ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 1, с. 82–105

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519:301

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОРГАНИЗАЦИИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО[1]

© 2023 г. А. В. Королёв[a,*], М. А. Котова[a,], Г. А. Угольницкий[b,***]**

[a]*Филиал НИУ Высшая школа экономики, Санкт-Петербург, Россия*

[b]*Южный федеральный ун-т, Ростов-на-Дону, Россия*

**e-mail: danitschi@gmail.com,*

***e-mail: makotova_2@edu.hse.ru*

****e-mail: ougoln@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.
После доработки 23.09.2022 г.
Принята к публикации 26.09.2022 г.

Аналитически найдены равновесия Нэша и Штакельберга, а также кооперативные решения для динамических теоретико-игровых моделей олигополии Курно в нормальной форме с неоднородными агентами. Построены и исследованы кооперативные теоретико-игровые модели олигополии Курно трех лиц в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна, включая вычисление вектора Шепли. Проведен сравнительный анализ выигрышей агентов, согласно полученным решениям, для игр в нормальной форме и в форме характеристической функции.

DOI: 10.31857/S0002338823010043, **EDN:** HENZDJ

Введение. Проблема (не)эффективности равновесий хорошо известна в теоретико-игровом моделировании конфликтно-управляемых социально-экономических систем [1–5]. Ее смысл состоит в том, что суммарный выигрыш всех игроков (утилитаристское общественное благосостояние) при независимом поведении или даже иерархической организации оказывается меньше, чем при кооперации. Наиболее популярная количественная мера (не)эффективности – цена анархии, которая определяется как отношение суммарного выигрыша всех игроков в наихудшем из равновесий Нэша к максимальному суммарному выигрышу, который достигается при полной кооперации игроков [6].

Однако представляется целесообразным рассматривать проблему (не)эффективности равновесий в более общем виде. Чрезвычайно важно проводить сравнение не только общественного благосостояния, но и индивидуальных выигрышей. Действительно, совсем не очевидно, что лучший с точки зрения всего общества исход игры окажется таким же для каждого игрока в отдельности. Например, выигрыш ведущего в иерархической игре или даже какого-то игрока в равновесии Нэша может оказаться больше выигрыша, который получается при равном распределении суммарного кооперативного выигрыша или при некотором принципе оптимальности для игры в форме характеристической функции. Тогда такой игрок не согласится участвовать в кооперации и предпочтет сохранять независимость или бороться за лидерство. Авторская методология сравнительного анализа в указанном выше смысле описана в статье [7].

Удобной моделью для проведения сравнительного анализа служит олигополия Курно, описывающая конкуренцию фирм по выпускам на рынке однородного продукта [8–10]. Для построения динамических моделей конфликтно-управляемых систем (в частности, олигополии Курно) используются дифференциальные или разностные игры в нормальной форме, содержащие явное описание изменения переменной состояния. В качестве решения при независимом поведении равноправных игроков принимается равновесие Нэша, а при иерархическом управлении

[1] Работа поддержана грантом ЮФУ “Цифровой атлас политических и социально-экономических угроз и рисков развития Южнороссийского приграничья: национальный и региональный контекст (“Цифровой Юг”) № СП-14-22-06.

без обратной связи – равновесие Штакельберга [11, 12]. При кооперации дифференциальная игра сводится к задаче оптимального управления, которая решается обычным образом [13].

Другой способ описания кооперации – игры в форме характеристической функции. В этом случае главную роль играют не отдельные игроки, а их подмножества (коалиции). Каждая коалиция характеризуется своим значением характеристической функции, отображающей множество всех коалиций в множество действительных чисел. Главная проблема этого класса игр – распределение выигрыша максимальной коалиции (множества всех игроков) между отдельными игроками. Имеются различные принципы оптимальности (решения) игр в форме характеристической функции: ядро, решение по Нейману–Моргенштерну, вектор Шепли, нуклеолус и др. [14–16].

В течение долгого времени для построения кооперативных игр использовалась только характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [17]. В этом случае характеристика любой коалиции равна ее значению в антагонистической игре против дополнительной коалиции (антикоалиции). Однако это определение не лишено недостатков. Во-первых, данную функцию часто сложно вычислять. Во-вторых, совсем не очевидно, что в экономических и иных приложениях антикоалиция должна играть строго против некоторой коалиции. Поэтому были предложены другие характеристические функции, например функция Петросяна–Заккура или Громовой–Петросяна [18, 19]. Обсуждение можно найти в [20].

Численное решение динамических игр на основе имитационного моделирования описано в работах [21–23]. В настоящей статье применяется другой подход, апробированный, например, в [24], а именно ищется явное решение игры с помощью уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. Полученные аналитические решения весьма громоздки, поэтому для сравнения выигрышей все же используется численное моделирование для конкретных значений параметров.

Вклад настоящей статьи заключается в следующем:

построены динамические модели олигополии Курно в нормальной форме и в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна;

найдены аналитические решения указанных игр при различных способах организации и методах управления: равновесия Нэша и Штакельберга, кооперативное решение, вектор Шепли;

проведено численное сравнение коллективных и индивидуальных выигрышей для конкретных значений модельных параметров.

Полученные результаты можно использовать в практике управления экономическими и организационными системами.

1. Постановка задачи. Независимое поведение игроков. В работе рассматривается динамическое обобщение модели Курно с линейным уравнением динамики:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\left[\left(a - c_i - \bar{x}(t)\right)x_i(t) - y(t)\right]dt \to \max, \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t), \tag{1.1}$$

$$0 \le x_i(t) \le \frac{a}{n}, \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} k\, x_i(t) - my(t), \quad y(0) = y_0, \tag{1.3}$$

$$a > n\left(c_i + \frac{k}{\rho + m}\right), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$0 < c_1 < \ldots < c_i < \ldots < c_n < \frac{a}{n}. \tag{1.5}$$

Здесь $x_i(t)$ – управляющие переменные игроков (объем выпуска товаров у i-й фирмы); $y(t)$ – переменная состояния (количество загрязняющих веществ (ЗВ) в окружающей среде); k – коэффициент выброса ЗВ в производстве i-й фирмы; a – максимальный объем суммарного выпуска продукции; c_i – коэффициент затрат i-й фирмы; m – коэффициент амортизации; n – количество фирм; ρ – коэффициент дисконтирования; T – длина игры. Таким образом, взаимодействие игроков (конкурирующих фирм) описывается через их управления. Предполагается также, что игроки имеют полную информацию о действиях конкурента. В модели Курно продукт предполагается однородным и является нумерером, т.е. в его (безразмерных) единицах выражаются все

стоимостные величины. Таким образом, переменные a, x_i, c_i имеют размерность (руб/с)$^{1/2}$, $[y]$ = руб/с, $[k]$ = руб$^{1/2}$/с$^{3/2}$, $[m]$ = с$^{-1}$, $[\rho]$ = с$^{-1}$. При независимом поведении игроков каждая фирма решает оптимизационную задачу (1.1)–(1.5). Заметим, что возможны и другие варианты построения модели (1.1)–(1.5). Например, объемы выпуска могут рассматриваться как переменные состояния, а управляющими переменными тогда становятся темпы выпуска (переменные издержки). Однако в статье исследуется влияние выпуска продукции на окружающую среду.

