. Способ управления ориентацией твердого тела при помощи вспомогательных масс, движущихся относительно тела, предложен в [6]. В [7] аналитически и экспериментально исследуется движение по шероховатой горизонтальной плоскости мобильного робота капсульного типа, управляемого периодической упругой силой. Результаты модельных и экспериментальных исследований согласуются между собой.

Среди подобных механических систем особое место занимают мобильные роботы, состоящие из нескольких тел [8, 9], и роботы, перемещающиеся в жидкой среде [10–13]. В частности, в [10] изучается движение в идеальной жидкости произвольного двумерного тела с подвижной внутренней массой и можно добиться перемещения тела в заданную точку. В [14] показано, что мобильные роботы могут использовать высокочастотные параметрические колебания внутренней массы для создания быстрого и эффективного движения по шероховатой поверхности.

Описаны схемы, реализующие прямолинейное и плоское движение [15–18] в сопротивляющейся среде с вязким и сухим трением. Скольжение по шероховатой плоскости параллелепипеда с внутренними маховиком и подвижной точкой приведено в [19]. Показано наличие эффекта поворота тела вокруг вертикальной оси вследствие неравномерности нормального напряжения в области контакта. В [20] рассмотрено плоское движение твердого тела при перемещении двух внутренних масс. Возможен периодический режим движения, состоящий из нескольких фаз:

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00303).

покой, скольжение, отрыв, свободное движение над горизонтальной плоскостью, безударный контакт с плоскостью и скольжение по ней до остановки.

В [21] была представлена плоская модель вибрационного робота с несбалансированным внутренним ротором, опирающегося плоским дном на шероховатую плоскость. Предложен метод построения алгоритма управления вращением ротора, реализующий возможность корпуса оторваться от поверхности на практически нулевую высоту и в таком режиме полета совершить поступательное движение. Подобный метод был применен в [22–24] в задаче о плоском движении инерционного робота с одним дебалансом и одним маховиком. Маховик использовался для сохранения горизонтальной ориентации корпуса в режиме полета.

Непрямолинейное движение вибрационного робота по шероховатой плоскости рассмотрено в ряде работ [25–33]. В [25, 27, 28] для поворота использован однородный вращающийся ротор, установленный внутри полости твердого тела, а для линейного смещения – материальная точка с одной степенью свободы. В [26, 29, 32, 33] рассчитаны схемы робота с двумя осциллирующими вдоль заданных направлений материальными точками. В [9, 10] показана модель вибрационной системы с двумя роторами, вращающимися с переменной угловой скоростью. Движение робота вызвано силами инерции и трением между плоскостью и опорными частями корпуса.

В статье рассматривается режим полета пространственной конструкции робота с одним дебалансом и двумя маховиками. Этот режим реализуется посредством ускоренного движения дебаланса. Ось вращения дебаланса смещена от горизонтали на некоторый угол, что позволяет корпусу в режиме “полета” отклоняться от прямолинейного движения и поворачивать на определенный угол вокруг вертикали. Предполагается, что маховики обеспечивают стабилизацию горизонтальной ориентации корпуса в таком режиме. Их вращение в данной работе детально не приводится.

1. Описание системы и постановка задачи. Рассматривается движение по шероховатой горизонтальной плоскости вибрационного робота (рис. 1), корпус массы m_1 которого содержит невесомую рамку с дебалансом – материальной точкой C массой m_2 и два маховика, представляющих собой однородные диски массой m_3, m_4 соответственно. Дно корпуса – плоская платформа с тремя точками опоры: P, L, R. Дебаланс движется по окружности в плоскости рамки вокруг точки S, являющейся центром масс корпуса ($SC = l$). Рамка наклонена на установочный угол $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ по отношению к плоскости, перпендикулярной платформе. Маховики вращаются вокруг своих осей динамической симметрии, проходящих через их центры A и B. Центры маховиков расположены на одинаковой высоте в плоскости, перпендикулярной дну корпуса и проходящей через его продольную ось. Ось вращения ротора A параллельна продольной оси дна, а ось ротора B перпендикулярна продольной оси дна.

На систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести на каждый элемент системы: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$ ($\vec{g}$ – ускорение силы тяжести), а также в случае контакта с опорой силы реакций $\vec{F}_P$, $\vec{F}_L$ и $\vec{F}_R$ в точках P, L, R соответственно. Силы реакции опоры имеют вертикальные $\vec{N}_P$, $\vec{N}_L$ и $\vec{N}_R$ и горизонтальные $\vec{R}_P$, $\vec{R}_L$ и $\vec{R}_R$ составляющие. При скольжении тела по опоре они связаны между собой по закону Кулона: $|\vec{R}_P| = \mu|\vec{N}_P|$, $|\vec{R}_L| = \mu|\vec{N}_L|$, $|\vec{R}_R| = \mu|\vec{N}_R|$, где μ – коэффициент трения между телом и опорной плоскостью. Аэродинамическими силами пренебрегаем. В дальнейшем можно учесть влияние воздействия на объект среды, в которой происходит движение, (воздуха/жидкости). Такое усложнение модели можно реализовать, опираясь на квазистатический подход к описанию взаимодействия твердого тела со средой, а также можно принимать во внимание эффекты, связанные с так называемыми присоединенными массами (см. [34]), или, используя феноменологические модели, например, вводить присоединенный осциллятор [35]. Учет воздействия среды не внесет принципиальных изменений в подход, применяемый далее для построения алгоритма управления.

