ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 2, с. 156–163

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В ЗАДАЧЕ ГАЗЛИФТИНГА

Ф. А. Алиев[a,b], **И. А. Магеррамов**[a], **М. М. Муталлимов**[a,b], **В. И. Цурков**[c,*]

[a] *Институт прикладной математики, БГУ, Баку, Азербайджан*

[b] *Институт информационных технологий, НАНА, Баку, Азербайджан*

[c] *ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

**e-mail: v.tsurkov@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.
После доработки 16.11.2022 г.
Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается частично периодическая задача управления, где управляющий параметр входит в начальное условие. Изучается формализация, которая относится к вариационному исчислению. Выписываются необходимые условия в виде уравнений Эйлера–Лагранжа, с помощью которых разрабатывается алгоритм нахождения оптимальных программных траекторий. Результаты иллюстрируются примером, когда движение описывается осредненным по времени гиперболическим уравнением при достаточно большой глубине скважины в процессе газлифтинга.

DOI: 10.31857/S0002338823020026, **EDN:** JEMPFF

Введение. Вариационное исчисление (см., например, [1]) возникло из классических постановок экстремальных задач. Однако соответствующий математический аппарат имеет применение в современных моделях. Так, для нахождения оптимального решения при газлифтной эксплуатации нефтяных скважин в [2, 3] построена математическая модель газлифтного процесса, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для упрощения уравнение в частных производных с помощью усреднения по времени t [4] или по глубине скважины x [5] сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которых ставится задача оптимизации. Отметим, что в работе [4] полученное нелинейное дифференциальное уравнение используется для разработки алгоритма вычисления гидравлического сопротивления насосно-компрессорных труб.

В [6] на основе усредненных уравнений рассматривается задача оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах. В этой задаче управление входит в граничные начальные условия. Условие периодичности связывает решения не на концах отрезка, а в средней и конечной точках. Поэтому рассматривается так называемая задача с частично периодическим краевым условием.

В настоящей работе исследуется задача оптимизации, где движение объекта на отрезке $[0,2l]$ описывается различными дифференциальными уравнениями на интервалах $[0,l)$ и $(l,2l]$ соответственно, а в точке l решение удовлетворяет конечно-разностным уравнениям. Кроме того, средняя (l) и конечная $(2l)$ точки связаны периодическим условием.

Изучается полученная вариационная задача и предлагается алгоритм ее решения. На конкретном примере оптимизации газлифтинга иллюстрируется данный подход.

1. Постановка задачи. При моделировании газлифтинга возникают задачи [2, 3], где динамическая модель газлифта описывается системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Известно, что после прекращения фонтанирования происходит переход на газлифт – механизированный способ эксплуатации скважин, при котором вводят дополнительную энергию в виде сжатого газа. Этот способ используется после прекращения фонтанирования из-за нехватки пластовой энергии. По колонне труб газ с поверхности ($y(x)$ при $0 < x < l - 0$)) земли подается к башмаку скважины, где смешивается с жидкостью $y_p(l-0)$ на дне скважины, образуя газожидкостную смесь (ГЖС), которая ($(y(x)$ при $(l+0<x<2l))$ поднимается на поверхность по подъемным трубам. Как показано в [4], после осреднения уравнения в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y'^{(x)} = f_1(y(x),x), \quad y(0)=u, \quad 0<x<l, \tag{1.1}$$

$$y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V, \quad x=l, \tag{1.2}$$

$$y'(x) = f_2(y(x),x), \quad l<x<2l, \tag{1.3}$$

где y — n-мерный фазовый вектор, u — n-мерный постоянный вектор, играющий роль управляющего воздействия, F_δ и Γ — постоянные матрицы размерности $n\times n$, V — постоянный вектор размерности n, а f_1, f_2 — вектор-функции размерности n, являющиеся кусочно-непрерывными функциями, x — аргумент. Отметим, что здесь (1.1) соответствует движению газа в колонне труб, а (1.3) — движению ГЖС по подъемным трубам. Соотношение (1.2) отвечает смешиванию газа с жидкостью, в результате которого образуется ГЖС. Параметр u, используемый в начальном условии, соответствует подаваемому газу. Требуется найти u таким образом, чтобы следующий функционал

$$J = u^{\mathrm{T}}Ru + y^{\mathrm{T}}(l-0)Qy(l-0) + \int\limits_0^{2l} L(y(x),x)\,dx, \tag{1.4}$$

получил бы минимальное значение при условии частичной периодичности по фазовому вектору:

$$y(l+0) = y(2l), \tag{1.5}$$

где $R=R^{\mathrm{T}}>0$, $Q=Q^{\mathrm{T}}\geq 0$ являются $n\times n$-мерными постоянными матрицами, $L(y(x),x)$ — заданная функция, Т — транспонирование. Минимизация функционала (1.4) означает минимизацию подаваемого газа в газлифтную скважину. Особенно хочется отметить физический смысл условия (1.5) частичной периодичности. Это условие требует поднятие всей ГЖС, образующейся на дне скважины, на поверхность. Если это невозможно, то выражение (1.5) следует заменить условием $Q(2l)=\alpha Q(l-0)$, $0<\alpha<1$.