Лемма 1. Решение уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1 \tag{1.6}$$

с граничным условием $\alpha(T) = 0$ имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1). \tag{1.7}$$

Решение уравнения

$$\beta' - \rho\beta = F(t) \tag{1.8}$$

с граничным условием $\beta(T) = 0$, где

$$F(t) = A(\alpha k)^2 + B\alpha k + D,$$

$$A, B, D, k \in R, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1), \quad t \in [0, T],$$

имеет вид

$$\begin{aligned}\beta(t) = &-\frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \left(\frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m} - \frac{Bk}{(\rho+m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \\ &-\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Предложение 1. При выполнении условия

$$\bar{c} - (n+1)c_i \le \frac{a}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i, \tag{1.10}$$

где $n \ge 2$, выигрыш i-го игрока в задаче (1.1)–(1.5) равен

$$\begin{aligned}J_i^{\max} = &\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+\left(\frac{[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)m} - \frac{2n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left(\frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2\rho} - \frac{[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)\rho} + \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Заметим, что если $n = 3$, то для выполнения условия (1.10) достаточно, чтобы $c_2/c_1 \le 3$, потому что тогда $c_2 - 3c_1 \le 0$, а значит, $c_1 + c_2 + c_3 - 4c_1 \le a/3$, так как $c_1 < c_2 < c_3 < a/3$, и условие $\bar{c} - 4c_i = c_1 + c_2 + c_3 - 4c_i \le a/3$, т.е. (1.10) при $n = 3$, верно для c_1 и тем более верно для c_2 и c_3.

Доказательство предложения 1 приведено в Приложении.

2. Кооперативное поведение игроков. 2.1. Общий случай произвольного числа игроков. Все фирмы вместе решают задачу оптимального управления

$$J_c = \int_0^T e^{-\rho t}\left[\sum_{i=1}^{n}(a - c_i - \bar{x}(t))x_i(t) - y(t)\right]dt \to \max \tag{2.1}$$

при ограничениях (1.2)–(1.5).

Л е м м а 2. В задаче (2.1), (1.2)–(1.5) максимум при любом t может достигаться только на одном из ребер n-мерного куба (1.2). При этом номер ребра, на котором достигается максимум, – это такое натуральное число $l = l(n,t)$, для которого

$$n\alpha k + (n-2l)a - nc_l \le 0, \tag{2.2}$$

$$0 \le n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l, \tag{2.3}$$

где $\alpha(t)$ определено (1.7).

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е. Поскольку величина α является функцией времени и за период $[0,T]$ растет от величины

$$\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)$$

до 0, то число l, определяемое условием (2.2)–(2.3), в некоторые моменты времени может увеличиваться на единицу.

П р е д л о ж е н и е 2. Если величина l не меняется на всем промежутке $[0, T]$, то суммарный выигрыш коалиции в (2.1), (1.2)–(1.5) равен

$$\begin{aligned} J_c^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{(a-c_l)k}{2(\rho+m)m} - \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{(a-c_l)^2}{4\rho} - \frac{a\left[\sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)c_l\right]}{n\rho} - \frac{(a-c_l)k}{2(\rho+m)\rho} + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}\right)(1-e^{-\rho T}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство предложения 2 приведено в Приложении.

2.2. К о о п е р а т и в н о е п о в е д е н и е и г р о к о в в с л у ч а е $n = 3$. П р е д л о ж е н и е 3. В задаче (2.1), (1.2)–(1.5) при $n = 3$ при любом $t \in [0,T]$ верно, что $l(3,t) = 2$, т.е. максимум достигается на втором ребре.

Доказательство предложения 3 приведено в Приложении.

С л е д с т в и е 1. При $n = 3$ общий выигрыш коалиции равен

$$\begin{aligned} J_c^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{k(a-c_2)}{2(\rho+m)m} - \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{3a^2 - 2ac_2 - 4ac_1 + 3c_2^2}{12\rho} + \frac{k(a-c_2)}{2(\rho+m)\rho} - \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}\right)(1-e^{-\rho T}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Иерархическая модель поведения игроков. Пусть первый игрок – ведущий, а все остальные игроки $i = \overline{2,n}$ – ведомые, которым известна стратегия $x_1(t)$, $t \in [0,T]$ первого игрока. Каждая фирма-ведомый решает оптимизационную задачу (1.1)–(1.5) при заданной стратегии первого игрока. Обозначим

$$\tilde{x} = \sum_{j=2}^{n} x_j.$$

Зная зависимость $\tilde{x}$ от x_1, первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t}\left[\left(a - c_1 - x_1(t) + \tilde{x}(t)\right)x_1(t) - y(t)\right]dt \to \max \tag{3.1}$$

при ограничениях (1.2)–(1.5).

Предложение 4. Выигрыши игроков в иерархической игре (3.1), (1.1)–(1.5) равны

$$\begin{aligned} J_1^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}\times \\ &\times(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \left(\frac{(n^2-2n+2)k}{n^2(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{n(\rho+m)m} - \frac{2k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2 m}\right)\cdot(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left[\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left(\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-2n+2}{n^2}a\right) + \left(\frac{n-1}{n^2}a - \frac{nc_1-\tilde{c}}{n}\right)\frac{a}{n\rho} - \frac{(n-1)k^2}{n(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} J_i^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \left\{\frac{2(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m}\times\right. \\ &\left.-\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right]\right\}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)^2 + \right. \\ &\left.+\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right] + \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2\rho}\right\}(1-e^{-\rho T}), \quad i = \overline{2,n}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство предложения 4 приведено в Приложении.

Следствие 2. В случае $n = 3$ получаем

$$\begin{aligned} J_1^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{2k^2}{3(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+\left(\frac{5k}{9(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{3(\rho+m)m} - \frac{4k^2}{3(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left[\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left(\frac{\tilde{c}}{3} - \frac{5}{9}a\right) + \left(\frac{2}{9}a - \frac{3c_1-\tilde{c}}{3}\right)\frac{a}{3\rho} - \frac{2k^2}{3(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} J_i^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{4k^2}{9(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \\ &-\left\{\frac{8k^2}{9(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m}\left[\frac{\tilde{c}}{3} - \frac{7}{9}a + \frac{1}{3}\left(\frac{\tilde{c}-3c_i}{3} + \frac{2}{9}a\right)\right]\right\}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left[\frac{(3\tilde{c}-9c_i+2a)^2}{81\rho} + \frac{(12\tilde{c}-19a-9c_i)k}{27(\rho+m)\rho} + \frac{4k^2}{9(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{-\rho T}), \quad i = 2,3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Кооперативная игра в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна для случая $n = 3$. Напомним, что кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара $\langle N, V\rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков, а $V(S)$, $S \subseteq N$ – характеристическая функция. Характеристической функцией называется отображение $V : 2^N \to R$, $V(\varnothing) = 0$, ставящее в соответствие каждой коалиции S величину выигрыша, который игроки данной коалиции могут себе обеспечить. Вопрос построения характеристических функций является одним из основных в теории кооперативных игр. Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [17] вычисляется на базе вспомогательной антагонистической игры $\Gamma_{S,N\setminus S}$ между коалицией S и антикоалицией $N\setminus S$. Характеристическая функция Петросяна–Заккура [18] строится в два

этапа. Сначала находят равновесные по Нэшу стратегии $\left\{u_i^{NE}\right\}$ всех игроков $i \in N$, а затем "замораживают" равновесные по Нэшу стратегии u_j^{NE} игроков $j \in N \backslash S$, а для игроков коалиции S находят максимум их суммарного выигрыша

$$u_S = \sum_{i \in S} u_i.$$

Характеристическая функция Громовой–Петросяна [19] строится также в два этапа. На первом этапе находят набор оптимальных стратегий всех n игроков, максимизирующий выигрыш большой коалиции. На втором этапе игроки, входящие в коалицию K, применяют полученные на первом этапе оптимальные стратегии, в то время как игроки из множества $N \backslash K$ минимизируют выигрыш коалиции K.

Пусть коалиция состоит из одного i-го игрока: $K = \{i\}$, антикоалиция тогда состоит из двух остальных игроков $N \backslash K = \{j, k\}$, причем $c_j < c_k$.

Предложение 5. Характеристическая функция Неймана–Моргенштерна для коалиции, состоящей из одного игрока, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v^{NM}(i) = {} & \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2 \rho} - \frac{(5a-3c_i)k}{6(\rho+m)\rho} + \frac{(a-3c_i)^2}{36\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Доказательство предложения 5 приведено в Приложении.

Пусть теперь коалиция состоит из двух игроков: $K = \{i, j\}$, причем $c_i < c_j$, антикоалиция тогда состоит из одного игрока $N \backslash K = \{k\}$.