Опишем внутренние силы, воздействующие на элементы системы:

момент от двигателя $\vec{M}_{12}$ влияет со стороны корпуса 1 на дебаланс 2, а со стороны дебаланса 2 на корпус 1 – момент $\vec{M}_{21}$;

момент от двигателя $\vec{M}_{13}$ действует со стороны корпуса 1 на маховик 3, а со стороны маховика 3 на корпус 1 – момент $\vec{M}_{31}$;

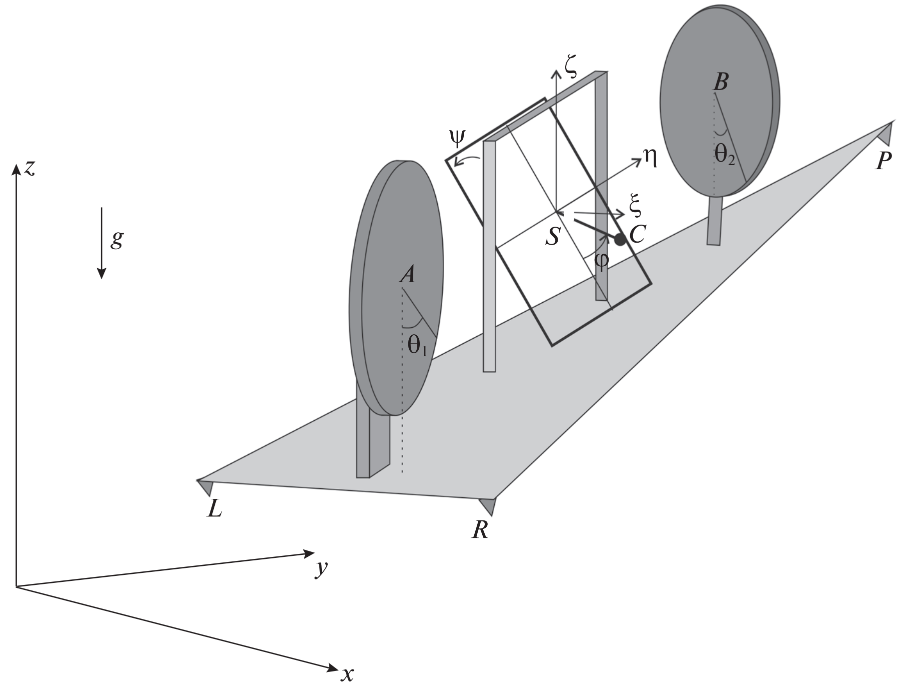

Рис. 1. Схема механической системы

момент от двигателя $\overrightarrow{M}_{14}$ поступает со стороны корпуса 1 на маховик 4, а со стороны маховика 4 на корпус 1 действует момент $\overrightarrow{M}_{41}$;

сила реакции от корпуса 1 на дебаланс 2 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, здесь $\vec{F}_{ij}$ – сила, с которой i-тое тело действует на j-тое; сила реакции от корпуса 1 на маховик 3 $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$;

сила реакции от корпуса 1 на маховик 4 $\vec{F}_{14} = -\vec{F}_{41}$.

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$: ось z направлена вертикально вверх, а плоскость xy параллельна опорной поверхности.

Пусть $S\xi\eta\zeta$ – подвижная система координат, оси которой направлены по главным осям инерции корпуса: $S\zeta$ перпендикулярна плоскости платформы, $S\eta$ лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости платформы, и направлена ортогонально $S\zeta$, $S\xi$ дополняет систему до правой. Положение системы описывается следующими обобщенными координатами: x, y, z – координаты точки S, α, β, γ – углы тангажа, крена и рыскания для корпуса соответственно, θ_A, θ_B – углы поворотов маховиков относительно корпуса (циклические координаты), φ – угол поворота дебаланса относительно корпуса, отсчитываемый от положения, максимально приближенного к платформе.

Ориентацию системы $S\xi\eta\zeta$ зададим углами Крылова:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha \\ -\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma\cos\beta + \sin\beta\sin\gamma & \cos\gamma\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}.$$

Угловая скорость подвижной системы координат

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\cos\gamma - \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix}.$$

Считаем, что в любой момент времени мы можем задавать необходимые угловые ускорения маховиков и дебаланса. Контролируя вращение дебаланса, можно изменять нормальные реакции в точках опоры, в том числе добиваться обнуления этих реакций. Задача маховиков состоит в том, чтобы поддерживать платформу горизонтальной, обеспечивая нулевой крен и тангаж. В отличие от [6], где для задания ориентации тела используются подвижные материальные точки, и от [36], где ориентация объектов стабилизируется магнитными моментами, горизонтальную стабилизацию платформы осуществляем маховиками. Для реализации этого в системе есть два управляющих ускорения маховиков, поэтому такая задача разрешима. В рамках настоящей работы будем считать, что движение маховиков организовано должным образом, и рассматривать только плоскопараллельное движение корпуса, при котором $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 0$, $\vec{\omega} = \dot{\gamma}\vec{e}_z$.

2. Математическая модель. Для каждого элемента механической системы определим уравнения, описывающие их движение.

2.1. К о р п у с. Запишем для корпуса теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс:

$$\begin{cases} m_1\dot{\vec{v}}_S = m_1\vec{g} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \vec{F}_P + \vec{F}_L + \vec{F}_R, \\ \dfrac{d}{dt}(\mathbb{J}_S\vec{\omega}) = \vec{M}_{21} + \vec{M}_{31} + \vec{M}_{41} + [\overline{SA}, \vec{F}_{31}] + [\overline{SB}, \vec{F}_{41}] + [\overline{SP}, \vec{F}_P] + [\overline{SL}, \vec{F}_L] + [\overline{SR}, \vec{F}_R]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{v}_S$ – скорость центра масс корпуса, $\mathbb{J}_S$ – тензор инерции корпуса, имеющий в связанных осях $S\xi\eta\zeta$ диагональный вид $\mathbb{J}_S = \mathrm{diag}(J_{S\xi}, J_{S\eta}, J_{S\zeta})$.

2.2. Д е б а л а н с. Получим систему уравнений, описывающую движение дебаланса:

$$\begin{cases} m_2\vec{a}_C = m_2\vec{g} + \vec{F}_{12}, \\ \dfrac{d\vec{K}_S}{dt} = \vec{M}_{12}. \end{cases}$$

Ускорение точки C запишем в следующей форме:

$$\vec{a}_C = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_s + [\vec{\omega}_C, \overline{SC}]\right).$$

Здесь $\vec{\omega}_C = \vec{\omega} + \dot{\varphi}(\cos\psi\vec{e}_\xi + \sin\psi\vec{e}_\zeta)$ – угловая скорость дебаланса, $\vec{K}_S = [\overline{SC}, \vec{v}_C]$ – момент количества движения дебаланса относительно центра масс, $\vec{v}_C$ – скорость точки C, вектор $\overline{SC}$ можно представить в виде $\overline{SC} = l\left(\cos\varphi\sin\psi\vec{e}_\xi + \sin\varphi\vec{e}_\eta - \cos\varphi\cos\psi\vec{e}_\zeta\right)$.

