ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 2, с. 26–43

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.938

ПРИВЕДЕНИЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВХОДАМИ И ДВУМЯ ВЫХОДАМИ К УПРАВЛЕНИЮ ПО СОСТОЯНИЮ СИСТЕМОЙ С ОДНИМ ВХОДОМ

Н. Е. Зубов[a,b,]*, **А. В. Лапин**[a,c]

[a] *МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

[b] *ПАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, Королёв, Россия*

[c] *ФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия*

**e-mail: nik.zubov@gmail.com*

Поступила в редакцию 18.06.2022 г.
После доработки 22.07.2022 г.
Принята к публикации 26.09.2022 г.

Представлена задача модального управления по выходу динамическими системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами. Для определенного класса таких систем предложен способ приведения рассматриваемой задачи к задаче управления (прямой вариант) или наблюдения (дуальный вариант) для системы с одним входом. Подход основывается на двух последовательных преобразованиях подобия замкнутой системы “объект–регулятор по выходу”, дающих возможность обнулить одну из строк матрицы регулятора по состоянию или один из столбцов матрицы наблюдателя. Исследован класс систем, для которых условие такого обнуления одновременно является условием существования регулятора по выходу. Доказаны теоремы о неравенстве индексов управляемости и наблюдаемости в системе при выполнении представленных условий. Предложен вариант использования известных формул Басса–Гура и Аккермана, существенно упрощающий символьные выражения для регулятора (наблюдателя) в преобразованной системе. Рассмотрены примеры применения предлагаемого подхода, как в прямом, так и в дуальном варианте. Символьные вычисления в MATLAB подтверждают достоверность результатов.

DOI: 10.31857/S0002338823010122, **EDN:** JCCFZI

Введение. Объекты управления, описываемые системами четвертого порядка с двумя управляющими входами, достаточно распространены как в авиации [1], когда продольное [2] и боковое [3] движения летательного аппарата рассматриваются раздельно, так и при орбитальном движении космического аппарата во взаимосвязанных каналах крен–рысканье [4]. Возможные отказы измерительной аппаратуры могут приводить к ситуации, когда число измеряемых выходов равно двум. Для таких объектов решение задачи стабилизации (с заданным размещением полюсов замкнутой системы управления) путем построения наблюдателя состояния [5] из-за ошибок оценивания может приводить к недостаточной точности стабилизации, а также к повышению длительности переходных процессов и расхода топлива. Поэтому исследования, направленные на решение задачи управления по выходу системой четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами, являются актуальными.

Ввиду математической сложности задачи модального управления по выходу в настоящее время ее универсального аналитического решения не существует. Известные методы решения ограничены в применимости соотношением между количеством состояний, входов и выходов или конкретным видом матриц состояния, управления и наблюдения. Так, метод решения данной задачи, основанный на подходах Ван дер Воуда [6], предполагает, что суммарная размерность векторов управления и наблюдения больше размерности вектора состояния [7]. Параметрический метод [8], базирующийся на выделении регулятора по выходу из общего параметризованного множества регуляторов (наблюдателей) по состоянию [9], напрямую применим лишь в частных случаях, когда параметры расположены так, что обнуление нужных столбцов (строк) в регуляторе (наблюдателе) по состоянию очевидно. В общем же случае для определения параметров, при которых реализуется регулятор по выходу, возникает необходимость решать нелинейные системы уравнений, что аналитически сделать затруднительно или невозможно. Также имеется зависимость от порядка следования желаемых полюсов.

В настоящей работе для определенного класса систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами задача управления по выходу сводится к задаче управления (наблюдения) по состоянию для системы с одним входом, решение которой единственно и хорошо известно [10].

1. Постановка задачи. Задана полностью управляемая и полностью наблюдаемая система [11]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{x}$ – вектор состояния с числом компонент $n = 4$, $\mathbf{u}$ – вектор управления с двумя входами $r = 2$, $\mathbf{y}$ – вектор выхода размерности $m = 2$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ – матрица состояния, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times2}$ – матрица управления (входов), $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times4}$ – матрица наблюдения (выходов), $\mathbb{R}$ – множество вещественных матриц.

Требуется определить матрицу регулятора по выходу $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2\times2}$, обеспечивающую матрице замкнутой системы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ заданный характеристический полином [12]:

$$\varphi^*(\lambda) = \operatorname{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{BFC}) = \lambda^4 + p_3^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_1^*\lambda^1 + p_0^*\lambda^0. \tag{1.2}$$

2. Приведение к задаче управления с одним входом (прямой подход). Предположим, что индекс наблюдаемости [13] заданной системы (1.1) равен двум, т.е.

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{N}}} \neq 0. \tag{2.1}$$

Введем обозначение для матрицы наблюдателя по состоянию

$$\mathbf{L} = \mathbf{BF}. \tag{2.2}$$

Над матрицей замкнутой системы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$ выполним преобразование подобия [14]

$$\mathbf{A}_\mathbf{C}^* = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}^*\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{P}_{\mathbf{C}0} & -\mathbf{P}_{\mathbf{C}1} \end{array}\right]}_{\mathbf{A}_\mathbf{C}=\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{N}}^{-1}} - \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{CL} & \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{CAL} & \mathbf{0}_{2\times2} \end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{LC}\tilde{\mathbf{N}}^{-1}} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{CL} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{P}_{\mathbf{C}0} - \mathbf{CAL} & -\mathbf{P}_{\mathbf{C}1} \end{array}\right],$$

где блоки $\mathbf{P}_{\mathbf{C}0},\ \mathbf{P}_{\mathbf{C}1} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ таковы, что

$$-\left[\mathbf{P}_{\mathbf{C}0} \,|\, \mathbf{P}_{\mathbf{C}1}\right] = \mathbf{R}_\mathbf{C} = \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} r_{\mathrm{C}1,1} & r_{\mathrm{C}1,2} & r_{\mathrm{C}1,3} & r_{\mathrm{C}1,4} \\ r_{\mathrm{C}2,1} & r_{\mathrm{C}2,2} & r_{\mathrm{C}2,3} & r_{\mathrm{C}2,4} \end{array}\right],$$

а преобразованная матрица состояния разомкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{A}_\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{\mathrm{C}1,1} & r_{\mathrm{C}1,2} & r_{\mathrm{C}1,3} & r_{\mathrm{C}1,4} \\ r_{\mathrm{C}2,1} & r_{\mathrm{C}2,2} & r_{\mathrm{C}2,3} & r_{\mathrm{C}2,4} \end{array}\right]. \tag{2.3}$$

Здесь и далее $\mathbf{0}_{n\times m}$ – нулевая матрица, имеющая размерность $n \times m$, $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица, имеющая порядок n.

Далее, выполнив еще одно преобразование подобия [14] через матрицу

$$\mathbf{T}_\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{CL} & \mathbf{I}_2 \end{array}\right],$$

получим матрицу, которая должна иметь желаемый полином $\varphi^*(\lambda)$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{C}^* = \mathbf{T}_\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_\mathbf{C}^*\mathbf{T}_\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{P}_{\mathbf{C}0} - \mathbf{CAL} - \mathbf{P}_{\mathbf{C}1}\mathbf{CL} & -\mathbf{P}_{\mathbf{C}1} - \mathbf{CL} \end{array}\right] = \mathbf{A}_\mathbf{C} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \underbrace{\left[(\mathbf{CA} + \mathbf{P}_{\mathbf{C}1}\mathbf{C})\mathbf{L} \,|\, \mathbf{CL}\right]}_{\mathbf{K}_\mathbf{C}}.$$

Обеспечение желаемого полинома матрице $\tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{C}^*$ путем выбора матрицы $\mathbf{K}_\mathbf{C}$ представляет собой задачу модального управления по состоянию с двумя входами (MIMO – multi input multi output система). Для приведения к задаче с одним входом (к SIMO – single input multi output системе) обнулим одну из строк матрицы $\mathbf{K_C}$.

Пусть $\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}$ – соответственно первая и вторая строки матрицы наблюдения $\mathbf{C}$. Условия обнуления первой (а) или второй (б) строки матрицы $\mathbf{K_C}$

$$(\text{а})\ \ [1 \mid 0][(\mathbf{CA}+\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{CL}] = \left[\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AL} - [1 \mid 0]\underbrace{\mathbf{R_C}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 2}\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}}_{-\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{L}}_{\mathbf{CL}} \,\Big|\, \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right] = \mathbf{0}_{1\times 4},$$

$$(\text{б})\ \ [0 \mid 1][(\mathbf{CA}+\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{CL}] = \left[\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{AL} - [0 \mid 1]\underbrace{\mathbf{R_C}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 2}\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}}_{-\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{L}}_{\mathbf{CL}} \,\Big|\, \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right] = \mathbf{0}_{1\times 4}$$

принимают соответственно вид

$$(\text{а})\ \ \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - r_{\mathrm{C}1,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{L} = \mathbf{0}_{2\times 2},\quad (\text{б})\ \ \begin{bmatrix}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - r_{\mathrm{C}2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{L} = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{2.4}$$

При этом ненулевая строка матрицы $\mathbf{K_C}$ становится соответственно равна

$$(\text{а})\ \ [0 \mid 1][(\mathbf{CA}+\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{CL}] = \left[\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{AL} - [0 \mid 1]\underbrace{\mathbf{R_C}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 2}\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}}_{-\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{L}}_{\mathbf{CL}} \,\Big|\, \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right],$$

$$(\text{б})\ \ [1 \mid 0][(\mathbf{CA}+\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{CL}] = \left[\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AL} - [1 \mid 0]\underbrace{\mathbf{R_C}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 2}\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}}_{-\mathbf{P}_{\mathrm{C}1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{L}}_{\mathbf{CL}} \,\Big|\, \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right].$$

При выполнении одного из условий (2.4) приходим к SIMO-системе

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^{*} = \mathbf{A_C} - \mathbf{b_C}\mathbf{k}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} \tag{2.5}$$

с матрицей состояния (2.3) и соответственно матрицей управления (вектор-столбец)

$$(\text{а})\ \ \mathbf{b_C} = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]^{\mathrm{T}},\quad (\text{б})\ \ \mathbf{b_C} = [0 \mid 0 \mid 1 \mid 0]^{\mathrm{T}} \tag{2.6}$$

и матрицей регулятора (вектор-строка) $\mathbf{k}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{k}_{\mathrm{C}1}^{\mathrm{T}} \mid \mathbf{k}_{\mathrm{C}2}^{\mathrm{T}}\right]$, где $\mathbf{k}_{\mathrm{C}1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{k}_{\mathrm{C}2}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$,

$$(\text{а})\ \ \begin{bmatrix}\mathbf{k}_{\mathrm{C}1}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{k}_{\mathrm{C}2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - r_{\mathrm{C}2,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_2^{T}\end{bmatrix}\mathbf{L},\quad (\text{б})\ \ \begin{bmatrix}\mathbf{k}_{\mathrm{C}1}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{k}_{\mathrm{C}2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - r_{\mathrm{C}1,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{L}. \tag{2.7}$$

SIMO-система (2.5) полностью управляема при условии

$$\det\underbrace{\left[\mathbf{b_C} \mid \mathbf{A_C b_C} \mid \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^2\mathbf{b_C} \mid \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^3\mathbf{b_C}\right]}_{\mathbf{U_C}} \neq 0. \tag{2.8}$$

Задача модального управления при желаемом характеристическом полиноме $\varphi^*(\lambda)$ в SIMO-системе (2.5) решается с помощью формулы Аккермана [10]:

$$\left[\mathbf{k}_{\mathrm{C}1}^{\mathrm{T}} \mid \mathbf{k}_{\mathrm{C}2}^{\mathrm{T}}\right] = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]\mathbf{U}_{\mathbf{C}}^{-1}\varphi^*(\mathbf{A_C}) = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{C}}^{-1}\varphi^*(\mathbf{A})\tilde{\mathbf{N}}^{-1}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{i} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}^{i}\tilde{\mathbf{N}}^{-1}$ $(i = \overline{0,\ldots,4})$, $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{C}} = \left[\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}} \mid \mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}} \mid \mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}} \mid \mathbf{A}^3\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}}\right]$, $\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{b_C}$.