Предложение 6. Характеристическая функция Неймана–Моргенштерна для коалиции, состоящей из двух игроков: $K = \{i, j\}$, причем $c_i < c_j$, имеет вид:

$$\begin{aligned} v^{NM}(i, j) = {} & \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left(\frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho+m)m} + \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2 \rho} + \frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho+m)\rho} - \frac{(2a-3c_i)(3c_i - 4a)}{36\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Доказательство предложения 6 приведено в Приложении.

5. Кооперативная игра в форме характеристической функции Громовой–Петросяна для случая $n = 3$. При вычислении характеристической функции Громовой–Петросяна все игроки из антикоалиции делают максимально возможные инвестиции

$$x_j = \frac{a}{3}, \quad j \in N \backslash K,$$

в то время как все игроки из K ведут себя как в максимальной коалиции, т.е. $\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6},\ x_3 = 0\right)$.

Таким образом, в данном случае формулы для выигрышей разных коалиций с одним и тем же числом игроков будут различаться не только индексами этих игроков.

П р е д л о ж е н и е 7. Характеристическая функция Громовой–Петросяна имеет вид:

$$v^{PG}(1,2)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})-$$
$$-\left(\frac{2k^2}{(\rho+m)^2 m}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+ \tag{5.1}$$
$$+\left(\frac{3a^2-12ac_1+9c_2^2}{36\rho}+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),$$

$$v^{PG}(2,3)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})-$$
$$-\left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+ \tag{5.2}$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho}+\frac{a^2-4ac_2+3c_2^2}{12\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),$$

$$v^{PG}(1,3)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+$$
$$+\left(\frac{(a-3c_1)a}{9\rho}-\frac{2ak}{3(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{-\rho T}), \tag{5.3}$$

$$v^{PG}(1)=V_K(0,y(0))=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+$$
$$=\frac{ak}{(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})-\left(\frac{ak}{(\rho+m)\rho}+\frac{ac_1}{3\rho}\right)(1-e^{-\rho T}), \tag{5.4}$$

$$v^{PG}(2)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})-$$
$$-\left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}+\frac{(3c_2-5a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+ \tag{5.5}$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-5a)k}{6(\rho+m)\rho}+\frac{(a-3c_2)^2}{36\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),$$

$$v^{PG}(3)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})-\frac{2ak}{3(\rho+m)\rho}(1-e^{-\rho T}). \tag{5.6}$$

Доказательство предложения 7 приведено в Приложении.

6. Сравнительный анализ. Главная задача состоит в сравнении выигрышей, полученных игроками в кооперативных играх с различными принципами оптимальности и в играх в нормальной форме. Для случая $n = 3$ зададимся значениями параметров так, чтобы выполнялись соотношения (1.4), (1.5), (1.10).

Из (1.11) следует, что выигрыши игроков в равновесии Нэша равны

$$u_i^{NE}=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{9k^2}{16(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})+$$
$$+\left(\frac{(10a-6\bar{c}+8c_i)k}{16(\rho+m)m}-\frac{18k^2}{16(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+$$
$$+\left(\frac{9k^2}{16(\rho+m)^2\rho}-\frac{(10a-6\bar{c}+8c_i)k}{16(\rho+m)\rho}+\frac{(a+\bar{c}-4c_i)^2}{16\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),\quad i=1,2,3.$$

Из (2.5) вытекает, что выигрыш каждого игрока при кооперации равен

$$u_1^c = u_2^c = u_3^c = \frac{1}{3(\rho+m)}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{12(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) +$$
$$+\left(\frac{(a-c_2)k}{6(\rho+m)m} - \frac{k^2}{6(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) +$$
$$+\left(\frac{3a^2-4ac_1-2ac_2+3c_2^2}{36\rho} - \frac{k^2}{12(\rho+m)^2\rho} + \frac{(a-c_2)k}{6(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{-\rho T}).$$

Выигрыши игроков в иерархической игре определяются выражениями (3.4)–(3.5). Выигрыши коалиций в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна определяются выражениями (4.1)–(4.2). Выигрыш большой коалиции в любой кооперативной игре в форме любой характеристической функции задается выражением (2.5). Выигрыши остальных коалиций кооперативной игре в форме характеристической функции Громовой–Петросяна определяются выражениями (5.1)–(5.6). Компоненты вектора Шепли вычисляются следующим образом:

$$\Phi_1(v^{NM}) = \frac{1}{3}\nu^{NM}(1) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,2)-\nu^{NM}(2)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,3)-\nu^{NM}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{NM}(1,2,3)-\nu^{NM}(2,3)\right),$$

$$\Phi_2(v^{NM}) = \frac{1}{3}\nu^{NM}(2) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,2)-\nu^{NM}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(2,3)-\nu^{NM}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{NM}(1,2,3)-\nu^{NM}(1,3)\right),$$

$$\Phi_3(v^{NM}) = \frac{1}{3}\nu^{NM}(3) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,3)-\nu^{NM}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(2,3)-\nu^{NM}(2)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{NM}(1,2,3)-\nu^{NM}(1,2)\right),$$

$$\Phi_1(v^{PG}) = \frac{1}{3}\nu^{PG}(1) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,2)-\nu^{PG}(2)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,3)-\nu^{PG}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{PG}(1,2,3)-\nu^{PG}(2,3)\right),$$

$$\Phi_2(v^{PG}) = \frac{1}{3}\nu^{PG}(2) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,2)-\nu^{PG}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(2,3)-\nu^{PG}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{PG}(1,2,3)-\nu^{PG}(1,3)\right),$$

$$\Phi_3(v^{PG}) = \frac{1}{3}\nu^{PG}(3) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,3)-\nu^{PG}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(2,3)-\nu^{PG}(2)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{PG}(1,2,3)-\nu^{PG}(1,2)\right).$$

Хотя решения игр получены аналитически, для сравнения выигрышей приходится использовать численные расчеты при конкретных значениях параметров. Задавая случайным образом параметры модели k, ρ, m, c_1, c_2, c_3, а от датчика случайных чисел с соблюдением условий (1.4), (1.5) и (1.10) и полагая $y_0 = 0$ и $T \to \infty$, получаем результаты, приведенные в табл. 1–3.

Заключение. Как следует из примеров, выигрыш при кооперации всегда значительно (иногда в несколько раз) превосходит суммарный выигрыш при независимом поведении и при иерархии. Суммарный выигрыш при свободной конкуренции, как правило, превосходит суммарный выигрыш при иерархии, однако в некоторых примерах суммарный выигрыш при иерархии немного больше суммарного выигрыша при свободной конкуренции.

Выигрыш наиболее эффективной фирмы в условиях иерархии, когда она является ведущей, в большинстве случаев больше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм. Доля