2.3. М а х о в и к и. Следующая система уравнений описывает движение маховиков:

$$\begin{cases} m_3\vec{a}_A = m_3\vec{g} + \vec{F}_{13}, \\ \dfrac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_4\vec{a}_B = m_4\vec{g} + \vec{F}_{14}, \\ \dfrac{d\vec{K}_B}{dt} = \vec{M}_{14}. \end{cases}$$

Здесь $\vec{K}_A = \mathbb{J}_A\vec{\omega}_A$, где $\vec{\omega}_A = \vec{\omega} + \dot{\theta}_A\vec{e}_\xi$ – угловая скорость маховика 3, $\vec{K}_B = \mathbb{J}_B\vec{\omega}_B$, где $\vec{\omega}_B = \vec{\omega} + \dot{\theta}_B\vec{e}_\eta$ – угловая скорость маховика 4, $\mathbb{J}_A = \mathrm{diag}(J_{A\xi}, J_{A\eta}, J_{A\zeta})$, $\mathbb{J}_B = \mathrm{diag}(J_{B\xi}, J_{B\eta}, J_{B\zeta})$ – центральные тензоры инерции маховиков в связанных осях $A\xi\eta\zeta$ и $B\xi\eta\zeta$. Ускорение центров масс маховиков $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ может быть найдено по формулам

$$\vec{a}_A = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overline{SA}]\right), \quad \vec{a}_B = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overline{SB}]\right).$$

Для упрощения предположим, что маховики имеют одинаковую массу $m_3 = m_4 = m$, а также что их центры расположены симметрично относительно точки S, т.е. $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} = \eta_A \vec{e}_\eta$. Тогда

$$[\overrightarrow{SA}, \vec{F}_{31}] + [\overrightarrow{SB}, \vec{F}_{41}] = [\overrightarrow{SA}, \vec{F}_{31} - \vec{F}_{41}] = m[\overrightarrow{SA}, \vec{a}_B - \vec{a}_A] =$$
$$= m\left[\overrightarrow{SA}, \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overrightarrow{SB}]\right) - \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \overrightarrow{SA}]\right)\right] = -2m\left[\overrightarrow{SA}, \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \overrightarrow{SA}]\right] = -2m\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{SA}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{SA}]\right],$$

так как

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{SA}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{SA}]\right] = 0.$$

Обозначим через M суммарную массу всех элементов системы. Далее подставим в систему (2.1) выражения для $\vec{F}_{13}, \vec{F}_{14}$ с учетом $\vec{a}_A, \vec{a}_B$ и $\vec{a}_C, \vec{M}_{12}, \vec{M}_{13}, \vec{M}_{14}$, после чего перегруппируем слагаемые в уравнениях (2.1) и получим систему, описывающую движение робота:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(M\vec{v}_S + m_2[\vec{\omega}_C, \overrightarrow{SC}]\right) = M\vec{g} + \vec{F}_P + \vec{F}_L + \vec{F}_R, \\ J_{Sz}\ddot{\gamma}\vec{e}_z = -\dfrac{d}{dt}\left(\vec{K}_A + \vec{K}_B + \vec{K}_S + 2m\left[\overrightarrow{SA}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{SA}]\right]\right) + [\overrightarrow{SP}, \vec{F}_P] + [\overrightarrow{SL}, \vec{F}_L] + [\overrightarrow{SR}, \vec{F}_R]. \end{cases} \tag{2.2}$$

3. Проекция уравнений движения на вертикаль. 3.1. Отсутствие контакта корпуса с опорой. Спроектируем первое уравнение системы (2.2) на ось z:

$$\frac{d}{dt}\left(M\dot{z} + m_2\langle[\vec{\omega}_C, \overrightarrow{SC}], \vec{e}_z\rangle\right) = -Mg + N.$$

Здесь через N обозначена суммарная нормальная реакция $\langle\vec{F}_P + \vec{F}_L + \vec{F}_R, \vec{e}_z\rangle$. Рассмотрим состояние механической системы, при котором нормальные реакции в опорах равны нулю. Принципиальная возможность такого состояния показана в работах [21–24]. В частности, для случая $\psi = 0$ была описана так называемая фаза полета, при которой $N = 0$ и корпус не совершает движения вдоль вертикали. И хотя в данной системе рамка дебаланса установлена под углом к вертикали, соответствующее уравнение имеет тот же вид, что и в [23], но с поправкой на установочный угол ψ

$$\frac{d}{dt}(m_2 l\dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi) = -Mg. \tag{3.1}$$

По аналогии с [24] для реализации описанного плоскопараллельного движения необходимо, чтобы положение φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$ дебаланса удовлетворяли соотношению (частному интегралу уравнения 3.1)

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \frac{\sqrt{2Mg(1 + \cos\varphi)/m_2 l\cos\psi}}{|\sin\varphi|} = \frac{\sqrt{Mg/m_2 l\cos\psi}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}. \tag{3.2}$$

Предполагаются две основные фазы движения.

Фаза разгона. Корпус неподвижен за счет силы трения покоя, при этом дебаланс набирает необходимое количество движения, чтобы величины угла его поворота φ и скорости его вращения $\dot{\varphi}$ могли достичь значений, удовлетворяющих зависимости (3.2). Вид зависимости (3.2) на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ и алгоритмы осуществления фазы разгона описаны в [23, 24, 29] и не рассматриваются в рамках настоящей статьи. На этой фазе, в частности, возможны изменение угла ψ рамки и уменьшение угловых скоростей (разгрузка) маховиков.