Матрицу наблюдателя $\mathbf{L}$ (2.2) определим из соотношения

$$\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AL}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{AL}\end{bmatrix}.$$

С учетом значений (2.4) и (2.7) соответственно получим

$$(а)\quad \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \\ r_{C1,4}\mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} + r_{C2,4}\mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{CA}\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \\ \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}},$$

$$(б)\quad \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} + r_{C1,3}\mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \\ r_{C2,3}\mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{CA}\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \\ \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, в силу значений (2.6), в обоих случаях (а) и (б) матрица наблюдателя по состоянию равна

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\left[\mathbf{b}_{C} \,\middle|\, \mathbf{A}_{C}\mathbf{b}_{C}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \left[\tilde{\mathbf{b}}_{C} \,\middle|\, \mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_{C}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Условие обнуления (2.4) будет одновременно условием разрешимости уравнения (2.2) относительно матрицы регулятора по выходу **F** [6], если первый множитель в левой части равенства (2.4) является левым аннулятором матрицы **B**, т.е. соответственно если

$$(а)\quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - r_{C1,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\mathbf{B} = \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad (б)\quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - r_{C2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\mathbf{B} = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{2.11}$$

Пусть $\mathbf{B}^{+} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ – псевдообратная матрица [6] к матрице управления **B**. Тогда решение уравнения (2.2) и задачи (1.2) в целом при выполнении условий (2.1), (2.8), (2.11) с учетом значения матрицы **L** (2.10) принимает вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{L} = \mathbf{B}^{+}\left[\tilde{\mathbf{b}}_{C} \,\middle|\, \mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_{C}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{k}_{C2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Отметим, что условие (2.11) приводимости к задаче управления с одним входом может быть верно, только если индекс управляемости рассматриваемой системы (1.1) больше индекса ее наблюдаемости [13]. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. Задана полностью управляемая и полностью наблюдаемая тройка матриц состояния, управления и наблюдения (1.1). Пусть индекс их наблюдаемости равен 2, т.е. выполняется условие (2.1), и справедливо одно из равенств (2.11), где соответственно $\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}$ – строки матрицы наблюдения, а $r_{C1,4}$ и $r_{C2,3}$ – элементы матрицы (2.3). Тогда индекс управляемости матриц (1.1) равен 3 (больше индекса наблюдаемости).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимо и достаточно показать, что вырождается матрица

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \,\middle|\, \mathbf{AB}\right].$$

В силу условия (2.1) вырождение матрицы $\tilde{\mathbf{U}}$ эквивалентно вырождению матрицы $\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}$, которая имеет ненулевой аннулятор [6]:

$$(а)\quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{1\times 2} & r_{C1,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B} & \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \\ r_{C1,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B} & \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2^{T}\mathbf{AB} & \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array}\right], \qquad \left(\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}\right)^{L} = \begin{cases} \left[1 \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 0\right], & r_{C1,4} = 0, \\ \left[r_{C1,3} + r_{C1,2}/r_{C1,4} \,|\, r_{C1,4} \,|\, -1 \,|\, 0\right], & r_{C1,4} \neq 0, \end{cases}$$

$$
(б)\quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} & \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \\ \mathbf{0}_{1\times2} & r_{\mathrm{C}2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} & \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ r_{\mathrm{C}2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} & \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{array}\right], \quad \left(\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}\right)^L = \begin{cases} [0|1|0|0], & r_{\mathrm{C}2,3} = 0, \\ [r_{\mathrm{C}2,3}|r_{\mathrm{C}2,4} + r_{\mathrm{C}2,1}/r_{\mathrm{C}2,3}|0|-1], & r_{\mathrm{C}2,3} \neq 0. \end{cases}
$$

Тогда справедливы равенства

$$
(а)\quad r_{\mathrm{C}1,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} = \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} = \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{N}} - \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\\ \mathbf{0}_{1\times4}\end{bmatrix}\right)\mathbf{B} = \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{1\times2}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\\ r_{\mathrm{C}1,4}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}_{1\times2}\end{bmatrix} =
$$

$$
= \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}[0|1|r_{\mathrm{C}1,4}|0]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} - (r_{\mathrm{C}1,2} + r_{\mathrm{C}1,3}r_{\mathrm{C}1,4})\,\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B},
$$

$$
(б)\quad r_{\mathrm{C}2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} = \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} = \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{N}} - \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0}_{1\times4}\\ \mathbf{c}_2^{T}\mathbf{A}\end{bmatrix}\right)\mathbf{B} = \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}_{1\times2}\\ \mathbf{0}_{1\times2}\\ r_{\mathrm{C}2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\end{bmatrix} =
$$

$$
= \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}[1|0|0|r_{\mathrm{C}2,3}]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{B} - (r_{\mathrm{C}2,1} + r_{\mathrm{C}2,3}r_{\mathrm{C}2,4})\,\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}.
$$

Теорема доказана.

Наибольшую вычислительную сложность в предлагаемом алгоритме представляет формула Аккермана (2.9). Это обусловлено необходимостью возводить матрицу четвертого порядка в третью и четвертую степени, а также обращать матрицу, содержащую указанные степени. Между тем результат содержит большое количество подобных слагаемых, отследить которые в общем случае затруднительно как вручную, так и с применением команды “simplify” в MATLAB. Далее в виде теоремы предложен метод расчета модального регулятора для SIMO-системы (2.5), не требующий возведения матриц в высокие степени и существенно упрощающий окончательное символьное выражение для регулятора.

Т е о р е м а 2. Решение задачи модального управления для SIMO-системы (2.5) с обеспечением характеристического полинома $\varphi^*(\lambda) = \lambda^4 + p_3^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_1^*\lambda + p_0^*$ записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&(а)\quad \mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} = \left[r_{\mathrm{C}2,1} + k_{\mathrm{C}1,1}\,\middle|\, r_{\mathrm{C}2,2} + q_{\mathrm{C}2} - r_{\mathrm{C}1,4}k_{\mathrm{C}1,3}\,\middle|\, r_{\mathrm{C}2,3} + k_{\mathrm{C}1,3}\,\middle|\, r_{\mathrm{C}2,4} + \Delta p_{\mathrm{C}3}^*\right], \\
&(б)\quad \mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} = \left[r_{\mathrm{C}1,1} + q_{\mathrm{C}2} - r_{\mathrm{C}2,3}k_{\mathrm{C}1,4}\,\middle|\, r_{\mathrm{C}1,2} + k_{\mathrm{C}1,2}\,\middle|\, r_{\mathrm{C}1,3} + \Delta p_{\mathrm{C}3}^*\,\middle|\, r_{\mathrm{C}1,4} + k_{\mathrm{C}1,4}\right],
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

где

$$
(а)\quad \begin{cases}
\tilde{r}_{\mathrm{C}1,2} = r_{\mathrm{C}1,2} + r_{\mathrm{C}1,3}r_{\mathrm{C}1,4}, \\
d_{\mathrm{C}} = r_{\mathrm{C}1,1}r_{\mathrm{C}1,4} - r_{\mathrm{C}1,2}r_{\mathrm{C}1,3}, \\
t_{\mathrm{C}} = r_{\mathrm{C}1,4}d_{\mathrm{C}} - r_{\mathrm{C}1,2}^2, \\
\Delta p_{\mathrm{C}2}^* = p_2^* + r_{\mathrm{C}1,1}, \\
\Delta p_{\mathrm{C}3}^* = p_3^* + r_{\mathrm{C}1,3}, \\
q_{\mathrm{C}1} = p_1^* + r_{\mathrm{C}1,1}\Delta p_{\mathrm{C}3}^*, \\
q_{\mathrm{C}2} = \Delta p_{\mathrm{C}2}^* + r_{\mathrm{C}1,3}\Delta p_{\mathrm{C}3}^*, \\
k_{\mathrm{C}1,1} = (r_{\mathrm{C}1,1}(r_{\mathrm{C}1,4}q_{\mathrm{C}1} - r_{\mathrm{C}1,2}q_{\mathrm{C}2}) - \tilde{r}_{\mathrm{C}1,2}p_0^*)/t_{\mathrm{C}}, \\
k_{\mathrm{C}1,3} = (r_{\mathrm{C}1,4}p_0^* - r_{\mathrm{C}1,2}q_{\mathrm{C}1} + d_{\mathrm{C}}q_{\mathrm{C}2})/t_{\mathrm{C}},
\end{cases}
\qquad
(б)\quad \begin{cases}
\tilde{r}_{\mathrm{C}2,1} = r_{\mathrm{C}2,1} + r_{\mathrm{C}2,3}r_{\mathrm{C}2,4}, \\
d_{\mathrm{C}} = r_{\mathrm{C}2,2}r_{\mathrm{C}2,3} - r_{\mathrm{C}2,1}r_{\mathrm{C}2,4}, \\
t_{\mathrm{C}} = r_{\mathrm{C}2,3}d_{\mathrm{C}} - r_{\mathrm{C}2,1}^2, \\
\Delta p_{\mathrm{C}2}^* = p_2^* + r_{\mathrm{C}2,2}, \\
\Delta p_{\mathrm{C}3}^* = p_3^* + r_{\mathrm{C}2,4}, \\
q_{\mathrm{C}1} = p_1^* + r_{\mathrm{C}2,2}\Delta p_{\mathrm{C}3}^*, \\
q_{\mathrm{C}2} = \Delta p_{\mathrm{C}2}^* + r_{\mathrm{C}2,4}\Delta p_{\mathrm{C}3}^*, \\
k_{\mathrm{C}1,2} = (r_{\mathrm{C}2,2}(r_{\mathrm{C}2,3}q_{\mathrm{C}1} - r_{\mathrm{C}2,1}q_{\mathrm{C}2}) - \tilde{r}_{\mathrm{C}2,1}p_0^*)/t_{\mathrm{C}}, \\
k_{\mathrm{C}1,4} = (r_{\mathrm{C}2,3}p_0^* - r_{\mathrm{C}2,1}q_{\mathrm{C}1} + d_{\mathrm{C}}q_{\mathrm{C}2})/t_{\mathrm{C}}.
\end{cases}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача модального управления для SIMO-системы (2.5) эквивалентна задаче с обеспечением того же полинома $\varphi^*(\lambda)$, но для более простой системы:

$$\text{(а)}\ \begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^* = \underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\r_{C1,1}&r_{C1,2}&r_{C1,3}&r_{C1,4}\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}} - \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = [r_{C2,1} \mid r_{C2,2} \mid r_{C2,3} \mid r_{C2,4}] + \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}, \end{cases} \qquad \text{(б)}\ \begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^* = \underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\r_{C2,1}&r_{C2,2}&r_{C2,3}&r_{C2,4}\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}} - \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = [r_{C1,1} \mid r_{C1,2} \mid r_{C1,3} \mid r_{C1,4}] + \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