Таблица 1. Входные данные

a	c_1	c_2	c_3	k	ρ	m	y_0
3.102	0.090	0.243	0.931	0.022	0.081	0.535	0
6.914	0.521	1.275	1.757	0.286	0.256	0.719	0
8.954	0.862	1.665	2.524	0.345	0.998	0.760	0
3.088	0.105	0.186	0.419	0.614	0.314	0.812	0
7.117	0.372	1.087	2.040	0.039	0.934	0.303	0
5.006	0.195	0.583	1.194	0.053	0.082	0.269	0
4.362	0.168	0.398	0.958	0.395	0.863	0.597	0
8.074	0.738	1.160	1.748	0.652	0.573	0.141	0
6.215	0.109	0.267	1.197	0.748	0.281	0.908	0
9.036	0.795	1.303	1.971	0.988	0.956	0.000	0
3.383	0.070	0.134	0.825	0.392	0.737	0.907	0
4.805	0.822	1.401	1.428	0.178	0.865	0.729	0
8.228	0.465	1.202	1.976	0.142	0.011	0.258	0
10.669	0.956	1.912	2.714	0.646	0.062	0.851	0
6.620	0.731	1.236	1.565	0.462	0.152	0.854	0
5.282	0.063	0.084	0.693	0.570	0.611	0.145	0
2.693	0.216	0.268	0.555	0.173	0.817	0.154	0
3.215	0.219	0.243	0.781	0.460	0.813	0.797	0
7.460	0.809	0.962	1.667	0.944	0.798	0.808	0
8.437	0.941	1.121	1.919	0.828	0.818	0.164	0
10.790	0.633	1.521	2.494	0.821	0.965	0.077	0
5.824	0.097	0.280	1.269	0.444	0.900	0.318	0
6.604	0.568	0.985	1.445	0.871	0.897	0.332	0
1.603	0.052	0.128	0.219	0.166	0.727	0.830	0
4.627	0.814	1.031	1.113	0.263	0.527	0.782	0
6.846	0.690	1.062	1.739	0.438	0.747	0.144	0
3.918	0.071	0.122	1.119	0.081	0.886	0.785	0
4.224	0.105	0.154	1.107	0.109	0.766	0.017	0
5.977	0.544	1.523	1.616	0.200	0.074	0.499	0
2.280	0.266	0.558	0.598	0.169	0.408	0.713	0
9.636	0.836	1.592	2.115	0.238	0.136	0.118	0
4.188	0.420	0.913	1.039	0.200	0.823	0.109	0
8.560	0.439	0.919	1.526	0.812	0/307	0.319	0
8.591	0.422	1.135	1.863	0.492	0.056	0.527	0
2.162	0.060	0.176	0.224	0.463	0.893	0.793	0
5.227	0.347	0.916	1.569	0.049	0.170	0.860	0
7.052	0.163	0.427	1.426	0.570	0.724	0.009	0
6.972	0.533	0.654	1.626	0.070	0.040	0.077	0
5.358	0.868	0.948	1.321	0.367	0.704	0.723	0
2.698	0.057	0.141	0.593	0.154	0.674	0.293	0

Таблица 2. Выигрыши игроков при разных информационных регламентах

u_1^{NE}	u_2^{NE}	u_3^{NE}	u_1^{C}	u_2^{C}	u_3^{C}	u_1^{ST}	u_2^{ST}	u_3^{ST}
11.704	8.166	−0.536	9.260	9.260	9.260	12.025	7.870	−0.597
13.617	3.060	−1.363	13.660	13.660	13.660	14.765	1.947	−2.122
6.189	2.509	0.001	5.474	5.474	5.474	6.820	2.003	−0.278
5.466	2.505	0.264	3.885	3.885	3.885	5.623	2.395	0.221
24.929	11.675	−1.700	23.960	23.960	23.960	26.583	10.072.3	−2.519
6.286	2.603	0.604	4.578	4.578	4.578	6.736	2.298	0.448
1.314	0.645	−0.472	1.847	1.847	1.847	1.436	0.436	−0.587
2.749	−0.504	−4.001	9.329	9.329	9.329	2.935	−2.481	−5.480
5.320	3.160	−5.906	12.961	12.961	12.961	5.405	1.231	−6.976
2.188	−0.458	−3.109	7.048	7.048	7.048	2.274	−1.897	−4.181
0.921	0.737	−0.544	1.394	1.394	1.394	0.977	0.580	−0.604
1.675	0.295	0.249	1.546	1.546	1.546	1.970	0.102	0.063
400.798	89.795	−127.95	501.024	501.024	501.024	428.809	41.364	−158.52
101.907	15.973	−33.622	136.496	136.496	136.496	113.962	−1.291	−45.508
12.643	1.562	−3.860	20.931	20.931	20.931	15.067	−1.964	−6.642
0.322	0.209	−2.445	4.699	4.699	4.699	0.022	−0.807	−3.141
0.346	0.252	−0.145	0.703	0.703	0.703	0.430	0.112	−0.232
0.462	0.406	−0.486	1.082	1.082	1.082	0.528	0.193	−0.589
2.059	1.296	−1.451	5.326	5.326	5.326	2.680	0.048	−2.277
1.827	0.823	−2.683	6.848	6.848	6.848	2.325	−0.911	−3.858
6.810	1.323	−2.810	9.732	9.732	9.732	7.336	0.212	−3.539
2.321	1.600	−1.002	3.339	3.339	3.339	2.495	1.248	−1.162
1.463	−0.213	−1.610	3.968	3.968	3.968	1.565	−0.966	−2.176
0.156	0.065	−0.024	0.303	0.303	0.303	0.184	0.020	−0.059
1.433	0.587	0.317	2.478	2.478	2.478	1.962	−0.013	−0.230
2.805	0.977	−1.388	4.719	4.719	4.719	3.288	0.155	−1.903
1.618	1.476	−0.095	1.414	1.414	1.414	1.690	1.402	−0.108
1.798	1.633	−0.362	1.952	1.952	1.952	1.937	1.460	−0.410
36.059	−3.076	−5.441	34.715	34.715	34.715	37.672	−5.191	−7.380
0.719	−0.071	−0.146	0.889	0.889	0.889	0.804	−0.174	−0.240
24.931	−3.549	−18.310	54.192	54.192	54.192	27.329	−12.681	−25.558
1.336	0.104	−0.116	1.503	1.503	1.503	1.496	−0.054	−0.251
3.242	−4.583	−12.334	22.221	22.221	22.221	0.903	−9.148	−15.904
61.325	−0.665	−45.214	112.471	112.471	112.471	61.821	−14.865	−55.139
0.073	−0.085	−0.140	0.494	0.494	0.494	0.063	−0.179	−0.228
15.700	6.353	0.337	11.252	11.252	11.252	16.244	5.975	0.179
2.570	0.994	−3.245	6.455	6.455	6.455	2.457	0.038	−3.795
43.067	31.010	−39.109	99.606	99.606	99.606	50.591	11.179	−49.955
1.338	1.048	−0.068	2.630	2.630	2.630	1.861	0.333	−0.573
0.671	0.469	−0.263	0.943	0.943	0.943	0.728	0.367	−0.309

Таблица 3. Компоненты векторов Шепли для разных характеристических функций

$\Phi_1(\nu^{NM})$	$\Phi_2(\nu^{NM})$	$\Phi_3(\nu^{NM})$	$\Phi_1(\nu^{PG})$	$\Phi_2(\nu^{PG})$	$\Phi_3(\nu^{PG})$
10.412	8.645	8.724	15.538	14.879	–2.636
15.225	10.193	15.562	24.561	23.763	–7.345
6.326	4.512	5.584	9.565	9.041	–2.183
4.913	3.387	3.355	7.199	6.410	–1.952
26.560	19.912	25.408	41.054	40.380	–9.554
5.823	3.938	3.972	8.110	7.605	–1.983
1.753	1.440	2.348	3.199	3.028	–0.687
7.109	5.813	15.065	13.620	17.045	–2.679
10.372	9.434	19.076	21.307	21.652	–4.076
5.409	4.361	11.373	10.898	12.690	–2.445
1.222	1.139	1.821	2.353	2.217	–0.387
1.847	1.184	1.608	2.543	2.736	–0.640
503.016	361.525	638.532	819.673	899.294	–215.894
133.962	95.899	179.626	227.768	241.171	–59.451
19.508	14.579	28.707	33.221	36.747	–7.175
3.111	3.065	7.921	6.910	8.267	–1.079
0.599	0.555	0.955	1.027	1.158	–0.076
0.845	0.821	1.580	1.715	1.727	–0.198
4.273	3.937	7.768	8.124	8.605	–0.747
5.070	4.658	10.815	9.511	1.812	–0.779
9.326	6.873	12.997	16.802	16.915	–4.522
3.068	2.729	4.219	5.544	5.447	–0.975
1.173	2.495	6.235	6.530	6.990	–1.616
0.275	0.230	0.402	0.527	0.493	–0.112
2.333	1.928	3.174	3.283	4.117	0.035
4.219	3.421	6.517	7.147	8.148	–1.137
1.472	1.401	1.369	2.55	2.204	–0.217
1.893	1.812	2.151	2.994	3.121	–0.259
39.652	22.330	42.163	65.241	66.598	–27.694
0.920	0.577	1.168	1.576	1.642	–0.551
46.268	12.358	81.904	79.092	102.300	–18.817
1.629	1.057	1.824	2.646	2.695	–0.831
15.272	12.358	39.032	33.308	42.105	–8.750
99.209	73.081	165.124	183.262	205.724	–51.573
0.368	0.299	0.816	0.917	0.828	–0.262
14.195	9.496	10.066	20.841	18.828	–5.913
5.118	4.458	9.787	10.059	11.329	–2.025
79.686	74.476	144.657	127.292	176.091	–4.565
2.274	2.138	3.477	3.349	4.185	0.354
0.874	0.778	1.177	1.523	1.552	–0.246