Фаза полета. В этой фазе движения угол φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$ удовлетворяют соотношению (3.2). Дебаланс вначале $(\varphi < \pi)$ замедляется и изменяет количество движения и кинетический момент корпуса, в результате чего нормальные реакции уменьшаются до нуля. Корпус устремляется за дебалансом и совершает перемещение с вращением вокруг вертикали. После прохождения положения $\varphi = \pi$ дебаланс снова ускоряется, из-за чего замедляется вращение корпуса. Как было показано в [23], в начальный $(t = 0)$ и конечный моменты $(t = t_*)$ фазы полета угловая скорость дебаланса одинакова.

Пусть в начальный момент фазы полета состояние дебаланса следующее: $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Найдем программное управление дебаланса, обеспечивающее $N = 0$. Для этого проинтегрируем выражение (3.1) с начальными условиями $\dot{\varphi}_0, \varphi_0$:

$$\varphi(t) = \arccos\left(\frac{Mgt^2}{2m_2 l\cos\psi} - 2t\sqrt{Mg/m_2 l\cos\psi}\cos\frac{\varphi_0}{2} + \cos\varphi_0\right). \tag{3.3}$$

Частный вид траектории (3.3) для случая $\psi = 0$ был определен в работе [37]. Отметим, что существуют и другие технические способы управления мотором дебаланса, реализующие фазу полета. Например, формула (3.2) представляет собой обратную связь угловой скорости дебаланса по его положению.

Кроме того, подставим (3.2) в (3.1) и определим обратную связь для ускорения дебаланса от угла поворота:

$$\ddot{\varphi}(\varphi) = -\frac{Mg}{2m_2 l\cos\psi}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}. \tag{3.4}$$

Формулы (3.2)–(3.4), а также следуемые из них зависимости $\dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(\dot{\varphi})$ могут быть использованы для управления дебалансом при реализации вибрационного робота, исходя из конструкционных особенностей управляющего мотора.

Вычислим время t_*, которое затрачивается на фазу полета. Из (3.3) вытекает, что

$$\cos(2\pi - \varphi_0) = \frac{Mgt_*^2}{2m_2 l\cos\psi} - 2t_*\sqrt{Mg/m_2 l\cos\psi}\cos\frac{\varphi_0}{2} + \cos\varphi_0 \Rightarrow t_* = \frac{4\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{Mg/m_2 l\cos\psi}}.$$

3.2. П о в о р о т к о р п у с а в о к р у г в е р т и к а л и. Спроектируем второе уравнение системы (2.2) на вертикаль и проинтегрируем его с начальными условиями $\dot{\gamma}(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$, $J_{S\zeta}\dot{\gamma} = -m_3 l^2(\dot{\varphi}\sin\psi + \dot{\gamma}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\psi)) - J_{A\zeta}\dot{\gamma} - J_{B\zeta}\dot{\gamma} - 2m\eta_A^2\dot{\gamma} + m_2 l^2\dot{\varphi}_0\sin\psi$, откуда заключаем, что

$$\dot{\gamma} = \frac{(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi})\sin\psi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + \dfrac{J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2}{m_2 l^2}}. \tag{3.5}$$

Таким образом, с учетом подстановок (3.2) и (3.3) получаем

$$\gamma(t) = \sin\psi\sqrt{Mg/m_2 l\cos\psi}\int\limits_0^t \frac{\dfrac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} - \dfrac{1}{\sin\frac{\varphi(t)}{2}}}{1 - \cos^2\varphi(t)\cos^2\psi + \dfrac{J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2}{m_2 l^2}}dt. \tag{3.6}$$

З а м е ч а н и е. Корпус вибрационного робота имеет нулевую угловую скорость после поворота, так как $\dot{\varphi}(t_*) = \dot{\varphi}_0$.

У т в е р ж д е н и е 1. Функция $\gamma(t)$ может быть вычислена в квадратурах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.2) следует, что

$$dt = \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi/\sqrt{m_2 l\cos\psi/Mg}.$$

Подставим это выражение в (3.6):

$$\gamma(\varphi)=\sin\psi\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-1}{\dfrac{J_{S\zeta}+J_{A\zeta}+J_{B\zeta}+2m\eta_A^2}{m_2l^2}+1-\cos^2\psi\cos^2\varphi}d\varphi. \tag{3.7}$$

Введем обозначения:

$$\cos^2\psi=a,\quad \frac{J_{S\zeta}+J_{A\zeta}+J_{B\zeta}+2m\eta_A^2}{m_2l^2}+1=j.$$

Тогда вычисление интеграла (3.7) сводится к нахождению двух интегралов:

$$I_1=\int\frac{\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi}{j-a\cos^2\varphi},\quad I_2=\int\frac{d\varphi}{j-a\cos^2\varphi}.$$

После подстановок $u=\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\cos^2\varphi=(2u^2-1)^2$

$$I_1=\int\frac{-2du}{j-a(2u^2-1)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{-2du}{j/a-(2u^2-1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{aj}}\int\left(\frac{1}{u^2-A}-\frac{1}{u^2+B}\right)du=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{aj}}\left(\frac{1}{2\sqrt{A}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{A}}{u+\sqrt{A}}\right|-\frac{1}{\sqrt{B}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{B}}\right),$$

где

$$A=\frac{1+\sqrt{\frac{j}{a}}}{2},\quad B=\frac{\sqrt{\frac{j}{a}}-1}{2},$$

I_2 вычисляется с помощью подстановки $v=\operatorname{tg}\varphi$:

$$I_2=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{j}{j-a}}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{j(j-a)}}+C,$$

где C определяется как

$$C=\begin{cases}0 & \varphi\in(0,\pi/2),\\ \pi/\sqrt{j(j-a)} & \varphi\in[\pi/2,3\pi/2),\\ 2\pi/\sqrt{j(j-a)} & \varphi\in[3\pi/2,2\pi).\end{cases}$$

Таким образом,

$$\gamma(\varphi)=\sin\psi\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{A}}\ln\left|\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{A}}{\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{A}}\right|-\frac{1}{\sqrt{B}}\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{B}}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{aj}}-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{j}{j-a}}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{j(j-a)}}+C\right]\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi}. \tag{3.8}$$

Утверждение 1 доказано.