Решение этой задачи компактно записывается с помощью алгоритма Басса–Гура [9]:

$$\text{(а)}\ \begin{cases} \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = \left[p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{C2}^* \mid \Delta p_{C3}^*\right]\bar{\mathbf{T}}_{\mathbf{C}}^{-1}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} r_{C1,2} & r_{C1,4} & 0 & 0 \\ -r_{C1,1} & -r_{C1,3} & 1 & 0 \\ 0 & r_{C1,2} & r_{C1,4} & 0 \\ 0 & -r_{C1,1} & -r_{C1,3} & 1 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{\mathbf{C}}^{-1} = \dfrac{1}{t_C}\begin{bmatrix} -\tilde{r}_{C1,2} & -r_{C1,4}^2 & r_{C1,4} & 0 \\ r_{C1,1}r_{C1,4} & r_{C1,2}r_{C1,4} & -r_{C1,2} & 0 \\ -r_{C1,1}r_{C1,2} & -r_{C1,2}^2 & d_C & 0 \\ r_{C1,1}d_C & r_{C1,2}d_C & \tilde{d}_C & t_C \end{bmatrix}, \end{cases} \qquad \text{(б)}\ \begin{cases} \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = \left[p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{C2}^* \mid \Delta p_{C3}^*\right]\bar{\mathbf{T}}_{\mathbf{C}}^{-1}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -r_{C2,2} & -r_{C2,4} & 1 & 0 \\ r_{C2,1} & r_{C2,3} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{C2,2} & -r_{C2,4} & 1 \\ 0 & r_{C2,1} & r_{C2,3} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{\mathbf{C}}^{-1} = \dfrac{1}{t_C}\begin{bmatrix} -r_{C2,3}^2 & -\tilde{r}_{C2,1} & 0 & r_{C2,3} \\ r_{C2,1}r_{C2,3} & r_{C2,2}r_{C2,3} & 0 & -r_{C2,1} \\ -r_{C2,1}^2 & -r_{C2,1}r_{C2,2} & 0 & d_C \\ r_{C2,1}d_C & r_{C2,2}d_C & t_C & \tilde{d}_C \end{bmatrix}, \end{cases}$$

где

$$\text{(а)}\ \begin{cases} \tilde{r}_{C1,2} = r_{C1,2} + r_{C1,3}r_{C1,4}, \\ d_C = r_{C1,1}r_{C1,4} - r_{C1,2}r_{C1,3}, \\ t_C = r_{C1,4}d_C - r_{C1,2}^2, \\ \tilde{d}_C = d_C r_{C1,3} - r_{C1,1}r_{C1,2}, \\ \Delta p_{C2}^* = p_2^* + r_{C1,1}, \\ \Delta p_{C3}^* = p_3^* + r_{C1,3}, \end{cases} \qquad \text{(б)}\ \begin{cases} \tilde{r}_{C2,1} = r_{C2,1} + r_{C2,3}r_{C2,4}, \\ d_C = r_{C2,2}r_{C2,3} - r_{C2,1}r_{C2,4}, \\ t_C = r_{C2,3}d_C - r_{C2,1}^2, \\ \tilde{d}_C = d_C r_{C2,4} - r_{C2,1}r_{C2,2}, \\ \Delta p_{C2}^* = p_2^* + r_{C2,2}, \\ \Delta p_{C3}^* = p_3^* + r_{C2,4}. \end{cases}$$

При этом условие полной управляемости (2.8) принимает вид $t_C \neq 0$, т.е.

$$\text{(а)}\ \ r_{C1,2}^2 \neq r_{C1,4}d_C, \qquad \text{(б)}\ \ r_{C2,1}^2 \neq r_{C2,3}d_C. \tag{2.14}$$

Далее, выполнив перемножение в формуле Басса–Гура, запишем выражения для коэффициентов регулятора $\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = [k_{C1,1} \mid k_{C1,2} \mid k_{C1,3} \mid k_{C1,4}]$:

$$\text{(а)}\ \begin{cases} k_{C1,1}t_C = r_{C1,1}\left(\left[p_1^* \mid \Delta p_{C2}^*\right] + \Delta p_{C3}^*\left[r_{C1,1} \mid r_{C1,3}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2}\end{bmatrix} - \tilde{r}_{C1,2}p_0^* = r_{C1,1}\left[q_{C1} \mid q_{C2}\right]\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2}\end{bmatrix} - \tilde{r}_{C1,2}p_0^*, \\ k_{C1,2}t_C = r_{C1,2}\left(\left[p_1^* \mid \Delta p_{C2}^*\right] + \Delta p_{C3}^*\left[r_{C1,1} \mid r_{C1,3}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2}\end{bmatrix} - r_{C1,4}^2p_0^* = r_{C1,2}\left[q_{C1} \mid q_{C2}\right]\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2}\end{bmatrix} - r_{C1,4}^2p_0^* = \\ = \left(r_{C1,2}\left[q_{C1} \mid q_{C2}\right] - r_{C1,4}\left[p_0^* \mid 0\right] - q_{C1}\left[r_{C1,2} \mid r_{C1,4}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2}\end{bmatrix} = -r_{C1,4}\left[p_0^* \mid q_{C1}\right]\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2}\end{bmatrix} - r_{C1,2}^2q_{C2}, \\ k_{C1,3}t_C = \left(\left[p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{C2}^*\right] + \Delta p_{C3}^*\left[0 \mid r_{C1,1} \mid r_{C1,3}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2} \\ d_C\end{bmatrix} = \left[p_0^* \mid q_{C1} \mid q_{C2}\right]\begin{bmatrix} r_{C1,4} \\ -r_{C1,2} \\ d_C\end{bmatrix}, \\ k_{C1,4} = \Delta p_{C3}^*, \end{cases}$$

$$
(\text{б})\quad \begin{cases}
k_{C1,1}t_C = r_{C2,1}\left(\left[\begin{array}{c|c} p_1^* & \Delta p_{C2}^* \end{array}\right] + \Delta p_{C3}^*\left[\begin{array}{c|c} r_{C2,2} & r_{C2,4}\end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1}\end{bmatrix} - r_{C2,3}^2 p_0^* = r_{C2,1}\left[\begin{array}{c|c} q_{C1} & q_{C2}\end{array}\right]\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1}\end{bmatrix} - r_{C2,3}^2 p_0^* = \\
= \left(r_{C2,1}\left[\begin{array}{c|c} q_{C1} & q_{C2}\end{array}\right] - r_{C2,3}\left[\begin{array}{c|c} p_0^* & 0\end{array}\right] - q_{C1}\left[\begin{array}{c|c} r_{C2,1} & r_{C2,3}\end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1}\end{bmatrix} = -r_{C2,3}\left[\begin{array}{c|c} p_0^* & q_{C1}\end{array}\right]\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1}\end{bmatrix} - r_{C2,1}^2 q_{C2}, \\
k_{C1,2}t_C = r_{C2,2}\left(\left[\begin{array}{c|c} p_1^* & \Delta p_{C2}^* \end{array}\right] + \Delta p_{C3}^*\left[\begin{array}{c|c} r_{C2,2} & r_{C2,4}\end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1}\end{bmatrix} - \tilde r_{C2,1} p_0^* = r_{C2,2}\left[\begin{array}{c|c} q_{C1} & q_{C2}\end{array}\right]\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1}\end{bmatrix} - \tilde r_{C2,1} p_0^*, \\
k_{C1,3} = \Delta p_{C3}^*, \\
k_{C1,4}t_C = \left(\left[\begin{array}{c|c|c} p_0^* & p_1^* & \Delta p_{C2}^* \end{array}\right] + \Delta p_{C3}^*\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & r_{C2,2} & r_{C2,4}\end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \\ d_C\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} p_0^* & q_{C1} & q_{C2}\end{array}\right]\begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \\ d_C\end{bmatrix},
\end{cases}
$$

где

$$
(\text{а})\quad \begin{cases} q_{C1} = p_1^* + r_{C1,1}\Delta p_{C3}^*, \\ q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{C1,3}\Delta p_{C3}^*, \end{cases} \qquad (\text{б})\quad \begin{cases} q_{C1} = p_1^* + r_{C2,2}\Delta p_{C3}^*, \\ q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{C2,4}\Delta p_{C3}^*. \end{cases}
$$

После обратного перехода от вектора $\bar{\mathbf{k}}_C^T$ к вектору $\mathbf{k}_C^T$ получается результат (2.13).

Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий (2.1), (2.11) и (2.14) регулятор по выходу (матрица $\mathbf{F}$) рассчитывается по формуле (2.12) с подстановкой значений (2.13).

П р и м е р 1 (а). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{array}\right], \quad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].
$$

Запишем первые две блочные строки матрицы наблюдаемости:

$$
\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{array}\right], \quad \det \tilde{\mathbf{N}} = a_{3,1}a_{4,2}.
$$

Если $a_{3,1}a_{4,2} \neq 0$, то индекс наблюдаемости равен 2, т.е. верно условие (2.1).

Для проверки (2.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$
\mathbf{R}_C = \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} r_{C1,1} & r_{C2,1} \\ r_{C1,2} & r_{C2,2} \\ r_{C1,3} & r_{C2,3} \\ r_{C1,4} & r_{C2,4} \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{c|c} a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3} & a_{1,3}a_{4,1} + a_{2,3}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,3} - a_{3,3}\tilde a_{4,1} \\ a_{1,4}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,4} & a_{1,4}a_{4,1} + a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4} - a_{3,4}\tilde a_{4,1} \\ a_{1,1} + a_{3,3} & a_{4,3} + \tilde a_{4,1} \\ a_{3,4} & a_{4,4} + a_{2,2} \end{array}\right]^T,
$$

где $\tilde a_{4,1} = \left(a_{4,1}\left(a_{1,1} - a_{2,2}\right) + a_{2,1}a_{4,2}\right)/a_{3,1}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального управления с одним входом, так как выполнен вариант (а) условия (2.11):

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{A} - r_{C1,4}\mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_1^T \end{bmatrix}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & b_{2,1} & 0 & b_{4,1} \\ 0 & b_{2,2} & 0 & b_{4,2} \end{array}\right]^T = \mathbf{0}_{2\times 2}.
$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 2:

$$
\tilde r_{C1,2} = r_{C1,2} + r_{C1,3}r_{C1,4} = a_{1,4}a_{3,1} + a_{3,3}a_{3,4},
$$

$$
d_C = r_{C1,1}r_{C1,4} - r_{C1,2}r_{C1,3} = a_{3,1}\tilde r_{C1,1} - a_{1,1}r_{C1,2},
$$

$$t_{\mathbf{C}} = r_{\mathbf{C}1,4}d_{\mathbf{C}} - r_{\mathbf{C}1,2}^2 = a_{3,1}\left(a_{3,4}\tilde{r}_{\mathbf{C}1,1} - a_{1,4}r_{\mathbf{C}1,2}\right),$$

$$\Delta p_{\mathbf{C}2}^* = p_2^* + r_{\mathbf{C}1,1} = p_2^* + a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3},$$

$$\Delta p_{\mathbf{C}3}^* = p_3^* + r_{\mathbf{C}1,3} = p_3^* + a_{1,1} + a_{3,3},$$

$$q_{\mathbf{C}1} = p_1^* + r_{\mathbf{C}1,1}\Delta p_{\mathbf{C}3}^* = p_1^* + \left(a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3}\right)\left(p_3^* + a_{1,1} + a_{3,3}\right),$$

$$q_{\mathbf{C}2} = \Delta p_{\mathbf{C}2}^* + r_{\mathbf{C}1,3}\Delta p_{\mathbf{C}3}^* = p_2^* + \left(a_{1,1} + a_{3,3}\right)p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,1},$$

$$k_{\mathbf{C}1,1} = \left(r_{\mathbf{C}1,1}\left(r_{\mathbf{C}1,4}q_{\mathbf{C}1} - r_{\mathbf{C}1,2}q_{\mathbf{C}2}\right) - \tilde{r}_{\mathbf{C}1,2}p_0^*\right)\Big/t_{\mathbf{C}} = \left(r_{\mathbf{C}1,1}\left(a_{3,4}\tilde{q}_{\mathbf{C}1} - a_{1,4}a_{3,1}q_{\mathbf{C}2}\right) - \tilde{r}_{\mathbf{C}1,2}p_0^*\right)\Big/t_{\mathbf{C}},$$

$$k_{\mathbf{C}1,3} = \left(r_{\mathbf{C}1,4}p_0^* - r_{\mathbf{C}1,2}q_{\mathbf{C}1} + d_{\mathbf{C}}q_{\mathbf{C}2}\right)\Big/t_{\mathbf{C}} = \left(a_{3,1}\tilde{r}_{\mathbf{C}1,1}q_{\mathbf{C}2} - r_{\mathbf{C}1,2}\tilde{q}_{\mathbf{C}1} + a_{3,4}p_0^*\right)\Big/t_{\mathbf{C}},$$