наиболее эффективной фирмы в случае кооперации при равномерном распределении выигрыша может оказаться и больше, и меньше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм и при иерархии, когда данная фирма ведущая. Что касается компоненты вектора Шепли для данной фирмы, здесь также возможны различные соотношения в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна. В то же время в кооперативной игре в форме характеристической функции Громовой–Петросяна компонента вектора Шепли для самой эффективной фирмы всегда больше, чем ее выигрыш при свободной конкуренции, в иерархической игре, где она ведущая, и при кооперации в случае равномерного распределения дохода между игроками.

Что касается менее эффективной фирмы, ее выигрыш при кооперации всегда больше ее выигрыша при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии, где она является ведомой. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна всегда меньше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации. Компонента вектора Шепли в характеристической функции в форме Громовой–Петросяна всегда больше, чем выигрыши данной фирмы при кооперации или в равновесии Нэша или Штакельберга.

Что касается самой неэффективной фирмы, ее выигрыш при кооперации также всегда больше ее выигрыша при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии, в которой она является ведомой. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна также велика и в большинстве случаев даже больше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации в случае равномерного распределения выигрышей. Компонента вектора Шепли в характеристической функции в форме Громовой–Петросяна для такой фирмы всегда мала, в некоторых случаях даже меньше, чем выигрыш при свободной конкуренции, а иногда даже меньше, чем выигрыш при иерархии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Решая уравнение (1.6), находим

$$\alpha(t) = Ce^{(\rho+m)t} - \frac{1}{\rho+m}.$$

Постоянную C определим из граничных условий:

$$\alpha(T) = Ce^{(\rho+m)T} - \frac{1}{\rho+m} = 0, \quad C = \frac{1}{\rho+m}e^{-(\rho+m)T},$$

поэтому окончательно получаем выражение (1.7)

Решая уравнение (1.8) методом вариации произвольной постоянной, имеем

$$\beta(t) = C(t)e^{\rho t},$$

где

$$C(t) = \int e^{-\rho t}F(t)\,dt.$$

Подставляя выражение для $\alpha(t)$ в $F(t)$, получаем

$$F(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}(e^{2(\rho+m)(t-T)} - 2e^{(\rho+m)(t-T)} + 1) + \frac{Bk}{\rho+m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) + D =$$

$$= \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}e^{2(\rho+m)(t-T)} + \left(\frac{Bk}{\rho+m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2}\right)e^{(\rho+m)(t-T)} + D - \frac{Bk}{\rho+m} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}.$$

Тогда

$$C(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)}e^{(\rho+2m)t-2(\rho+m)T} + \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right)e^{mt-(\rho+m)T} -$$

$$-\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right)e^{-\rho t} + C.$$

Следовательно,

$$\beta(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} e^{2(\rho+m)(t-T)} + \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right) e^{(\rho+m)(t-T)} -$$
$$-\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right) + Ce^{\rho t}.$$

Постоянную интегрирования C определим из граничного условия

$$\beta(T) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} + \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right) -$$
$$-\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right) + Ce^{\rho T} = 0.$$

Значит,

$$C = -\frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} e^{-\rho T} - \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right) e^{-\rho T} +$$
$$+\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right) e^{-\rho T}.$$

Окончательно получаем выражение (1.9). Лемма 1 доказана.

Доказательство предложения 1. Введем функцию Беллмана

$$V_i(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left[(a - c_i - \bar{x}(s))\, x_i(s) - y(s)\right] ds.$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial y}\left(\sum_{j=1}^n k\, x_j - my\right) + (a - c_i - \bar{x})\, x_i - y \right\}. \tag{П.1}$$

Функцию Беллмана считаем линейной:

$$V_i(y,t) = \alpha(t)\, y + \beta(t).$$

Оптимизируя по $x_i(s)$ выражение, стоящее в фигурных скобках в (П.1), видим, что

$$\alpha k + a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j - 2x_i = 0,$$

так как

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^n k\, x_j = k,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a - c_i - \bar{x})\, x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j\right) x_i - x_i^2\right] = a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j - 2x_i.$$

Таким образом, имеем

$$\alpha k + a - c_i - \bar{x} - x_i = 0. \tag{П.2}$$

Выписав условие (П.2) для каждого $i = \overline{1,n}$ и просуммировав по i, получаем

$$\alpha nk + na - \bar{c} - n\bar{x} - \bar{x} = 0,$$

откуда находим

$$\bar{x} = \frac{1}{n+1}(\alpha nk + na - \bar{c}), \tag{П.3}$$

$$x_i = \alpha k + a - c_i - \bar{x} = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \bar{c} - (n+1)c_i). \tag{П.4}$$

С учетом (П.3) и (П.4), из (П.1) находим:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k\,\bar{x} - \alpha m y + (a - c_i - \bar{x})x_i - y. \tag{П.5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.5), получаем дифференциальные уравнения для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \tag{П.6}$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha k\,\bar{x} - (a - c_i - \bar{x})x_i, \quad \beta(T) = 0. \tag{П.7}$$

Согласно лемме 1, решение уравнения (П.6) имеет вид (1.7). Проверим, принадлежит ли найденная величина $x_i(t)$ промежутку $\left[0, \frac{a}{n}\right]$ при $t \in [0, t]$. Из (1.7) следует, что для $t \in [0, T]$ выполнено соотношение

$$-\frac{1}{\rho + m} < \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1) \le \alpha(t) \le 0.$$

Из (П.4) с учетом (1.4) и (1.5) вытекает, что

$$x_i = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \bar{c} - (n+1)c_i) > \frac{1}{n+1}\left(-\frac{k}{\rho + m} + nc_i + \frac{nk}{\rho + m} + \bar{c} - (n+1)c_i\right) > 0.$$

Условие

$$x_i = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \bar{c} - (n+1)c_i) \le \frac{1}{n+1}(a + \bar{c} - (n+1)c_i) \le \frac{a}{n},$$

т.е. $\bar{c} \le \frac{a}{n} + (n+1)c_i$, при $n = 3$ всегда выполняется, если $c_2/c_1 \le 3$.

Вычислим правую часть уравнения (П.7), подставляя в него (П.3), (П.4):

$$\begin{gathered} F(t) = -\alpha k\,\bar{x} - (a - c_i - \bar{x})x_i = -(\alpha k)^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \\ -\frac{\alpha k}{(n+1)^2}[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i] - \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2}. \end{gathered} \tag{П.8}$$

Тогда, согласно лемме 1,

$$\begin{gathered} \beta(t) = \frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \\ + \left(\frac{[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)m} - \frac{2n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ + \left(\frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2\rho} - \frac{[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)\rho} + \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}). \end{gathered}$$

Таким образом, $J_i^{\max} = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (1.11). Предложение 1 доказано.