4. Горизонтальное смещение. 4.1. Смещение центра масс. По теореме о сохранении количества движения, во время фазы полета первое уравнение системы (2.2) допускает два первых интеграла:

$$\begin{cases} M\dot{x}(t)/m_2 l = \cos\gamma\sin\varphi(\dot{\gamma} + \dot{\varphi}\sin\psi) + \cos\varphi\sin\gamma(\dot{\gamma}\sin\psi + \dot{\varphi}) - \sin\varphi_0\sin\psi\dot{\varphi}_0, \\ M\dot{y}(t)/m_2 l = \sin\gamma\sin\varphi(\dot{\gamma} + \dot{\varphi}\sin\psi) - \cos\gamma\cos\varphi(\dot{\gamma}\sin\psi + \dot{\varphi}) + \cos\varphi_0\dot{\varphi}_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

На практике наличие горизонтальной скорости, которую приобретет центр масс корпуса в момент завершения фазы полета, является нежелательным, поскольку она может привести к скольжению вибрационного робота по опорной поверхности. Определим условия, позволяющие обеспечить полную остановку корпуса после поворота:

$$\begin{cases} \dot{x}(t_*) = 0 \\ \dot{y}(t_*) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\psi\sin\varphi_0(1 + \cos\gamma_*) = \cos\varphi_0\sin\gamma_*, \\ \cos\varphi_0(1 - \cos\gamma_*) = \sin\varphi_0\sin\gamma_*\sin\psi. \end{cases} \tag{4.2}$$

Утверждение 2. При совершении поворота корпуса на ненулевой угол γ_*, отличный от π, условия равенства нулю боковой и продольной скорости в момент приземления эквивалентны. При повороте на угол $\gamma_* = \pi$ общая скорость центра масс корпуса будет нулевой, если и только если начальное положение дебаланса $\varphi_0 = \pi/2$.

Доказательство. Если $\psi = 0$, то из (3.5) следует, что $\gamma(t) \equiv 0 = \gamma_*$, т.е. поворота не происходит, и система (4.2) выполняется тождественно. Проведем доказательство для случая, когда рамка дебаланса отклонена на некоторый угол от вертикали.

Из первого уравнения системы (4.2)

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{1 - \cos\gamma_*}{\sin\gamma_*\sin\psi} = \frac{(1 - \cos\gamma_*)(1 + \cos\gamma_*)}{\sin\gamma_*\sin\psi(1 + \cos\gamma_*)} = \frac{\sin^2\gamma_*}{\sin\gamma_*\sin\psi(1 + \cos\gamma_*)} = \frac{\sin\gamma_*}{\sin\psi(1 + \cos\gamma_*)}.$$

Таким образом, при $\gamma_* \neq \pi$ первое и второе условия системы (4.2) эквивалентны. Если же $\gamma_* = \pi$, то первое условие системы (4.2) выполняется тождественно, а второе принимает вид $\cos\varphi_0 = 0$ и, следовательно, выполняется при $\varphi_0 = \pi/2$. Утверждение 2 доказано.

4.2. Траектория центра масс. Система (4.2) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt}(M(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) + m_2\overline{SC}) = m_2 l\dot{\varphi}_0(\cos\varphi_0\vec{e}_y - \sin\varphi_0\sin\psi\vec{e}_x).$$

Пусть начальное положение корпуса таково, что $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{M}{m_2 l}x(t) + \sin\psi\cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi = -\dot{\varphi}_0 t\sin\varphi_0\sin\psi + \sin\psi\cos\varphi_0, \\ \dfrac{M}{m_2 l}y(t) + \sin\varphi\cos\gamma + \sin\psi\cos\varphi\sin\gamma = \dot{\varphi}_0 t\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Система (4.3) описывает траекторию центра масс корпуса S в горизонтальной плоскости.

4.3. Максимальный угол поворота. Оценим наибольший угол поворота корпуса, после которого его центр масс S останавливается. Для этого запишем первое уравнение системы (4.2) в следующей форме:

$$\gamma_* = 2\,\mathrm{arctg}(\sin\psi\,\mathrm{tg}\varphi_0). \tag{4.4}$$

Это уравнение задает двумерную поверхность в пространстве γ_*, φ_0, ψ. Интересующие нас движения лежат на пересечении этой поверхности с поверхностью всевозможных поворотов, которая задается формулой (3.8) при подстановке $\varphi = 2\pi - \varphi_0$. Из физических соображений ясно, что максимальный угол поворота корпуса достигается при стремлении $\psi \to \pi/2$, так как в этом положении рамка горизонтальна, и весь кинетический момент дебаланса направлен на поворот. (Также это можно увидеть из уравнения (3.5), однако оговоримся, что при $\psi = \pi/2$ не может быть организовано управление $\varphi(t)$, обеспечивающее отсутствие контакта корпуса с опорой (3.3).) Поэтому наибольший угол поворота должен удовлетворять соотношению:

$$\gamma_{\max}(\varphi_0) = \lim_{\psi\to\pi/2} 2\mathrm{arctg}(\sin\psi\, tg\varphi_0) = 2\varphi_0.$$