где $\tilde{r}_{\mathbf{C}1,1} = a_{1,3}a_{3,4} - a_{1,4}a_{3,3}$, $\tilde{q}_{\mathbf{C}1} = q_{\mathbf{C}1} + a_{1,1}q_{\mathbf{C}2}$. С учетом неравенства $a_{3,1}a_{4,2} \neq 0$ можно утверждать, что условие (2.14) полной управляемости SIMO-системы справедливо, если

$$a_{1,3}a_{3,4}^2 - a_{1,4}^2a_{3,1} \neq a_{1,4}a_{3,4}\left(a_{3,3} - a_{1,1}\right).$$

Согласно выражению (2.13) из теоремы 2 рассчитаем регулятор $\mathbf{k}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^{\mathrm{T}}\right]$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} r_{\mathbf{C}2,1} + k_{\mathbf{C}1,1} & r_{\mathbf{C}2,2} + q_{\mathbf{C}2} - r_{\mathbf{C}1,4}k_{\mathbf{C}1,3}\\ r_{\mathbf{C}2,3} + k_{\mathbf{C}1,3} & r_{\mathbf{C}2,4} + \Delta p_3^*\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} a_{1,3}a_{4,1} + a_{2,3}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,3} - a_{3,3}\tilde{a}_{4,1} + k_{\mathbf{C}1,1} & a_{1,4}a_{4,1} + a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4} + q_{\mathbf{C}2} - a_{3,4}\tilde{k}_{\mathbf{C}1,3}\\ a_{4,3} + \tilde{k}_{\mathbf{C}1,3} & a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^*\end{array}\right],$$

где $\tilde{k}_{\mathbf{C}1,3} = k_{\mathbf{C}1,3} + \tilde{a}_{4,1}$.

По формуле (2.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b_{2,1} & b_{2,2}\\ b_{4,1} & b_{4,2}\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathbf{B}^+}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0\\ 1/a_{4,2} & a_{2,2}/a_{4,2}\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]}_{[\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}}|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}}]}\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b_{2,1} & b_{2,2}\\ b_{4,1} & b_{4,2}\end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{B}}}^{-1}\begin{bmatrix}(\mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^{\mathrm{T}} + a_{2,2}\mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^{\mathrm{T}})\big/a_{4,2}\\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^{T}\end{bmatrix}.$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$r_{\mathbf{C}1,1} = a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3}, \quad r_{\mathbf{C}1,2} = a_{1,4}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,4},$$
$$\tilde{r}_{\mathbf{C}1,1} = a_{1,3}a_{3,4} - a_{1,4}a_{3,3}, \quad \tilde{r}_{\mathbf{C}1,2} = a_{1,4}a_{3,1} + a_{3,3}a_{3,4},$$

$$\tilde{q}_{\mathbf{C}1} = a_{1,1}^3 + p_3^*a_{1,1}^2 + p_2^*a_{1,1} + p_1^* + a_{1,3}a_{3,1}(p_3^* + 2a_{1,1} + a_{3,3}),$$

$$q_{\mathbf{C}2} = p_2^* + \left(a_{1,1} + a_{3,3}\right)p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,1},$$

$$\tilde{a}_{4,1} = \left(a_{4,1}\left(a_{1,1} - a_{2,2}\right) + a_{2,1}a_{4,2}\right)\big/a_{3,1}, \quad t_{\mathbf{C}} = a_{3,1}\left(a_{3,4}\tilde{r}_{\mathbf{C}1,1} - a_{1,4}r_{\mathbf{C}1,2}\right),$$

$$a = a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,1} + \left(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}\right)p_3^* + p_2^*,$$

$$k_{\mathbf{C}1,1} = \left(r_{\mathbf{C}1,1}\left(a_{3,4}\tilde{q}_{\mathbf{C}1} - a_{1,4}a_{3,1}q_{\mathbf{C}2}\right) - \tilde{r}_{\mathbf{C}1,2}p_0^*\right)\Big/t_{\mathbf{C}}, \quad \tilde{k}_{\mathbf{C}1,3} = \left(a_{3,1}\tilde{r}_{\mathbf{C}1,1}q_{\mathbf{C}2} - r_{\mathbf{C}1,2}\tilde{q}_{\mathbf{C}1} + a_{3,4}p_0^*\right)\Big/t_{\mathbf{C}} + \tilde{a}_{4,1},$$

$$\mathbf{F} = \frac{\left[\begin{array}{c|c} b_{4,2} & -b_{2,2}\\ -b_{4,1} & b_{2,1}\end{array}\right]}{b_{2,1}b_{4,2} - b_{2,2}b_{4,1}}\left[\begin{array}{c|c} a_{2,3} + \dfrac{a_{1,3}a_{4,1} - a_{3,3}\tilde{a}_{4,1} + k_{\mathbf{C}1,1} + a_{2,2}\tilde{k}_{\mathbf{C}1,3}}{a_{4,2}} & a_{2,4} + \dfrac{a_{1,4}a_{4,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a - a_{3,4}\tilde{k}_{\mathbf{C}1,3}}{a_{4,2}}\\ a_{4,3} + \tilde{k}_{\mathbf{C}1,3} & a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^*\end{array}\right].$$

Символьные вычисления в MATLAB [15] подтвердили равенство полиномов (1.2).

П р и м е р 1 (б). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & a_{2,4}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & a_{4,4}\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{c:c} b_{1,1} & b_{1,2}\\ 0 & 0\\ b_{3,1} & b_{3,2}\\ 0 & 0\end{array}\right],\quad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Запишем первые две блочные строки матрицы наблюдаемости:

$$\tilde{\mathbf{N}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & a_{2,4}\end{array}\right],\quad \det\tilde{\mathbf{N}}=a_{1,3}a_{2,4}.$$

Если $a_{1,3}a_{2,4}\neq 0$, то индекс наблюдаемости равен 2, т.е. верно условие (2.1).

Для проверки (2.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{C}}=\mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} r_{\mathrm{C}1,1} & r_{\mathrm{C}2,1}\\ r_{\mathrm{C}1,2} & r_{\mathrm{C}2,2}\\ r_{\mathrm{C}1,3} & r_{\mathrm{C}2,3}\\ r_{\mathrm{C}1,4} & r_{\mathrm{C}2,4}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{c:c} a_{1,3}a_{3,1}+a_{1,4}a_{4,1}-a_{1,1}a_{3,3}-a_{2,1}\tilde{a}_{1,4} & a_{2,4}a_{4,1}-a_{2,1}a_{4,4}\\ a_{1,3}a_{3,2}+a_{1,4}a_{4,2}-a_{1,2}a_{3,3}-a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} & a_{2,4}a_{4,2}-a_{2,2}a_{4,4}\\ a_{1,1}+a_{3,3} & a_{2,1}\\ a_{1,2}+\tilde{a}_{1,4} & a_{2,2}+a_{4,4}\end{array}\right]^{\mathrm{T}},$$

где $\tilde{a}_{1,4}=\left(a_{1,4}\left(a_{4,4}-a_{3,3}\right)+a_{1,3}a_{3,4}\right)/a_{2,4}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального управления с одним входом, так как выполнен вариант (б) условия (2.11):

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}-r_{\mathrm{C}2,3}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4}\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c:c:c} b_{1,1} & 0 & b_{3,1} & 0\\ b_{1,2} & 0 & b_{3,2} & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}_{2\times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 2:

$$\tilde{r}_{\mathrm{C}2,1}=r_{\mathrm{C}2,1}+r_{\mathrm{C}2,3}r_{\mathrm{C}2,4}=a_{2,4}a_{4,1}+a_{2,1}a_{2,2},$$

$$d_{\mathrm{C}}=r_{\mathrm{C}2,2}r_{\mathrm{C}2,3}-r_{\mathrm{C}2,1}r_{\mathrm{C}2,4}=a_{2,4}\tilde{r}_{\mathrm{C}2,2}-a_{4,4}r_{\mathrm{C}2,1},$$

$$t_{\mathrm{C}}=r_{\mathrm{C}2,3}d_{\mathrm{C}}-r_{\mathrm{C}2,1}^2=a_{2,4}\left(a_{2,1}\tilde{r}_{\mathrm{C}2,2}-a_{4,1}r_{\mathrm{C}2,1}\right),$$

$$\Delta p_{\mathrm{C}2}^*=p_2^*+r_{\mathrm{C}2,2}=p_2^*+a_{2,4}a_{4,2}-a_{2,2}a_{4,4},$$

$$\Delta p_{\mathrm{C}3}^*=p_3^*+r_{\mathrm{C}2,4}=p_3^*+a_{2,2}+a_{4,4},$$

$$q_{\mathrm{C}1}=p_1^*+r_{\mathrm{C}2,2}\Delta p_{\mathrm{C}3}^*=p_1^*+\left(a_{2,4}a_{4,2}-a_{2,2}a_{4,4}\right)\left(p_3^*+a_{2,2}+a_{4,4}\right),$$

$$q_{\mathrm{C}2}=\Delta p_{\mathrm{C}2}^*+r_{\mathrm{C}2,4}\Delta p_{\mathrm{C}3}^*=p_2^*+\left(a_{2,2}+a_{4,4}\right)p_3^*+a_{2,2}^2+a_{4,4}^2+a_{2,2}a_{4,4}+a_{2,4}a_{4,2},$$

$$k_{\mathrm{C}1,2}=\left(r_{\mathrm{C}2,2}\left(r_{\mathrm{C}2,3}q_{\mathrm{C}1}-r_{\mathrm{C}2,1}q_{\mathrm{C}2}\right)-\tilde{r}_{\mathrm{C}2,1}p_0^*\right)/t_{\mathrm{C}}=\left(r_{\mathrm{C}2,2}\left(a_{2,1}\tilde{q}_{\mathrm{C}1}-a_{2,4}a_{4,1}q_{\mathrm{C}2}\right)-\tilde{r}_{\mathrm{C}2,1}p_0^*\right)/t_{\mathrm{C}},$$

$$k_{\mathrm{C}1,4}=\left(r_{\mathrm{C}2,3}p_0^*-r_{\mathrm{C}2,1}q_{\mathrm{C}1}+d_{\mathrm{C}}q_{\mathrm{C}2}\right)/t_{\mathrm{C}}=\left(a_{2,4}\tilde{r}_{\mathrm{C}2,2}q_{\mathrm{C}2}-r_{\mathrm{C}2,1}\tilde{q}_{\mathrm{C}1}+a_{2,1}p_0^*\right)/t_{\mathrm{C}},$$

где $\tilde{r}_{\mathrm{C}2,2}=a_{2,1}a_{4,2}-a_{2,2}a_{4,1}$, $\tilde{q}_{\mathrm{C}1}=q_{\mathrm{C}1}+a_{4,4}q_{\mathrm{C}2}$. С учетом неравенства $a_{1,3}a_{2,4}\neq 0$ можно утверждать, что условие (2.14) полной управляемости SIMO-системы верно, если

$$a_{2,1}^2a_{4,2}-a_{2,4}a_{4,1}^2\neq a_{2,1}a_{4,1}\left(a_{2,2}-a_{4,4}\right).$$

Согласно выражению (2.13), из теоремы 2 рассчитаем регулятор $\mathbf{k}_\mathbf{C}^\mathrm{T} = \left[\mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^\mathrm{T} \,\middle|\, \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^\mathrm{T}\right]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^\mathrm{T} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^\mathrm{T} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{l|l} r_{\mathbf{C}1,1} + q_{\mathbf{C}2} - r_{\mathbf{C}2,3}k_{\mathbf{C}1,4} & r_{\mathbf{C}1,2} + k_{\mathbf{C}1,2} \\ r_{\mathbf{C}1,3} + \Delta p_3^* & r_{\mathbf{C}1,4} + k_{\mathbf{C}1,4} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} a_{1,3}a_{3,1} + a_{1,4}a_{4,1} - a_{1,1}a_{3,3} + q_{\mathbf{C}2} - a_{2,1}\tilde{k}_{\mathbf{C}1,4} & a_{1,3}a_{3,2} + a_{1,4}a_{4,2} - a_{1,2}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + k_{\mathbf{C}1,2} \\ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^* & a_{1,2} + \tilde{k}_{\mathbf{C}1,4} \end{array}\right],$$

где $\tilde{k}_{\mathbf{C}1,4} = k_{\mathbf{C}1,4} + \tilde{a}_{1,4}$.