Доказательство леммы 2. Введем функцию Беллмана

$$V_c(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)}\left[\sum_{i=1}^n (a - c_i - \bar{x}(s))x_i(s) - y(s)\right] ds.$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} \left\{ \frac{\partial V_c}{\partial y}\left(\sum_{j=1}^{n} k\, x_j - my\right) + \sum_{i=1}^{n}(a - c_i - \overline{x})\, x_i - y \right\}. \tag{П.9}$$

Функцию Беллмана считаем линейной:

$$V_c(y,t) = \alpha(t)\, y + \beta(t).$$

Оптимизируя (П.10) по $x_i(s)$, $i = \overline{1,n}$, получаем систему уравнений

$$\alpha k + a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j - 2x_i - \sum_{j\ne i} x_j = \alpha k + a - c_i - 2\overline{x} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Данная система уравнений при сделанном предположении $c_1 \ne c_2$ не имеет решений. Максимальное значение функции выигрыша лежит на границе области допустимых значений параметров $x_i(s)$.

Введем обозначение:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial V_c}{\partial y}\left(\sum_{j=1}^{n} k\, x_j - my\right) + \sum_{i=1}^{n}(a - c_i - \overline{x})\, x_i - y. \tag{П.10}$$

Тогда (П.9) принимает вид

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В любой момент времени максимум может находиться только на границе области определения управляющих переменных. В рассматриваемом случае строгого неравенства (2.5) максимум может лежать только на многообразии размерности 1 по тем же причинам, по которым он не может находиться внутри области, а именно максимум может быть только на ребре n-мерного куба.

Из начала координат будем двигаться вдоль того ребра n-мерного куба, для которого целевая функция быстрее всего растет (т.е. вдоль оси x_1). Если на данном ребре мы не встретили локального максимума, то, дойдя до вершины $(a/n, 0, \ldots, 0)$, изменим направление движения и будем теперь двигаться вдоль того ребра, вдоль которого целевая функция быстрее всего растет (т.е. вдоль оси x_2). И т.д. вплоть до точки, в которой производная по выбранному направлению обратится в 0. В этой точке, очевидно, целевая функция достигает локального максимума. Пусть это произойдет на l-м по счету ребре. В точке максимума имеем

$$\alpha k + a - c_l - 2\overline{x} = \alpha k + a - c_l - \frac{2(l-1)a}{n} - 2x_l = 0,$$

откуда

$$x_l = \frac{n\alpha k + na - nc_l - 2(l-1)a}{2n} = \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n}. \tag{П.11}$$

Таким образом, точка максимума имеет координаты

$$\left(x_1 = \frac{a}{n}, \ldots, x_{l-1} = \frac{a}{n}, x_l = \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n}, x_{l+1} = 0, \ldots, x_n = 0\right). \tag{П.12}$$

При этом

$$0 \le \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n} \le \frac{a}{n},$$

или

$$0 \le n\alpha k + (n - 2l + 2)a - nc_l \le 2a,$$

т.е. l – такое натуральное число, для которого

$$n\alpha k + (n-2l)a - nc_l \le 0,$$

$$0 \le n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство предложения 2. Предположим, что величина l не меняется на всем промежутке $[0,T]$. Заметим, что

$$\bar{x} = \frac{(l-1)a}{n} + \frac{n\alpha k + [n-2(l-1)]a - nc_l}{2n} = \frac{n\alpha k + na - nc_l}{2n} = \frac{\alpha k + a - c_l}{2}. \tag{П.13}$$

Подставляя (П.11), (П.12) и (П.13) в (П.9), запишем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k\,\bar{x} - \alpha m y + \sum_{i=1}^{l-1}(a - c_i - \bar{x})\frac{a}{n} + (a - c_l - \bar{x})x_l - y. \tag{П.14}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.14), получаем дифференциальные уравнения для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \tag{П.15}$$

$$\beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \tag{П.16}$$

где

$$F(t) = -\frac{1}{4}(\alpha k)^2 - \frac{(a-c_l)}{2}\alpha k - \frac{(a-c_l)^2}{4} + \frac{a\left[\sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)c_l\right]}{n}.$$

Решая уравнение (П.15)–(П16), согласно лемме 1, находим

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \left(\frac{(a-c_l)k}{2(\rho+m)m} - \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{(a-c_l)^2}{4\rho} - \frac{a\left[\sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)c_l\right]}{n\rho} - \frac{(a-c_l)k}{2(\rho+m)\rho} + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Таким образом, $J_c^{\max} = V_c(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (2.7). Предложение 2 доказано.

Доказательство предложения 3. Максимум функции U в (П.10) находится на первом ребре, если полученное из условия равенства нулю на первом ребре производной по направлению первого ребра

$$\alpha k + a - c_1 - 2x_1 = 0$$

значение переменной x_1

$$x_1 = \frac{\alpha k + a - c_1}{2}$$

для случая $n = 3$ окажется меньше $a/3$, т.е. если при некотором t_1 верно, что

$$\frac{\alpha k + a - c_1}{2} < \frac{a}{3},$$
$$\frac{3k}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t_1 - T)} - 1) < 3c_1 - a. \tag{П.17}$$

В этом случае при $t \in [0, t_1]$ максимум находится на первом ребре, а при $t \in [t_1, T]$ максимум находится на втором ребре, поскольку условие равенства нулю на втором ребре производной целевой функции по направлению второго ребра имеет вид

$$\alpha k + a - c_2 - \frac{2a}{3} - 2x_2 = 0,$$

откуда

$$x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{k}{2(\rho + m)}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) + \frac{a - 3c_2}{6} < \frac{a}{3}$$

при $t \le T$. Однако из (1.4) следует, что условие (П.17) всегда нарушено. Таким образом, для любого $t \in [t_1, T]$ максимум достигается на втором ребре в точке

$$\left(\frac{a}{3}, x_2(t), 0\right).$$

Предложение 3 доказано.

Доказательство предложения 4. Введем функцию Беллмана

$$V_i(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left[(a - c_i - x_1(s) - \tilde{x}(s))\, x_i(s) - y(s)\right] ds,$$

которую мы считаем линейной:

$$V_i(y,t) = \alpha(t)\, y + \beta(t).$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha(k(x_1 + \tilde{x}) - my) + (a - c_i - x_1 - \tilde{x})\, x_i - y\}, \quad \tilde{x} = \sum_{j=2}^{n} x_j. \tag{П.18}$$

Оптимизируя (П.18) по $x_i(s)$, находим

$$\alpha k + a - c_i - x_1 - \sum_{\substack{j=2,\\ j \ne i}}^{n} x_j - 2x_i = 0,$$

или

$$x_i = \alpha k + a - c_i - x_1 - \tilde{x}. \tag{П.19}$$

Суммируя по i от 2 до n, получаем

$$\tilde{x} = \alpha(n-1)k + (n-1)a - \tilde{c} - (n-1)x_1 - (n-1)\tilde{x},,$$

откуда

$$\tilde{x} = \frac{(n-1)}{n}\alpha k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n-1}{n}x_1, \quad \tilde{c} = \sum_{j=2}^{n} c_j. \tag{П.20}$$

Зная зависимость $\tilde{x}$ от x_1 (П.20), первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу (3.1) при ограничениях (1.2)–(1.5). Введем функцию Беллмана

$$V_1(y,t) = \max_{\substack{x_1(s),\\ t \le s \le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left[(a - c_1 - x_1(s) + \tilde{x}(s))\, x_1(s) - y(s)\right] ds,$$

которую считаем линейной: $V_1(y,t) = \alpha_1(t)\, y + \beta(t)$. Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для первого игрока:

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha_1(k(x_1 + \tilde{x}) - my) + (a - c_1 - x_1 - \tilde{x})\, x_1 - y\}. \tag{П.21}$$

Из (П.20) получаем

$$x_1 + \tilde{x} = \frac{(n-1)}{n}\alpha_1 k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{x_1}{n}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для первого игрока принимает вид

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s),\\ t\le s\le T}}\left\{\alpha_1\left(k\left(\frac{(n-1)}{n}\alpha_1 k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{x_1}{n}\right) - my\right) + \right.$$
$$\left. + \left(a - c_1 - \frac{(n-1)}{n}\alpha_1 k - \frac{(n-1)}{n}a + \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{x_1}{n}\right)x_1 - y\right\}. \tag{П.22}$$