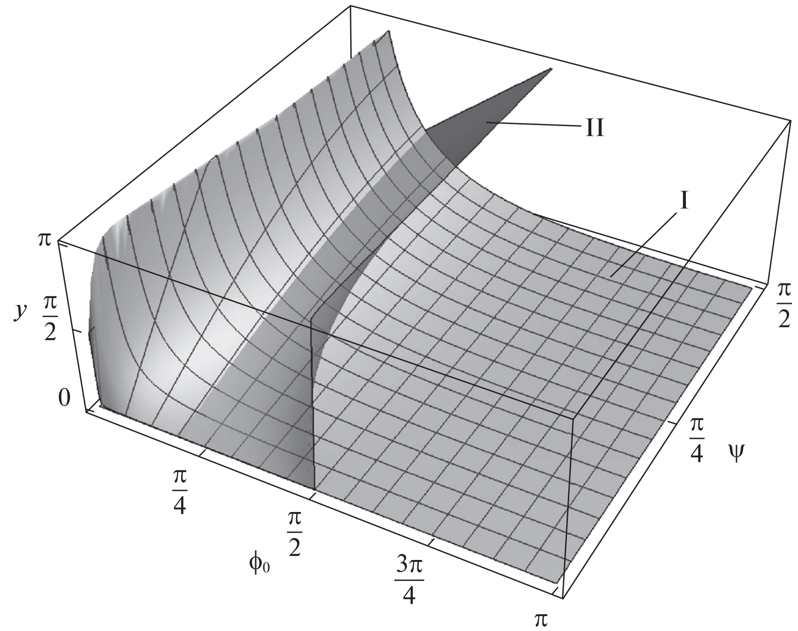

Рис. 2. Зависимость угла поворота корпуса от параметров φ_0, ψ

С другой стороны, угол поворота должен быть реализован вибрационным роботом и удовлетворять уравнению (3.8) при $\psi \to \pi/2$:

$$\gamma_{\max}(\varphi_0) = \lim_{\psi\to\pi/2} \gamma(2\pi - \varphi_0) = \frac{2}{j}\left(\varphi_0 - \pi + 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Вышесказанное рассуждение можно сформулировать в следующем виде.

Утверждение 3. Максимальный угол поворота корпуса при полной остановке центра масс после завершения фазы полета равен $\gamma_{\max} = 2\varphi^*$, где φ^* определяется из уравнения

$$2\varphi^* = \frac{2}{j}\left(\varphi^* - \pi + 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi^*}{2}\right).$$

5. Численное моделирование движения. 5.1. Поворот робота. Зафиксируем параметры системы следующим образом: $M = 15$ кг, $m_2 = 10$ кг, $\eta_A = 1$; $(J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2)/m_2 l^2 = 5$. На рис. 2 поверхность I описывает зависимость возможных углов поворота корпуса γ_* от параметров φ_0, ψ. Она построена по формуле (3.8) при подстановке $\varphi = 2\pi - \varphi_0$. Поверхность II задана уравнением (4.4) – пересечение этих множеств соответствует таким поворотам вибрационного робота, после которых корпус будет иметь нулевую скорость. Согласно утверждению 3, наибольший угол поворота при условии остановки корпуса составляет 71.1°.

Из общего вида поверхностей можем заключить, что они пересекаются по прямой $\gamma_* = 0$; $\psi = 0$, которая соответствует смещению корпуса в продольном направлении без поворота, а также некоторой кривой в пространстве φ_0, ψ, γ. Эта кривая обладает следующим свойством: переменная ψ растет и убывает одновременно с переменной φ_0. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Для каждого установочного угла рамки $\psi \neq 0$ существует единственное начальное положение дебаланса φ_0, при котором корпус останавливается после поворота. Угол этого поворота возрастает с увеличением ψ, а φ_0 лежит в диапазоне (34.7; 35.7°).

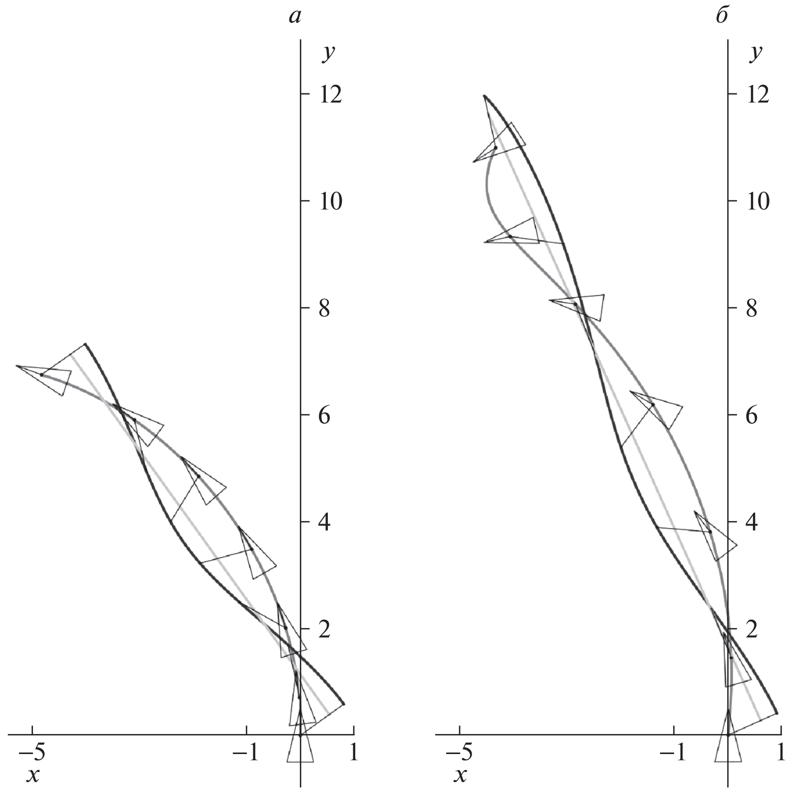

Рис. 3. Траектории точек системы в горизонтальной плоскости при совершении поворота

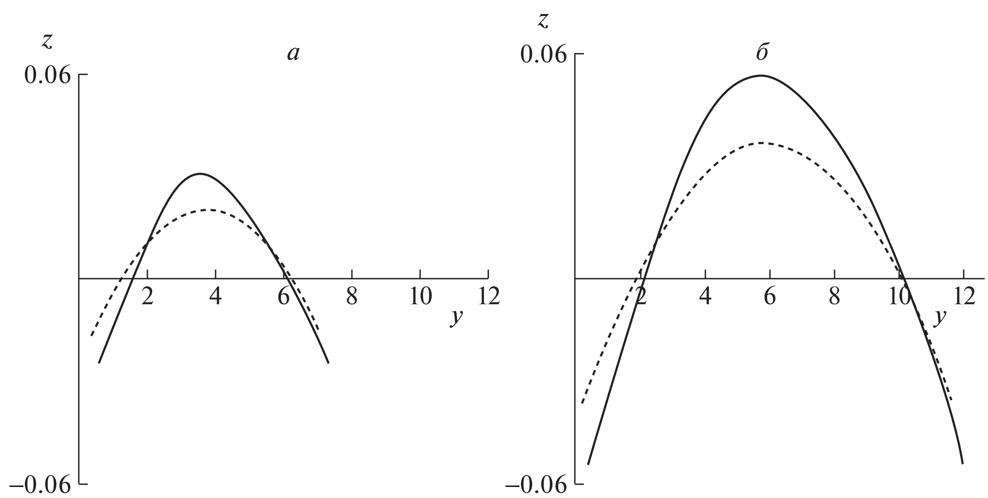

Рис. 4. Траектории точек системы в вертикальной плоскости при совершении поворота