По формуле (2.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{B}^+} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1/a_{1,3} & a_{3,3}/a_{1,3} \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{[\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{C} | \mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{C}]} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^\mathrm{T} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^\mathrm{T} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^\mathrm{T} \\ (\mathbf{k}_{\mathbf{C}1}^\mathrm{T} + a_{3,3}\mathbf{k}_{\mathbf{C}2}^\mathrm{T})/a_{1,3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$r_{\mathbf{C}2,1} = a_{2,4}a_{4,1} - a_{2,1}a_{4,4}, \quad r_{\mathbf{C}2,2} = a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4},$$
$$\tilde{r}_{\mathbf{C}2,1} = a_{2,4}a_{4,1} + a_{2,1}a_{2,2}, \quad \tilde{r}_{\mathbf{C}2,2} = a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1},$$

$$\tilde{q}_{\mathbf{C}1} = a_{4,4}^3 + a_{4,4}^2 p_3^* + a_{4,4}p_2^* + p_1^* + a_{2,4}a_{4,2}(p_3^* + a_{2,2} + 2a_{4,4}),$$

$$q_{\mathbf{C}2} = p_2^* + (a_{2,2} + a_{4,4})\, p_3^* + a_{2,2}^2 + a_{4,4}^2 + a_{2,2}a_{4,4} + a_{2,4}a_{4,2},$$

$$\tilde{a}_{1,4} = (a_{1,4}(a_{4,4} - a_{3,3}) + a_{1,3}a_{3,4})/a_{2,4}, \quad t_\mathbf{C} = a_{2,4}(a_{2,1}\tilde{r}_{\mathbf{C}2,2} - a_{4,1}r_{\mathbf{C}2,1}),$$

$$a = a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + a_{4,4}^2 + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{4,4} + a_{4,4}a_{2,2} + (a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4})\, p_3^* + p_2^*,$$

$$k_{\mathbf{C}1,2} = (r_{\mathbf{C}2,2}(a_{2,1}\tilde{q}_{\mathbf{C}1} - a_{2,4}a_{4,1}q_{\mathbf{C}2}) - \tilde{r}_{\mathbf{C}2,1}p_0^*)/t_\mathbf{C}, \quad \tilde{k}_{\mathbf{C}1,4} = (a_{2,4}\tilde{r}_{\mathbf{C}2,2}q_{\mathbf{C}2} - r_{\mathbf{C}2,1}\tilde{q}_{\mathbf{C}1} + a_{2,1}p_0^*)/t_\mathbf{C} + \tilde{a}_{1,4},$$

$$\mathbf{F} = \frac{\left[\begin{array}{c|c} b_{3,2} & -b_{1,2} \\ -b_{3,1} & b_{1,1} \end{array}\right]}{b_{1,1}b_{3,2} - b_{1,2}b_{3,1}} \left[\begin{array}{c|c} a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^* & a_{1,2} + \tilde{k}_{\mathbf{C}1,4} \\ a_{3,1} + \dfrac{a_{1,4}a_{4,1} + a_{2,4}a_{4,2} + a - a_{2,1}\tilde{k}_{\mathbf{C}1,4}}{a_{1,3}} & a_{3,2} + \dfrac{a_{1,4}a_{4,2} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + k_{\mathbf{C}1,2} + a_{3,3}\tilde{k}_{\mathbf{C}1,4}}{a_{1,3}} \end{array}\right].$$

Символьные вычисления в MATLAB [15] подтвердили равенство полиномов (1.2).

3. Приведение к задаче наблюдения с одним входом (дуальный подход). Предположим, что индекс управляемости [13] заданной системы (1.1) равен 2, т.е.

$$\det \underbrace{[\mathbf{B} | \mathbf{AB}]}_{\tilde{\mathbf{U}}} \neq 0. \tag{3.1}$$

Введем обозначение для матрицы регулятора по состоянию

$$\mathbf{K} = \mathbf{FC}. \tag{3.2}$$

Для матрицы замкнутой системы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ выполним преобразование подобия [14]

$$\mathbf{A}_\mathbf{B}^* = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^*\tilde{\mathbf{U}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2\times2} & -\mathbf{P}_{\mathbf{B}0} \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_{\mathbf{B}1} \end{array}\right]}_{\mathbf{A}_\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}} - \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{KB} & \mathbf{KAB} \\ \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times2} \end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{BK}\tilde{\mathbf{U}}} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{KB} & -\mathbf{P}_{\mathbf{B}0} - \mathbf{KAB} \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_{\mathbf{B}1} \end{array}\right],$$

где блоки $\mathbf{P}_{\mathbf{B}0}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{B}1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ таковы, что

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{B}0} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{B}1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} r_{\mathbf{B}1,1} & r_{\mathbf{B}1,2} \\ r_{\mathbf{B}2,1} & r_{\mathbf{B}2,2} \\ r_{\mathbf{B}3,1} & r_{\mathbf{B}3,2} \\ r_{\mathbf{B}4,1} & r_{\mathbf{B}4,2} \end{array}\right],$$

а преобразованная матрица состояния разомкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{A}_\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & r_{\mathbf{B}1,1} & r_{\mathbf{B}1,2} \\ 0 & 0 & r_{\mathbf{B}2,1} & r_{\mathbf{B}2,2} \\ 1 & 0 & r_{\mathbf{B}3,1} & r_{\mathbf{B}3,2} \\ 0 & 1 & r_{\mathbf{B}4,1} & r_{\mathbf{B}4,2} \end{array}\right]. \tag{3.3}$$

Далее, выполнив еще одно преобразование подобия [14] через матрицу

$$\mathbf{T}_\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{KB} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{I}_2 \end{array}\right],$$

получим матрицу, которая должна иметь желаемый полином $\varphi^*(\lambda)$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{B}^* = \mathbf{T}_\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_\mathbf{B}^*\mathbf{T}_\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{0}_{2\times 2} & -\mathbf{P}_{\mathbf{B}0} - \mathbf{KAB} - \mathbf{KBP}_{\mathbf{B}1} \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_{\mathbf{B}1} - \mathbf{KB} \end{array}\right] = \tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{B} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{AB} + \mathbf{BP}_{\mathbf{B}1}) \\ \mathbf{KB} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_\mathbf{B}} \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \,\vdots\, \mathbf{I}_2\right].$$

Обеспечение желаемого полинома матрице $\tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{B}^*$ путем выбора матрицы $\mathbf{L}_\mathbf{B}$ представляет собой задачу модального наблюдения по состоянию с двумя входами (MIMO-система). Для приведения к задаче с одним входом (к SIMO-системе) обнулим один из столбцов матрицы $\mathbf{L}_\mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ – соответственно первый и второй столбцы матрицы управления $\mathbf{B}$. Условия обнуления первого (а) или второго (б) столбца матрицы $\mathbf{L}_\mathbf{B}$

$$\text{(а)}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{AB} + \mathbf{BP}_{\mathbf{B}1}) \\ \mathbf{KB} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{KAb}_1 - \underbrace{\mathbf{Kb}_2[0 \,\vdots\, 1]}_{\mathbf{KB}}\underbrace{[\mathbf{0}_{2\times 2} \,\vdots\, \mathbf{I}_2]\mathbf{R}_\mathbf{B}}_{-\mathbf{P}_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Kb}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{4\times 1},$$

$$\text{(б)}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{AB} + \mathbf{BP}_{\mathbf{B}1}) \\ \mathbf{KB} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{KAb}_2 - \underbrace{\mathbf{Kb}_1[1 \,\vdots\, 0]}_{\mathbf{KB}}\underbrace{[\mathbf{0}_{2\times 2} \,\vdots\, \mathbf{I}_2]\mathbf{R}_\mathbf{B}}_{-\mathbf{P}_1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Kb}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{4\times 1}$$

принимают соответственно вид

$$\text{(а)}\quad \mathbf{K}\left[\mathbf{Ab}_1 - r_{\mathbf{B}4,1}\mathbf{b}_2 \,\vdots\, \mathbf{b}_1\right] = \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad \text{(б)}\quad \mathbf{K}\left[\mathbf{Ab}_2 - r_{\mathbf{B}3,2}\mathbf{b}_1 \,\vdots\, \mathbf{b}_2\right] = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{3.4}$$

При этом ненулевой столбец матрицы $\mathbf{L}_\mathbf{B}$ становится соответственно равен

$$\text{(а)}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{AB} + \mathbf{BP}_{\mathbf{B}1}) \\ \mathbf{KB} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{KAb}_2 - \underbrace{\mathbf{Kb}_2[0 \,\vdots\, 1]}_{\mathbf{KB}}\underbrace{[\mathbf{0}_{2\times 2} \,\vdots\, \mathbf{I}_2]\mathbf{R}_\mathbf{B}}_{-\mathbf{P}_1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Kb}_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{(б)}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{AB} + \mathbf{BP}_{\mathbf{B}1}) \\ \mathbf{KB} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{KAb}_1 - \underbrace{\mathbf{Kb}_1[1 \,\vdots\, 0]}_{\mathbf{KB}}\underbrace{[\mathbf{0}_{2\times 2} \,\vdots\, \mathbf{I}_2]\mathbf{R}_\mathbf{B}}_{-\mathbf{P}_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Kb}_1 \end{bmatrix}.$$

При выполнении одного из условий (3.4) приходим к SIMO-системе

$$\tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{B}^* = \mathbf{A}_\mathbf{B} - \mathbf{l}_\mathbf{B}\mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathrm{T} \tag{3.5}$$

с матрицей состояния (3.3) и соответственно матрицей наблюдения (вектор-строка)

$$\text{(а)}\quad \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = [0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1], \qquad \text{(б)}\quad \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = [0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1 \,\vdots\, 0] \tag{3.6}$$

и матрицей наблюдателя (вектор-столбец) $\mathbf{l}_{\mathbf{B}} = \left[\mathbf{l}_{\mathbf{B}1}^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{l}_{\mathbf{B}1}, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$,

$$\text{(а)}\quad [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}] = \mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - r_{\mathbf{B}4,2}\mathbf{b}_2 \,\vdots\, \mathbf{b}_2], \qquad \text{(б)}\quad [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}] = \mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{\mathbf{B}3,1}\mathbf{b}_1 \,\vdots\, \mathbf{b}_1]. \tag{3.7}$$

SIMO-система (3.5) полностью наблюдаема при условии

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{B}} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^2 \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{\mathbf{B}}} \neq 0. \tag{3.8}$$