Оптимизируя (П.22) по $x_1(s)$, находим

$$\frac{\alpha_1 k}{n} + a - c_1 - \frac{n-1}{n}\alpha_1 k - \frac{n-1}{n}a + \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{2x_1}{n} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{2-n}{2}\alpha_1 k + \frac{a}{2} + \frac{\tilde{c} - nc_1}{2}.$$

Из (П.22) находим

$$\rho\,\alpha_1 y + \rho\beta - \alpha_1' y - \beta' = \alpha_1 k\,(x_1 + \tilde{x}) - \alpha_1 m\,y + (a - c_1 - x_1 - \tilde{x})\,x_1 - y. \tag{П.23}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.23), определяем дифференциальные уравнения для $\alpha_1(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha_1' - (\rho + m)\,\alpha_1 = 1, \quad \alpha_1(T) = 0, \tag{П.24}$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha_1 k\,(x_1 + \tilde{x}) - (a - c_1 - x_1 - \tilde{x})\,x_1, \quad \beta(T) = 0. \tag{П.25}$$

Решая уравнение (П.24), согласно лемме1, находим

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) = \alpha(t).$$

Заметим, что при $n \ge 3$

$$x_1 = \frac{n-2}{2}\cdot\frac{k}{\rho+m}(1 - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \frac{a + \tilde{c} - nc_1}{2} > \frac{a}{n},$$

поскольку при ограничениях (1.2)–(1.5) очевидно, что

$$(n-2)\,a + n\tilde{c} - n^2 c_1 > 0.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{a}{n}, \quad \tilde{x} + x_1 = \frac{(n-1)}{n}\alpha k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{a}{n^2} = \frac{(n-1)}{n}\alpha k - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{n^2 - n + 1}{n^2}a. \tag{П.26}$$

Обозначим правую часть уравнения (П.25) $F(t)$. Подставляя (П.26) в (П.25), получаем

$$F(t) = -\frac{n-1}{n}(\alpha k)^2 + \alpha k\left(\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2}a\right) + \left(\frac{nc_1 - \tilde{c}}{n} - \frac{n-1}{n^2}a\right)\frac{a}{n}.$$

Согласно лемме 1, решение уравнения (П.25) имеет вид

$$\beta(t) = \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{(n^2-2n+2)k}{n^2(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{n(\rho+m)m} - \frac{2k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2 m}\right)\cdot(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left[\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left(\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-2n+2}{n^2}a\right) + \left(\frac{n-1}{n^2}a - \frac{nc_1-\tilde{c}}{n}\right)\frac{a}{n\rho} - \frac{(n-1)k^2}{n(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{\rho(t-T)}).$$

Таким образом, $J_1 = V_1(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (3.2).

Вернемся к решению задачи i-й фирмы-ведомого, $i = \overline{2,n}$. Из (П.18) следует

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k(x_1 + \tilde{x}) - \alpha m y + (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i - y. \tag{П.27}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.27), находим дифференциальные уравнения для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha' - (\rho+m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \tag{П.28}$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha k(x_1 + \tilde{x}) - (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i, \quad \beta(T) = 0. \tag{П.29}$$

Решая уравнение (П.28), получим

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho+m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1).$$

Обозначим правую часть уравнения (П.29) через $F(t)$. Подставим (П.19) и (П.26) в (П.29), тогда

$$F(t) = -\left(\frac{n-1}{n}\right)^2(\alpha k)^2 + \alpha k\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right] - \left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)^2.$$

Решение уравнения (П.29), согласно лемме 1, равно

$$\beta(t) = \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left\{\frac{2(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right]\right\}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)^2 +\right.$$
$$\left.+\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right] + \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2\rho}\right\}(1-e^{\rho(t-T)}).$$

Таким образом, $J_i = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (3.3). Предложение 4 доказано.

Доказательство предложения 5. При вычислении характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна, очевидно, $x_j = a/3$, $x_k = a/3$. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}}\left\{\frac{\partial V_i}{\partial y}\left(k\left(x_i + \frac{2a}{3}\right) - my\right) + \left(a - c_i - x_i - \frac{2a}{3}\right)x_i - y\right\}. \tag{П.30}$$

Считаем функцию Беллмана линейной

$$V_i(t, y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Максимизируя (П.30) по x_i, находим

$$\alpha k + a - c_i - 2x_i - \frac{2a}{3} = 0,$$

поэтому

$$x_i = \frac{3\alpha k + a - 3c_i}{6}. \tag{П.31}$$

Ясно, что в любой момент времени $0 < x_i < a/3$. Подставляя (П.31) в (П.30), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k x_i + \alpha k \frac{2a}{3} - \alpha m y + \left(\frac{a}{3} - c_i\right) x_i - x_i^2 - y. \tag{П.32}$$

Приравнивая коэффициенты при переменной y и свободные члены в левой и правой частях равенства (П.32), находим уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \tag{П.33}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} - \frac{5a - 3c_i}{6}\alpha k - \frac{(a - 3c_i)^2}{36}.$$

Решение (П.33), согласно лемме 1, имеет вид

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho + m)^2\rho} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_i)^2}{36\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{NM}(i) = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (4.1). Предложение 5 доказано.

Доказательство предложения 6. При вычислении характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна, очевидно, $x_k = a/3$. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \left\{\frac{\partial V_K}{\partial y}\left(k\left(x_i + \frac{a}{3}\right) - my\right) + \left(a - c_i - x_i - \frac{a}{3}\right)x_i - y\right\}, \tag{П.34}$$

поскольку из условия максимума

$$\alpha k + \frac{2a}{3} - c_i - 2x_i = 0$$

следует

$$0 < x_i = \frac{3\alpha k + 2a - 3c_i}{6} < \frac{a}{3},$$

т.е. максимум выигрыша коалиции достигается в точке

$$\left(x_i = \frac{3\alpha k + 2a - 3c_i}{6},\ x_j = 0,\ x_k = \frac{a}{3}\right). \tag{П.35}$$

Подставляя (П.35) в (П.34), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha\left[k\left(x_i + \frac{a}{3}\right) - my\right] + (a - c_i - x_i)x_i - y. \tag{П.36}$$

Приравнивая в (П.36) коэффициенты при переменной y и свободные члены в левой и правой частях равенства, находим уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \tag{П.37}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{\alpha k(3c_i - 5a)}{6} + \frac{(2a - 3c_i)(3c_i - 4a)}{36}.$$

Решаем уравнение (П.37) с помощью леммы 1:

$$\beta(t)=\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)}-e^{2(\rho+m)(t-T)})-\left(\frac{(3c_i-5a)k}{6(\rho+m)m}+\frac{k^2}{2(\rho+m)^2m}\right)(e^{\rho(t-T)}-e^{(\rho+m)(t-T)})+$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_i-5a)k}{6(\rho+m)\rho}-\frac{(2a-3c_i)(3c_i-4a)}{36\rho}\right)(1-e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{NM}(i,j)=V_K(0,y(0))=\alpha(0)y_0+\beta(0)$, окончательно получаем (4.2). Предложение 6 доказано.