5.2. Т р а е к т о р и я к о р п у с а. Рассмотрим траекторию центра масс на плоскости xy во время фазы полета. Рисунки 3, 4 иллюстрируют движение вибрационного робота в горизонтальной и вертикальных плоскостях соответственно при:

а) $\varphi_0 = 35.69°$, $\psi = 88°$, выбранных из условий (3.8) и (4.4); угол поворота корпуса при этих параметрах составляет 70°;

б) $\varphi_0 = 24°$, $\psi = 86°$, не соответствующих условиям (3.8) и (4.4); в этом случае корпус поворачивает вокруг вертикали на 127.5°.

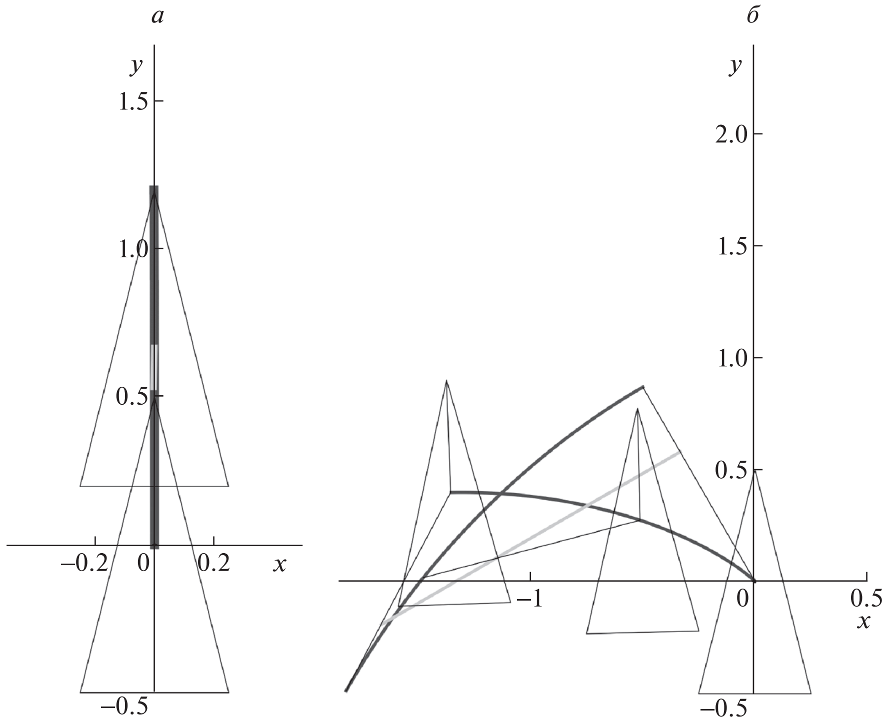

Рис. 5. Траектории точек системы в горизонтальной плоскости при $\varphi_0 > \pi/2$

Черным цветом представлены траектории центра масс корпуса S, серым – траектории дебаланса C, пунктиром – траектории центра масс системы. При отсутствии контакта с опорой на систему действует единственная внешняя по отношению к ней сила – сила тяжести. Однако проекция этой силы на горизонтальную плоскость нулевая, в связи с чем центр масс системы в плоскости xy движется по инерции равномерно и прямолинейно.

Еще одна особенность рассматриваемой системы заключается в том, что выбор параметров, отвечающих остановке вибрационного робота после поворота, обеспечивает постоянную ориентацию корпуса вдоль касательной к траектории точки S (рис. 3, *а*). Результат проверен численно для возможных углов поворотов γ_* в диапазоне (0, 71.1°].

Однако если параметры φ_0, ψ не соответствуют условиям (3.8) и (4.4), то корпус будет отклоняться от касательной к траектории точки S и в конце фазы полета направление скорости его центра масс будет отлично от ориентации вибрационного робота (рис. 3, *б*).

На рис. 4 представлены проекции точек системы на вертикальную плоскость. Под действием силы тяжести центр масс системы движется по параболе с ускорением $-g\vec{e}_z$. Наивысшая точка траектории достигается в момент прохождения дебалансом положения $\varphi = \pi$.

Любопытно, что если $\varphi_0 > \pi/2$, то центр масс всей системы движется назад относительно корпуса, а сам корпус смещается в положительном направлении по оси y, хотя и на малое расстояние. Так, наибольшее смещение достигается при вертикальном положении рамки (рис. 5, *а*), а наибольший угол поворота не превосходит 8° и реализуется при горизонтальном положении рамки (рис. 5, *б*). Из вида поверхности на рис. 2 следует, что на описанном классе движений поворот робота несовместим с остановкой после завершения фазы полета.

Заключение. Рассмотрено плоскопараллельное движение в поле силы тяжести вибрационного робота, представленного корпусом, дебалансом, закрепленным в центре корпуса, и двумя однородными маховиками. Плоскость вращения дебаланса может быть отклонена от вертикали на фиксированный угол. Управление роботом происходит за счет выбора углового ускорения дебаланса и маховиков. В результате работы была построена математическая модель движения робота, и для него были найдены шесть режимов управления, которые реализуют поворот робота на некоторый угол.