Задача модального наблюдения при желаемом характеристическом полиноме $\varphi^*(\lambda)$ в SIMO-системе (3.5) решается с помощью дуальной формулы Аккермана [10]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \\ \mathbf{l}_{\mathbf{B}2} \end{bmatrix} = \varphi^*(\mathbf{A}_{\mathbf{B}})\mathbf{N}_{\mathbf{B}}^{-1}[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1]^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\varphi^*(\mathbf{A})\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{B}}^{-1}[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1]^{\mathrm{T}}, \tag{3.9}$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{i} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^{i}\tilde{\mathbf{U}} \quad (i = \overline{0,\ldots,4}), \qquad \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2 \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{U}}^{-1}.$$

Матрицу регулятора $\mathbf{K}$ (3.2) определим из соотношения

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{K}\mathbf{b}_1 \,\vdots\, \mathbf{K}\mathbf{b}_2 \,\vdots\, \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \,\vdots\, \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_2].$$

С учетом значений (3.4) и (3.7) соответственно получим

$$\text{(а)}\quad \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{0}_{2\times 1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2} \,\vdots\, r_{\mathbf{B}4,1}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}1} + r_{\mathbf{B}4,2}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2}] = \mathbf{l}_{\mathbf{B}1}[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1] + \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1]\left[\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} \,\vdots\, \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right],$$

$$\text{(б)}\quad \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{l}_{\mathbf{B}2} \,\vdots\, \mathbf{0}_{2\times 1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}1} + r_{\mathbf{B}3,1}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2} \,\vdots\, r_{\mathbf{B}3,2}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2}] = \mathbf{l}_{\mathbf{B}1}[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1 \,\vdots\, 0] + \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1 \,\vdots\, 0]\left[\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} \,\vdots\, \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right].$$

Таким образом, в силу значений (3.6), в обоих случаях (а) и (б) матрица регулятора по состоянию равна

$$\mathbf{K} = [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}]\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{U}}^{-1} = [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}]\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Условие обнуления (3.4) будет одновременно условием разрешимости уравнения (3.2) относительно матрицы регулятора по выходу $\mathbf{F}$ [6], если второй множитель в левой части равенства (3.4) является правым аннулятором матрицы $\mathbf{C}$, т.е. соответственно если

$$\text{(а)}\quad \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{\mathbf{B}4,1}\mathbf{b}_2 \,\vdots\, \mathbf{b}_1] = \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad \text{(б)}\quad \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - r_{\mathbf{B}3,2}\mathbf{b}_1 \,\vdots\, \mathbf{b}_2] = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{3.11}$$

Пусть $\mathbf{C}^{+} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}$ – псевдообратная матрица [6] к матрице наблюдения $\mathbf{C}$. Тогда решение уравнения (3.2) и задачи (1.2) в целом при выполнении условий (3.1), (3.8), (3.11) с учетом значения матрицы $\mathbf{K}$ (3.10) принимает вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{C}^{+} = [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}]\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}\mathbf{C}^{+}. \tag{3.12}$$

Отметим, что условие (3.11) приводимости к задаче наблюдения с одним входом может быть верно, только если индекс наблюдаемости рассматриваемой системы (1.1) больше индекса ее управляемости [13]. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Т е о р е м а 3. Задана полностью управляемая и полностью наблюдаемая тройка матриц состояния, управления и наблюдения (1.1). Пусть индекс их управляемости равен 2, т.е. выполняется условие (3.1), и справедливо одно из равенств (3.11), где соответственно $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ – столбцы матрицы управления, а $r_{\mathbf{B}3,2}$ и $r_{\mathbf{B}4,1}$ – элементы матрицы (3.3).

Тогда индекс наблюдаемости матриц (1.1) равен 3 (больше индекса управляемости).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимо и достаточно показать, что вырождается матрица

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}.$$

В силу условия (3.1) вырождение матрицы $\tilde{\mathbf{N}}$ эквивалентно вырождению матрицы $\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}$, которая имеет ненулевой аннулятор [6]:

$$\text{(а)}\quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{Cb}_2 & \mathbf{Cb}_2 r_{\mathbf{B}4,1} & \mathbf{CAb}_2 \\ \mathbf{Cb}_2 r_{\mathbf{B}4,1} & \mathbf{CAb}_2 & \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_2 \end{array}\right], \quad \left(\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}\right)^R = \begin{cases} \left[1 \mid 0 \mid 0 \mid 0\right]^{\mathrm{T}}, & r_{\mathbf{C}4,1} = 0, \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} r_{\mathbf{C}3,1} + \dfrac{r_{\mathbf{C}2,1}}{r_{\mathbf{C}4,1}} & r_{\mathbf{C}4,1} & -1 & 0 \end{array}\right]^{\mathrm{T}}, & r_{\mathbf{C}4,1} \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{(б)}\quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Cb}_1 & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{CAb}_1 & \mathbf{Cb}_1 r_{\mathbf{B}3,2} \\ \mathbf{CAb}_1 & \mathbf{Cb}_1 r_{\mathbf{B}3,2} & \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_2 \end{array}\right], \quad \left(\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}\right)^L = \begin{cases} \left[0 \mid 1 \mid 0 \mid 0\right], & r_{\mathbf{C}3,2} = 0, \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} r_{\mathbf{C}3,2} & r_{\mathbf{C}4,2} + \dfrac{r_{\mathbf{C}1,2}}{r_{\mathbf{C}3,2}} & 0 & -1 \end{array}\right], & r_{\mathbf{C}3,2} \neq 0. \end{cases}$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{(а)}\quad \mathbf{CAb}_2 r_{\mathbf{B}4,1} &= \mathbf{CAb}_2\left[0 \mid 0 \mid 0 \mid 1\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 = \mathbf{C}\left(\tilde{\mathbf{U}} - \left[\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{Ab}_1 \mid \mathbf{0}_{2\times 1}\right]\right)\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 = \\ &= \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_1 - \left[\mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{Cb}_2 \mid \mathbf{Cb}_2 r_{\mathbf{B}4,1} \mid \mathbf{0}_{2\times 1}\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 = \\ &= \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_1 - \mathbf{Cb}_2\left[0 \mid 1 \mid r_{\mathbf{B}4,1} \mid 0\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 = \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_1 - \mathbf{Cb}_2\left(r_{\mathbf{C}2,1} + r_{\mathbf{C}3,1} r_{\mathbf{C}4,1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(б)}\quad \mathbf{CAb}_1 r_{\mathbf{B}3,2} &= \mathbf{CAb}_1\left[0 \mid 0 \mid 1 \mid 0\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 = \mathbf{C}\left(\tilde{\mathbf{U}} - \left[\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{Ab}_2\right]\right)\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 = \\ &= \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_2 - \left[\mathbf{Cb}_1 \mid \mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{Cb}_1 r_{\mathbf{B}3,2}\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 = \\ &= \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_2 - \mathbf{Cb}_1\left[1 \mid 0 \mid 0 \mid r_{\mathbf{B}3,2}\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 = \mathbf{CA}^2\mathbf{b}_2 - \mathbf{Cb}_1\left(r_{\mathbf{C}1,2} + r_{\mathbf{C}3,2} r_{\mathbf{C}4,2}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

По аналогии с рассуждениями о формуле (2.9) в данном случае наибольшую вычислительную сложность представляет дуальная формула Аккермана (3.9). Далее в виде теоремы предложен метод расчета модального наблюдателя для SIMO-системы (3.5), существенно упрощающий его окончательное символьное выражение.

Т е о р е м а 4. Решение задачи модального наблюдения для SIMO-системы (3.5) с обеспечением характеристического полинома $\varphi^*(\lambda) = \lambda^4 + p_3^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_1^*\lambda + p_0^*$ записывается как

$$\text{(а)}\quad \mathbf{l}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} r_{\mathbf{B}1,2} + l_{\mathbf{B}1,1} \\ r_{\mathbf{B}2,2} + q_{\mathbf{B}2} - r_{\mathbf{B}4,1} l_{\mathbf{B}3,1} \\ r_{\mathbf{B}3,2} + l_{\mathbf{B}3,1} \\ r_{\mathbf{B}4,2} + \Delta p_{\mathbf{B}3}^* \end{bmatrix}, \quad \text{(б)}\quad \mathbf{l}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} r_{\mathbf{B}1,1} + q_{\mathbf{B}2} - r_{\mathbf{B}3,2} l_{\mathbf{B}4,1} \\ r_{\mathbf{B}2,1} + l_{\mathbf{B}2,1} \\ r_{\mathbf{B}3,1} + \Delta p_{\mathbf{B}3}^* \\ r_{\mathbf{B}4,1} + l_{\mathbf{B}4,1} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

где

$$
\text{(а)}\ \begin{cases}
\tilde r_{\mathbf{B}2,1} = r_{\mathbf{B}2,1} + r_{\mathbf{B}3,1}r_{\mathbf{B}4,1},\\
d_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}1,1}r_{\mathbf{B}4,1} - r_{\mathbf{B}2,1}r_{\mathbf{B}3,1},\\
t_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}4,1}d_{\mathbf{B}} - r^2_{\mathbf{B}2,1},\\
\Delta p^*_{\mathbf{B}2} = p^*_2 + r_{\mathbf{B}1,1},\\
\Delta p^*_{\mathbf{B}3} = p^*_3 + r_{\mathbf{B}3,1},\\
q_{\mathbf{B}1} = p^*_1 + r_{\mathbf{B}1,1}\Delta p^*_{\mathbf{B}3},\\
q_{\mathbf{B}2} = \Delta p^*_{\mathbf{B}2} + r_{\mathbf{B}3,1}\Delta p^*_{\mathbf{B}3},\\
l_{\mathbf{B}1,1} = \left(r_{\mathbf{B}1,1}\left(r_{\mathbf{B}4,1}q_{\mathbf{B}1} - r_{\mathbf{B}2,1}q_{\mathbf{B}2}\right) - \tilde r_{\mathbf{B}2,1}p^*_0\right)\big/ t_{\mathbf{B}},\\
l_{\mathbf{B}3,1} = \left(r_{\mathbf{B}4,1}p^*_0 - r_{\mathbf{B}2,1}q_{\mathbf{B}1} + d_{\mathbf{B}}q_{\mathbf{B}2}\right)\big/ t_{\mathbf{B}},
\end{cases}
\qquad
\text{(б)}\ \begin{cases}
\tilde r_{\mathbf{B}1,2} = r_{\mathbf{B}1,2} + r_{\mathbf{B}3,2}r_{\mathbf{B}4,2},\\
d_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}2,2}r_{\mathbf{B}3,2} - r_{\mathbf{B}1,2}r_{\mathbf{B}4,2},\\
t_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}3,2}d_{\mathbf{B}} - r^2_{\mathbf{B}1,2},\\
\Delta p^*_{\mathbf{B}2} = p^*_2 + r_{\mathbf{B}2,2},\\
\Delta p^*_{\mathbf{B}3} = p^*_3 + r_{\mathbf{B}4,2},\\
q_{\mathbf{B}1} = p^*_1 + r_{\mathbf{B}2,2}\Delta p^*_{\mathbf{B}3},\\
q_{\mathbf{B}2} = \Delta p^*_{\mathbf{B}2} + r_{\mathbf{B}4,2}\Delta p^*_{\mathbf{B}3},\\
l_{\mathbf{B}2,1} = \left(r_{\mathbf{B}2,2}\left(r_{\mathbf{B}3,2}q_{\mathbf{B}1} - r_{\mathbf{B}1,2}q_{\mathbf{B}2}\right) - \tilde r_{\mathbf{B}1,2}p^*_0\right)\big/ t_{\mathbf{B}},\\
l_{\mathbf{B}4,1} = \left(r_{\mathbf{B}3,2}p^*_0 - r_{\mathbf{B}1,2}q_{\mathbf{B}1} + d_{\mathbf{B}}q_{\mathbf{B}2}\right)\big/ t_{\mathbf{B}}.
\end{cases}
$$

Доказательство. Воспользуемся результатом теоремы 2. Из соображений дуальности [16] положим $\mathbf{A_C} = \mathbf{A_B^{\mathrm{T}}}$. Тогда, поскольку $\mathbf{b_C} = \mathbf{c_B}$, матрица наблюдателя (вектор-столбец) $\mathbf{l_B}$ будет равна транспонированной матрице регулятора $\mathbf{k_C}$ (2.13) из теоремы 2.