Доказательство предложения 7. 1) Пусть $K=\{1,2\}$, $N\backslash K=\{3\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1=\frac{a}{3},\ x_2=\frac{3\alpha k+a-3c_2}{6},\ x_3=\frac{a}{3}\right). \tag{П.38}$$

Заметим, что

$$\bar{x}=\frac{2a}{3}+\frac{3\alpha k+a-3c_2}{6}=\frac{3\alpha k+5a-3c_2}{6}. \tag{П.39}$$

Функцию Беллмана считаем линейной по переменной y:

$$V(t,y)=\alpha(t)y+\beta(t).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K-\frac{\partial V_K}{\partial t}=\max_{\substack{x_i(s),\\ i=1,2,\\ t\le s\le T}}\{\alpha(k\bar{x}-my)+(a-c_1-\bar{x})x_1+(a-c_2-\bar{x})x_2-y\}. \tag{П.40}$$

Подставляя значения переменных (П.38) и (П.39) в уравнение (П.40), получаем

$$\rho\alpha y+\rho\beta-\alpha' y-\beta'=\alpha k\bar{x}-\alpha my+(a-c_1-\bar{x})\frac{a}{3}-(a-c_2-\bar{x})x_2-y,,$$

откуда

$$\alpha'-(\rho+m)\alpha=1,\quad \alpha(T)=0,\quad \beta'-\rho\beta=F(t),\quad \beta(T)=0, \tag{П.41}$$

где

$$F(t)=-\frac{(\alpha k)^2}{4}+\frac{3c_2-4a}{6}\alpha k-\frac{3a^2-12ac_1+9c_2^2}{36}.$$

Решаем уравнение (П.41), согласно лемме 1:

$$\beta(t)=\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)}-e^{2(\rho+m)(t-T)})-\left(\frac{2k^2}{(\rho+m)^2m}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{\rho(t-T)}-e^{(\rho+m)(t-T)})+$$
$$+\left(\frac{3a^2-12ac_1+9c_2^2}{36\rho}+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(1,2)=V_K(0,y(0))=\alpha(0)y_0+\beta(0)$, окончательно получаем (5.1).

2) Пусть $K=\{2,3\}$, $N\backslash K=\{1\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1=\frac{a}{3},\ x_2=\frac{3\alpha k+a-3c_2}{6},\ x_3=0\right). \tag{П.42}$$

Заметим, что

$$\bar{x}=\frac{a}{3}+\frac{3\alpha k+a-3c_2}{6}=\frac{3\alpha k+3a-3c_2}{6}=\frac{\alpha k+a-c_2}{2}. \tag{П.43}$$

Функцию Беллмана считаем линейной по переменной y:

$$V(t,y)=\alpha(t)y+\beta(t).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=2,3,\\ t\le s\le T}} \{\alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})\,x_2 - y\}. \tag{П.44}$$

Подставляя значения переменных (П.42) и (П.43) в уравнение (П.44), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})\,x_2 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered} \alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \end{gathered} \tag{П.45}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 4a}{6}\alpha k - \frac{a^2 - 4ac_2 + 3c_2^2}{12}.$$

Решая уравнение (П.45), согласно лемме 1, находим

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho + m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho + m)^2\rho} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - c_2)(a - 3c_2)}{12\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(2,3) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)\,y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.2).

3) Пусть $K = \{1,3\}$, $N\backslash K = \{2\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{a}{3},\ x_3 = 0\right). \tag{П.46}$$

Подставляя значения переменных (П.46) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, находим

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})\,x_1 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered} \alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \end{gathered} \tag{П.47}$$

где

$$F(t) = -\frac{2a}{3}\alpha k - \frac{(a - 3c_1)a}{9}.$$

Решаем уравнение (П.47):

$$\beta(t) = \frac{2ak}{3(\rho + m)m}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \left(\frac{(a - 3c_1)a}{9\rho} - \frac{2ak}{3(\rho + m)\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(1,3) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)\,y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.3).

4) Пусть $K = \{1\}$, $N\backslash K = \{2,3\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{a}{3},\ x_3 = \frac{a}{3}\right). \tag{П.48}$$

Подставляем значения переменных (П.48) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})\,x_1 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0,\\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0,\end{gathered} \tag{П.49}$$

где

$$F(t) = -a\alpha k + \frac{ac_1}{3}.$$

Решая уравнение (П.49), находим

$$\beta(t) = \frac{ak}{(\rho + m)m}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{ak}{(\rho + m)\rho} + \frac{ac_1}{3\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(1) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.4).

5) Пусть $K = \{2\}$, $N\backslash K = \{1,3\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6},\ x_3 = \frac{a}{3}\right). \tag{П.50}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}\bar{x} = \frac{2a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6},\\ a - c_2 - \bar{x} = a - c_2 - \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6} = \frac{a - 3c_2 - 3\alpha k}{6}.\end{gathered}$$

Подставляя значения переменных (П.50) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0,\\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \beta(T) = 0,\end{gathered} \tag{П.51}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 5a}{6}\alpha k - \frac{(a - 3c_2)^2}{36}.$$

Решая уравнение (П.51), находим

$$\begin{gathered}\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} + \frac{(3c_2 - 5a)k}{6(\rho + m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +\\ + \left(\frac{k^2}{4(\rho + m)^2\rho} + \frac{(3c_2 - 5a)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_2)^2}{36\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).\end{gathered}$$

Тогда $v^{PG}(2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.5).

6) Пусть $K = \{3\}$, $N\backslash K = \{1,2\}$. Тогда инвестиции игроков в равновесии равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{a}{3},\ x_3 = 0\right). \tag{П.52}$$

Подставляем значения переменных (П.52) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\bar{x} - my) - y,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0,\\ \beta' - \rho\beta = -\frac{2a}{3}\alpha k, \quad \beta(T) = 0,\end{gathered} \tag{П.53}$$

Решая уравнение (П.53), находим

$$\beta(t) = \frac{2ak}{3(\rho + m)m}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \frac{2ak}{3(\rho + m)\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)\, y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.6). Предложение 7 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Algorithmic Game Theory. Eds *N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirany*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
2. *Dubey P.* Inefficiency of Nash equilibria // Math. Operations Research, 1986. V. 11(1). P. 1–8.
3. *Johari R., Tsitsiklis J.N.* Efficiency Loss in a Network Resource Allocation Game // Math. Oper. Res. 2004. V. 29(3). P. 407–435.
4. *Moulin H., Shenker S.* Strategy Proof Sharing of Submodular Costs: Budget Balance Versus Efficiency // Econ. Theory. 2001. V. 18(3). P. 511–533.
5. *Roughgarden T.* Selfish Routing and the Price of Anarchy. Cambridge: MIT Press, 2005.
6. *Papadimitriou C.H.* Algorithms, Games, and the Internet // Proc. 33rd Sympos. Theory of Computing. Cambridge: 2001. P. 749–753.
7. *Угольницкий Г.А.* Методика сравнительного анализа эффективности способов организации активных агентов и методов управления // Проблемы управления. 2022. Т. 3. С. 29–39.
8. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200 с.
9. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995.
10. *Vives X.* Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools. Cambridge: MIT Press, 1999.
11. *Basar T., Olsder G.Y.* Dynamic Non-Cooperative Game Theory. Philadelphia: SIAM, 1999. 506 p.
12. *Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 382 p.
13. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
14. *Petrosjan L.A., Zenkevich N.A.* Game Theory. Basel: World Scientific Publishing, 1996.
15. *Petrosyan L.A., Yeung D.W.K.* Shapley Value for Differential Network Games: Theory and Application // J. Dynamics and Games. 2021. V. 8(2). P. 151–166.
16. *Shapley L.* A Value for *n*-person Games // Contributions to the Theory of Games. Vol. II Eds H.W. Kuhn, A.W. Tucker. Princeton: 1953.
17. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1953.
18. *Petrosjan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // J. Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27(3). P. 381–398.
19. *Gromova E.V., Petrosyan L.A.* On an Approach to Constructing a Characteristic Function in Cooperative Differential Games // Automation and Remote Control. 2017. V. 78. P. 1680–1692.
20. *Gromova E., Marova E., Gromov D.* A Substitute for the Classical Neumann–Morgenstern Characteristic Function in Cooperative Differential Games // J. Dynamics and Games. 2020. V. 7(2). P. 105–122.
21. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации // АиТ. 2013. № 2. С.109–122.
22. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Динамические модели коррупции в иерархических системах управления при эксплуатации биоресурсов // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С. 168–176.
23. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // АиТ. 2016. № 5. С. 148–158.
24. *Korolev A.V., Ougolnitsky G.A.* Optimal Resource Allocation in the Difference and Differential Stackelberg Games on Marketing Network // J. Dynamics and Games. 2020. V. 7(2). P. 141–162.