Представлен параметрический анализ системы, в рамках которого продемонстрирована зависимость угла поворота корпуса от начального положения дебаланса и установочного угла рамки в фазе полета. Показано, что поворот корпуса сопряжен с общим смещением корпуса в продольном и боковом направлениях. При этом возможность выбора параметров, обеспечивающих полную остановку корпуса после поворота, доказана аналитически. Также оценен максимальный угол поворота робота, после которого его корпус останавливается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. № 6. Т. 70. С. 915–941.
2. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
3. *Yan Y., Zhang B., Chávez J.P., Liu Y.* Optimising the Locomotion of a Vibro-impact Capsule Robot Self-propelling In the Small Intestine // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2022. № 1. V. 3.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-81170-9_12
4. *Liao M., Zhang J., Liu Y., Zhu D.* Speed Optimisation and Reliability Analysis of a Self-propelled Capsule Robot Moving in an Uncertain Frictional Environment // Intern. J. Mechanical Sciences. 2022. V. 221. № 107156. https://Doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107156.
5. *Черноусько Ф.Л., Шматков А.М.* Оптимальное управление поворотом твердого тела при помощи внутренней массы // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 10–23.
https://doi.org/10.1134/S0002338819030065
6. *Черноусько Ф.Л.* Об использовании нескольких подвижных масс для переориентации тела // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2022. Т. 503. № 1. С. 52–56.
7. *Nunuparov A., Becker F., Bolotnik N. et al.* Dynamics and Motion Control of a Capsule Robot with an Opposing Spring. Arch Appl Mech. 2019 V. 89. P. 2193–2208. https://Doi.org/10.1007/s00419-019-01571-8.
8. *Досаев М.З., Климина Л.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Плоскопараллельное движение робота-змеи при наличии анизотропного сухого трения и единственного управляющего сигнала // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 134–143.
https://doi.org/10.31857/S0002338822050067
9. *Черноусько Ф.Л.* Управление движением многозвенников на шероховатой плоскости // Тр. ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 277–287.
10. *Ветчанин Е.В., Килин А.А.* Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела // ДАН. 2016. Т. 466. № 3. С. 293–297.
11. *Килин А.А., Кленов А.И., Тененев В.А.* Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 4. С. 445–460.
12. *Pollard B., Tallapragada P.* Passive Appendages Improve the Maneuverability of Fishlike Robots // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2019. V. 24. № 4. P. 1586–1596.
13. *Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф.* Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 4. С. 845–857.
14. *Tallapragada P., Gandra C.* A Mobile Mathieu Oscillator Model for Vibrational Locomotion of a Bristlebot // J. Mechanisms and Robotics. 2021. V. 13. № 5. P. 054501.
15. *Кугушев Е.И., Попова Т.В., Сазонов С.В.* О движении системы с перемещающимся внутренним элементом при наличии внешнего вязкого трения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 5. С. 50–56.
16. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 3–9.
17. *Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю.* О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.
18. *Черноусько Ф.Л.* Плоские движения тела, управляемого при помощи подвижной массы // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. № 1. С. 69–74.
19. *Иванов А.П., Сахаров А.В.* Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 763–772.
20. *Бардин Б.С.* О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы // Матер. XVIII Междунар. симпоз. “Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем” DYVIS-2015. М., 2015. С. 42–49.
21. *Голицына М.В.* Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению // ПММ. 2018. № 1. С. 627–636.
22. *Dosaev M., Samsonov V., Holub A.* Plane-Parallel Motion of a Friction-Powered Robot Moving Along a Rough Horizontal Plane // Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanisms and Machine Science 73. Cham: Springer, 2019.

23. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.* Construction of Control Algorithm in the Problem of the Planar Motion of a Friction-powered Robot with a Flywheel and an Eccentric Weight // Applied Mathematical Modelling 2021. V. 89. Pt 2. P. 1517–1527.
24. *Dosaev M.* Algorithm for Controlling an Inertioid Robot with a Flywheel and an Unbalance in Conditions of Restrictions on the Angular Acceleration of the Unbalance // Applied Mathematical Modelling. 2022. V. 109. P. 797–807. https://Doi.org/10.1016/j.apm.2022.05.021.
25. *Сахаров А.В.* Поворот тела без внешних движителей при помощи ротора // Тр. МФТИ. 2014. Т. 6. № 2. С. 80–91.
26. *Сахаров А.В.* Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 196–209.
27. *Черноусько Ф.Л.* Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
28. *Черноусько Ф.Л.* Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 414–425.
29. *Huda M.N., Yu H.* Modelling and Motion Control of a Novel Double Parallel Mass Capsubot // IFAC Proceedings Volumes. 2011. V. 44. Iss. 1. P. 8120–8125.
30. *Semendyaev S.V., Tsyganov A.A.* Model and Investigation of Dynamics of Solid System with Two Massive Eccentrics on a Rough Plane // ECCOMAS Congress. Proc. 7th Europ. Cong. Comp. Meth. in Appl. Sci. and Eng. Crete, 2016. V. 3. P. 4572–4583.
31. *Semendyaev S.V.* Solid System with Two Massive Eccentrics on a Rough Plane: Rotational Case // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51 (2). P. 884–889.
32. *Zhan X., Xu J.,* Fang H. Planar Locomotion of a Vibration-driven System with Two Internal Masses // Applied Mathematical Modelling. 2016. V. 40. № 2. P. 871–885.
33. *Zhan X., Xu J., Fang H.* A Vibration-driven Planar Locomotion Robot Shell //Robotica 2018. V. 36. № 9. P. 1402–1420.
34. *Klimina L.A.* Rotational Modes of Motion for an Aerodynamic Pendulum with a Vertical Rotation Axis // Moscow Univ. Mech. Bull. 2009. V. 64. P. 126–129. https://doi.org/10.3103/S0027133009050069
35. *Селюцкий Ю.Д.* Предельные циклы в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 133–144. https://doi.org/10.31857/s0572329922010093
36. *Tikhonov A.A.* Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: The Concept and Kinematic Analysis // J. Appl. Comput. Mech., 2021. V. 7 (4). P. 2113–2119. https://doi.org/10.22055/JACM.2021.37817.3094
37. *Голицына М.В.* Анализ, управление и оптимизация движения вибрационного робота // Кандидатская диссертация по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика. 2018.