При этом условие полной наблюдаемости (3.8) принимает вид $t_{\mathbf{B}} \neq 0$, т.е.

$$\text{(а)}\quad r^2_{\mathbf{B}2,1} \neq r_{\mathbf{B}4,1}d_{\mathbf{B}}, \quad \text{(б)}\quad r^2_{\mathbf{B}1,2} \neq r_{\mathbf{B}3,2}d_{\mathbf{B}}. \tag{3.14}$$

Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий (3.1), (3.11) и (3.14) регулятор по выходу (матрица $\mathbf{F}$) рассчитывается по формуле (3.12) с подстановкой значений (3.13).

Пример 2 (а). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4}\\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ b_{2,1} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & b_{4,2}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Запишем первые два блочных столбца матрицы управляемости:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,4}b_{4,2}\\ b_{2,1} & 0 & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,4}b_{4,2}\\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4}b_{4,2}\\ 0 & b_{4,2} & a_{4,2}b_{2,1} & a_{4,4}b_{4,2}\end{bmatrix},\quad \det\tilde{\mathbf{U}} = -a_{1,2}a_{3,4}b^2_{2,1}b^2_{4,2}.$$

Если $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$, то индекс управляемости равен 2, т.е. верно условие (3.1).

Для проверки условия (3.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$\mathbf{R_B} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} r_{\mathbf{B}1,1} & r_{\mathbf{B}1,2}\\ r_{\mathbf{B}2,1} & r_{\mathbf{B}2,2}\\ r_{\mathbf{B}3,1} & r_{\mathbf{B}3,2}\\ r_{\mathbf{B}4,1} & r_{\mathbf{B}4,2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2} & \dfrac{b_{4,2}}{b_{2,1}}\left(a_{1,4}a_{2,1} + a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde a_{1,4}\right)\\ \dfrac{b_{2,1}}{b_{4,2}}\underbrace{\left(a_{1,2}a_{4,1} - a_{1,1}a_{4,2}\right)}_{\tilde r_{\mathbf{B}2,1}} & a_{1,4}a_{4,1} + a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4} - a_{4,2}\tilde a_{1,4}\\ a_{1,1} + a_{2,2} & \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\left(a_{2,4} + \tilde a_{1,4}\right)\\ \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)a_{4,2} & a_{3,3} + a_{4,4}\end{bmatrix},$$

где $\tilde{a}_{1,4} = \left(a_{1,4}\left(a_{1,1} - a_{3,3}\right) + a_{1,3}a_{3,4}\right)/a_{1,2}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального наблюдения с одним входом, так как выполнен вариант (а) условия (3.11):

$$\mathbf{C}\left[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{\mathbf{B}4,1}\mathbf{b}_2 \,\vert\, \mathbf{b}_1\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 4:

$$\tilde{r}_{\mathbf{B}2,1} = r_{\mathbf{B}2,1} + r_{\mathbf{B}3,1}r_{\mathbf{B}4,1} = \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\underbrace{\left(a_{1,2}a_{4,1} + a_{2,2}a_{4,2}\right)}_{\bar{\bar{r}}_{\mathbf{B}2,1}},$$

$$d_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}1,1}r_{\mathbf{B}4,1} - r_{\mathbf{B}2,1}r_{\mathbf{B}3,1} = \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\left(a_{1,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} - a_{1,1}\bar{r}_{\mathbf{B}2,1}\right),$$

$$t_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}4,1}d_{\mathbf{B}} - r_{\mathbf{B}2,1}^2 = \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)^2 \underbrace{a_{1,2}\left(a_{4,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} - a_{4,1}\bar{r}_{\mathbf{B}2,1}\right)}_{\bar{t}_{\mathbf{B}}},$$

$$\Delta p_{\mathbf{B}2}^* = p_2^* + r_{\mathbf{B}1,1} = p_2^* + a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2},$$

$$\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_3^* + r_{\mathbf{B}3,1} = p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2},$$

$$q_{\mathbf{B}1} = p_1^* + r_{\mathbf{B}1,1}\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_1^* + \left(a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}\right)\left(p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2}\right),$$

$$q_{\mathbf{B}2} = \Delta p_{\mathbf{B}2}^* + r_{\mathbf{B}3,1}\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_2^* + \left(a_{1,1} + a_{2,2}\right)p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1},$$

$$l_{\mathbf{B}1,1} = \left(r_{\mathbf{B}1,1}\left(r_{\mathbf{B}4,1}q_{\mathbf{B}1} - r_{\mathbf{B}2,1}q_{\mathbf{B}2}\right) - \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1}p_0^*\right)/t_{\mathbf{B}} = \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\underbrace{\left(r_{\mathbf{B}1,1}\left(a_{4,2}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} - a_{1,2}a_{4,1}q_{\mathbf{B}2}\right) - \bar{\bar{r}}_{\mathbf{B}2,1}p_0^*\right)/\bar{t}_{\mathbf{B}}}_{\bar{l}_{\mathbf{B}1,1}},$$

$$l_{\mathbf{B}3,1} = \left(r_{\mathbf{B}4,1}p_0^* - r_{\mathbf{B}2,1}q_{\mathbf{B}1} + d_{\mathbf{B}}q_{\mathbf{B}2}\right)/t_{\mathbf{B}} = \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\underbrace{\left(a_{1,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1}q_{\mathbf{B}2} - \bar{r}_{\mathbf{B}2,1}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} + a_{4,2}p_0^*\right)/\bar{t}_{\mathbf{B}}}_{\bar{l}_{\mathbf{B}3,1}},$$

где $\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} = a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1}$, $\tilde{q}_{\mathbf{B}1} = q_{\mathbf{B}1} + a_{1,1}q_{\mathbf{B}2}$. С учетом неравенства $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$ можно утверждать, что условие (3.14) полной наблюдаемости SIMO-системы выполняется, если

$$a_{2,1}a_{4,2}^2 - a_{1,2}a_{4,1}^2 \neq a_{4,1}a_{4,2}\left(a_{2,2} - a_{1,1}\right).$$

Согласно выражению (3.13) из теоремы 4 рассчитаем наблюдатель $\mathbf{l}_{\mathbf{B}} = \left[\mathbf{l}_{\mathbf{B}1}^{\mathrm{T}} \,\vert\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$:

$$\left[\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vert\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right] = \begin{bmatrix} r_{\mathbf{B}1,2} + l_{\mathbf{B}1,1} & r_{\mathbf{B}3,2} + l_{\mathbf{B}3,1} \\ r_{\mathbf{B}2,2} + q_{\mathbf{B}2} - r_{\mathbf{B}4,1}l_{\mathbf{B}3,1} & r_{\mathbf{B}4,2} + \Delta p_{\mathbf{B}3}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\left(a_{1,4}a_{2,1} + a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + \bar{l}_{\mathbf{B}1,1}\right) & \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\left(a_{2,4} + \tilde{l}_{\mathbf{B}3,1}\right) \\ a_{1,4}a_{4,1} + a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4} + q_{\mathbf{B}2} - a_{4,2}\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} & p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} = \bar{l}_{\mathbf{B}3,1} + \tilde{a}_{1,4}$.

По формуле (3.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vert\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right]\underbrace{\frac{1}{b_{4,2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/a_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3}/a_{3,4} & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{A} \end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^+} = \frac{1}{b_{4,2}}\left[\left(\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} + a_{3,3}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right)/a_{3,4} \,\vert\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right].$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$r_{\mathbf{B}1,1} = a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}, \quad \bar{r}_{\mathbf{B}2,1} = a_{1,2}a_{4,1} - a_{1,1}a_{4,2},$$
$$\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} = a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1}, \quad \bar{\bar{r}}_{\mathbf{B}2,1} = a_{1,2}a_{4,1} + a_{2,2}a_{4,2},$$

$$\tilde{q}_{\mathbf{B}1} = a_{1,1}^3 + p_3^*a_{1,1}^2 + p_2^*a_{1,1} + p_1^* + a_{1,2}a_{2,1}\left(p_3^* + 2a_{1,1} + a_{2,2}\right),$$

$$q_{\mathbf{B}2} = p_2^* + (a_{1,1} + a_{2,2})\,p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1},$$

$$\tilde{a}_{1,4} = \left(a_{1,4}\left(a_{1,1} - a_{3,3}\right) + a_{1,3}a_{3,4}\right)/a_{1,2}, \quad \overline{t}_{\mathbf{B}} = a_{1,2}\left(a_{4,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} - a_{4,1}\overline{r}_{\mathbf{B}2,1}\right),$$

$$a = a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,1} + p_3^*\left(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}\right) + p_2^*,$$

$$\overline{l}_{\mathbf{B}1,1} = \left(r_{\mathbf{B}1,1}\left(a_{4,2}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} - a_{1,2}a_{4,1}q_{\mathbf{B}2}\right) - \bar{\tilde{r}}_{\mathbf{B}2,1}p_0^*\right)/\overline{t}_{\mathbf{B}}, \quad \tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} = \left(a_{1,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1}q_{\mathbf{B}2} - \overline{r}_{\mathbf{B}2,1}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} + a_{4,2}p_0^*\right)/\overline{t}_{\mathbf{B}} + \tilde{a}_{1,4},$$

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c:c} 1/b_{2,1} & 0 \\ 0 & 1/b_{4,2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{l:l} a_{2,3} + (a_{1,4}a_{2,1} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + \overline{l}_{\mathbf{B}1,1} + a_{3,3}\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1})/a_{3,4} & a_{2,4} + \tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} \\ a_{4,3} + (a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,4}a_{4,1} + a - a_{4,2}\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1})/a_{3,4} & p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \end{array}\right].$$

П р и м е р 2 (б). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{4,2} \end{array}\right], \quad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Запишем первые два блочных столбца матрицы управляемости:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & a_{1,2}b_{2,1} & 0 \\ b_{2,1} & 0 & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,4}b_{4,2} \\ 0 & 0 & a_{3,2}b_{2,1} & a_{3,4}b_{4,2} \\ 0 & b_{4,2} & a_{4,2}b_{2,1} & a_{4,4}b_{4,2} \end{array}\right], \quad \det\tilde{\mathbf{U}} = -a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}^2b_{4,2}^2.$$

Если $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$, то индекс управляемости равен 2, т.е. верно условие (3.1).

Для проверки условия (3.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} r_{\mathbf{B}1,1} & r_{\mathbf{B}1,2} \\ r_{\mathbf{B}2,1} & r_{\mathbf{B}2,2} \\ r_{\mathbf{B}3,1} & r_{\mathbf{B}3,2} \\ r_{\mathbf{B}4,1} & r_{\mathbf{B}4,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,4}\tilde{a}_{3,2} & \dfrac{b_{4,2}}{b_{2,1}}\underbrace{\left(a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3}\right)}_{\overline{r}_{\mathbf{B}1,2}} \\ \dfrac{b_{2,1}}{b_{4,2}}\left(a_{1,2}a_{4,1} + a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,1}a_{4,2} - a_{4,4}\tilde{a}_{3,2}\right) & a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4} \\ a_{1,1} + a_{2,2} & \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)a_{2,4} \\ \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\left(a_{4,2} + \tilde{a}_{3,2}\right) & a_{3,3} + a_{4,4} \end{array}\right],$$

где $\tilde{a}_{3,2} = \left(a_{3,2}\left(a_{3,3} - a_{1,1}\right) + a_{1,2}a_{3,1}\right)/a_{3,4}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального наблюдения с одним входом, так как выполнен вариант (б) условия (3.11):

$$\mathbf{C}\left[\mathbf{Ab}_2 - r_{\mathbf{B}3,2}\mathbf{b}_1 \,\vdots\, \mathbf{b}_2\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & a_{3,4}b_{4,2} & a_{4,4}b_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,2} \end{array}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 4:

$$\tilde{r}_{\mathbf{B}1,2} = r_{\mathbf{B}1,2} + r_{\mathbf{B}3,2}r_{\mathbf{B}4,2} = \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\underbrace{\left(a_{2,3}a_{3,4} + a_{2,4}a_{4,4}\right)}_{\bar{\tilde{r}}_{\mathbf{B}1,2}},$$

$$d_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}2,2}r_{\mathbf{B}3,2} - r_{\mathbf{B}1,2}r_{\mathbf{B}4,2} = \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)\left(a_{3,4}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,2} - a_{3,3}\overline{r}_{\mathbf{B}1,2}\right),$$

$$t_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{B}3,2}d_{\mathbf{B}} - r_{\mathbf{B}1,2}^2 = \left(b_{4,2}/b_{2,1}\right)^2\underbrace{a_{3,4}\left(a_{2,4}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,2} - a_{2,3}\overline{r}_{\mathbf{B}1,2}\right)}_{\overline{t}_{\mathbf{B}}},$$

$$\Delta p_{\mathbf{B}2}^* = p_2^* + r_{\mathbf{B}2,2} = p_2^* + a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4},$$

$$\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_3^* + r_{\mathbf{B}4,2} = p_3^* + a_{3,3} + a_{4,4},$$

$$q_{\mathbf{B}1} = p_1^* + r_{\mathbf{B}2,2}\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_1^* + \left(a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4}\right)\left(p_3^* + a_{3,3} + a_{4,4}\right),$$

$$q_{\mathbf{B}2} = \Delta p^*_{\mathbf{B}2} + r_{\mathbf{B}4,2}\Delta p^*_{\mathbf{B}3} = p^*_2 + (a_{3,3} + a_{4,4})\, p^*_3 + a^2_{3,3} + a^2_{4,4} + a_{3,3}a_{4,4} + a_{3,4}a_{4,3},$$

$$l_{\mathbf{B}2,1} = \left(r_{\mathbf{B}2,2}\left(r_{\mathbf{B}3,2}q_{\mathbf{B}1} - r_{\mathbf{B}1,2}q_{\mathbf{B}2}\right) - \tilde{r}_{\mathbf{B}1,2}p^*_0\right)\big/t_{\mathbf{B}} = \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\underbrace{\left(r_{\mathbf{B}2,2}\left(a_{2,4}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} - a_{2,3}a_{3,4}q_{\mathbf{B}2}\right) - \bar{\tilde{r}}_{\mathbf{B}1,2}p^*_0\right)\big/\bar{t}_{\mathbf{B}}}_{\bar{l}_{\mathbf{B}2,1}},$$

$$l_{\mathbf{B}4,1} = \left(r_{\mathbf{B}3,2}p^*_0 - r_{\mathbf{B}1,2}q_{\mathbf{B}1} + d_{\mathbf{B}}q_{\mathbf{B}2}\right)\big/t_{\mathbf{B}} = \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\underbrace{\left(a_{3,4}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,2}q_{\mathbf{B}2} - \bar{r}_{\mathbf{B}1,2}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} + a_{2,4}p^*_0\right)\big/\bar{t}_{\mathbf{B}}}_{\bar{l}_{\mathbf{B}4,1}}.$$

где $\tilde{r}_{\mathbf{B}2,2} = a_{2,4}a_{4,3} - a_{2,3}a_{4,4}$, $\tilde{q}_{\mathbf{B}1} = q_{\mathbf{B}1} + a_{3,3}q_{\mathbf{B}2}$. С учетом неравенства $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$ можно утверждать, что условие (3.14) полной наблюдаемости SIMO-системы справедливо, если

$$a^2_{2,4}a_{4,3} - a^2_{2,3}a_{3,4} \neq a_{2,3}a_{2,4}\left(a_{4,4} - a_{3,3}\right).$$

Согласно выражению (3.13) из теоремы 4 рассчитаем наблюдатель $\mathbf{l}_{\mathbf{B}} = \left[\mathbf{l}^T_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}^T_{\mathbf{B}2}\right]^T$:

$$\left[\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right] = \left[\begin{array}{c|c} r_{\mathbf{B}1,1} + q_{\mathbf{B}2} - r_{\mathbf{B}3,2}l_{\mathbf{B}4,1} & r_{\mathbf{B}3,1} + \Delta p^*_{\mathbf{B}3} \\ r_{\mathbf{B}2,1} + \bar{l}_{\mathbf{B}2,1} & r_{\mathbf{B}4,1} + l_{\mathbf{B}4,1} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,2} + q_{\mathbf{B}2} - a_{2,4}\tilde{l}_{\mathbf{B}4,1} & p^*_3 + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\left(a_{1,2}a_{4,1} + a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,1}a_{4,2} - a_{4,4}\tilde{a}_{3,2} + \bar{l}_{\mathbf{B}2,1}\right) & \left(b_{2,1}/b_{4,2}\right)\left(a_{4,2} + \tilde{l}_{\mathbf{B}4,1}\right) \end{array}\right],$$

где $\tilde{l}_{\mathbf{B}4,1} = \bar{l}_{\mathbf{B}4,1} + \tilde{a}_{3,2}$.

По формуле (3.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right]\underbrace{\frac{1}{b_{2,1}}\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1/a_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1,1}/a_{1,2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{c}}^T_{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{c}}^T_{\mathbf{B}}\mathbf{A}\end{bmatrix}}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{C}^+} = \frac{1}{b_{2,1}}\left[\left(\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} + a_{1,1}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right)/a_{1,2} \,\vdots\, \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}\right].$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$\bar{r}_{\mathbf{B}1,2} = a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3}, \quad r_{\mathbf{B}2,2} = a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4},$$

$$\bar{\tilde{r}}_{\mathbf{B}1,2} = a_{2,3}a_{3,4} + a_{2,4}a_{4,4}, \quad \tilde{r}_{\mathbf{B}2,2} = a_{2,4}a_{4,3} - a_{2,3}a_{4,4},$$

$$\tilde{q}_{\mathbf{B}1} = a^3_{3,3} + p^*_3a^2_{3,3} + p^*_2a_{3,3} + p^*_1 + a_{3,4}a_{4,3}(p^*_3 + 2a_{3,3} + a_{4,4}),$$

$$q_{\mathbf{B}2} = p^*_2 + (a_{3,3} + a_{4,4})\,p^*_3 + a^2_{3,3} + a^2_{4,4} + a_{3,3}a_{4,4} + a_{3,4}a_{4,3},$$

$$\tilde{a}_{3,2} = \left(a_{3,2}\left(a_{3,3} - a_{1,1}\right) + a_{1,2}a_{3,1}\right)/a_{3,4}, \quad \bar{t}_{\mathbf{B}} = a_{3,4}\left(a_{2,4}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,2} - a_{2,3}\bar{r}_{\mathbf{B}1,2}\right),$$

$$a = a^2_{1,1} + a^2_{3,3} + a^2_{4,4} + a_{1,1}a_{3,3} + a_{3,3}a_{4,4} + a_{4,4}a_{1,1} + p^*_3\left(a_{1,1} + a_{3,3} + a_{4,4}\right) + p^*_2,$$

$$\bar{l}_{\mathbf{B}2,1} = \left(r_{\mathbf{B}2,2}\left(a_{2,4}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} - a_{2,3}a_{3,4}q_{\mathbf{B}2}\right) - \bar{\tilde{r}}_{\mathbf{B}1,2}p^*_0\right)\big/\bar{t}_{\mathbf{B}}, \quad \tilde{l}_{\mathbf{B}4,1} = \left(a_{3,4}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,2}q_{\mathbf{B}2} - \bar{r}_{\mathbf{B}1,2}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} + a_{2,4}p^*_0\right)\big/\bar{t}_{\mathbf{B}} + \tilde{a}_{3,2},$$

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 1/b_{2,1} & 0 \\ 0 & 1/b_{4,2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} a_{2,1} + \left(a_{2,3}a_{3,2} + a_{3,4}a_{4,3} + a - a_{2,4}\tilde{l}_{\mathbf{B}4,1}\right)/a_{1,2} & p^*_3 + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ a_{4,1} + \left(a_{3,2}a_{4,3} - a_{4,4}\tilde{a}_{3,2} + \bar{l}_{\mathbf{B}2,1} + a_{1,1}\tilde{l}_{\mathbf{B}4,1}\right)/a_{1,2} & a_{4,2} + \tilde{l}_{\mathbf{B}4,1} \end{array}\right].$$

Символьные вычисления в MATLAB [15] подтвердили равенство полиномов (1.2).

Заключение. Для линейной динамической системы четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости, а также при соблюдении условий (2.11) или (3.11) получено аналитическое решение задачи модального управления по выходу. В основу решения положено приведение указанной задачи к задаче управления (наблюдения) с одним входом, выполненное с помощью преобразований подобия и обнуления одной из строк (одного из столбцов) матрицы регулятора (наблюдателя) по состоянию. При этом следует заметить, что условия (2.11) или (3.11), когда указанное обнуление одновременно обеспечивает существование регулятора по выходу, ограничивают класс объектов, для которых применимо предложенное решение. Данное обстоятельство обусловлено математической сложностью задачи модального управления по выходу в общем виде. Однако существует ряд прикладных задач, удовлетворяющих приведенным условиям. В частности, это задача орбитальной стабилизации во взаимосвязанных каналах крен—рысканье [4, 5] при наличии измерений угла и угловой скорости только в одном из этих каналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление линейной MIMO-системой по вектору измерения с использованием многоуровневой декомпозиции // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 2. С. 17–26. https://doi.org/10.31857/S0002338820020146

2. *Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Сорокин И.В.* Управление по выходу спектром продольного движения одновинтового вертолета // Изв. вузов. Авиационная техника. 2020. № 2. С. 70–79.

3. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Фомичёв А.В.* Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 61–70.

4. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Олейник А.С., Рябченко В.Н., Ефанов Д.Е.* Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2014. № 5. С. 3–15.

5. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 128–138. https://doi.org/10.1134/S0002338819040176

6. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.

7. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 421 с.

8. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Parametric Synthesis of Modal Control with Output Feedback for Descent Module Attitude Stabilization // Int. Russian Automation Conf. Sochi. 2019. P. 1–6. https://doi.org/10.1109/RusAutoCon.2019.8867744.

9. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass–Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. M. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64

10. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines // AIP Conf. Proceedings. M. 2021. V. 2318. Iss. 1. 130009. P. 1–8. https://doi.org/10.1063/5.0036155.

11. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* О связи модальной управляемости по выходу динамической MIMO-системы и вида матриц с желаемыми спектрами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 2. С. 1–12.

12. *Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Зубов Н.Е., Лапин А.В.* Анализ и синтез динамических MIMO-систем на основе ленточных матриц специального типа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 1–14.

13. *Скороход Б.А., Колежук В.С.* Определение индекса наблюдаемости линейной дискретной системы с векторным выходом // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. 2003. № 6. С. 24–28.

14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.

15. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 1 (97). С. 1–16. https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950

16. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 46–59.