Для решения задачи (1.1)—(1.5) используем метод Эйлера—Лагранжа из вариационного исчисления, подробные преобразования приводятся в следующем разделе.

2. Метод Эйлера—Лагранжа. Составим расширенный функционал для задачи оптимизации (1)—(5) следующего вида, используя [7]:

$$\begin{aligned}\bar{J} = J &+ \int\limits_0^l \lambda^{\mathrm{T}}(x)(y'(x)-f_1(y,x))\,dx + \int\limits_l^{2l} \lambda^{\mathrm{T}}(x)(y'(x)-f_2(y,x))\,dx + \lambda^{\mathrm{T}}(l+0)\times \\ &\times(y(l+0)-F_\delta y(l-0)-\Gamma y_p(l-0)-V) + \mu(y(l+0)-y(2l)) + \lambda^{\mathrm{T}}(0)(y(0)-u),\end{aligned} \tag{2.1}$$

где вектор-функция $\lambda(x)$ и постоянный вектор μ размерности n суть лагранжевые множители [8]. Согласно результатам [7, 8], при вычислении вариации расширенного функционала (2.1) по $y(x)$, а также производных соответственно на интервалах $(0,l-0)$ и $(l+0,2l)$ от терминальных функций этого функционала по $u, y(l-0), y(l+0)$ и приравнивании их к нулю можно получить уравнение Эйлера—Лагранжа. Для этого сначала обозначим

$$H_1(y(x),x) = L(y(x),x) - \lambda^{\mathrm{T}}(x)f_1(y(x),x),$$

$$H_2(y(x),x) = L(y(x),x) - \lambda^{\mathrm{T}}(x)f_2(y(x),x).$$

Далее, интегрируем по частям:

$$\int\limits_0^l \lambda^{\mathrm{T}}(x)y'(x)\,dx = \int\limits_0^l \lambda^{\mathrm{T}}(x)\,dy(x) = \lambda^{\mathrm{T}}(l-0)y(l-0) - \lambda^{\mathrm{T}}(0)y(0) - \int\limits_0^l \frac{d\lambda^{\mathrm{T}}(x)}{dx}y(x)\,dx,$$

$$\int\limits_l^{2l} \lambda^{\mathrm{T}}(x)y'(x)\,dx = \int\limits_l^{2l} \lambda^{\mathrm{T}}(x)\,dy(x) = \lambda^{\mathrm{T}}(2l)y(2l) - \lambda^{\mathrm{T}}(l+0)y(l+0) - \int\limits_l^{2l} \frac{d\lambda^{\mathrm{T}}(x)}{dx}y(x)\,dx.$$

Учитывая это, расширенный функционал имеет вид

$$\bar{J} = u^{\mathrm{T}} R u + y^{\mathrm{T}}(l-0) Q y(l-0) + \int_0^l \left\{ H_1(y(x),x) - \frac{d\lambda^{\mathrm{T}}(x)}{dx} y(x) \right\} dx +$$
$$+\int_l^{2l} \left\{ H_2(y(x),x) - \frac{d\lambda^{\mathrm{T}}(x)}{dx} y(x) \right\} dx + \lambda^{\mathrm{T}}(l-0) y(l-0) - \lambda^{\mathrm{T}}(0) y(0) + \lambda^{\mathrm{T}}(2l) y(2l) -$$
$$-\lambda^{\mathrm{T}}(l+0) y(l+0) + \lambda^{\mathrm{T}}(l+0)(y(l+0) - F_\delta y(l-0) - \Gamma y_p(l-0) - V) +$$
$$+\mu(y(l+0) - y(2l)) + \lambda^{\mathrm{T}}(0)(y(0) - u).$$

Вычислим вариацию (как в формулах (2.3.1)–(2.3.15) из [7]) этого функционала по $y(x)$, а также производные соответственно на интервалах $(0, l-0)$ и $(l+0, 2l)$ от терминальных функций этого функционала по $u, y(l-0), y(l+0)$ и приравняем их к нулю:

$$\delta_y \bar{J} = \int_0^l \left\{ \left[\frac{\partial H_1}{\partial y} - \lambda'(x) \right] \delta y \right\} dx + \int_l^{2l} \left\{ \left[\frac{\partial H_2}{\partial y} - \lambda'(x) \right] \delta y \right\} dx = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u} = 2Ru - \lambda(0) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial y(l-0)} = 2Qy(l-0) - \lambda(l-0) - F_\delta^{\mathrm{T}} \lambda(l+0) = 0.$$

С учетом (1.5)

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial y(2l)} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial y(l+0)} = \lambda(l+0) - \lambda(2l) = 0.$$

Из этих соотношений получим

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u} = 2Ru - \lambda(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$-\lambda'^{(x)} + \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^{\mathrm{T}}(x) \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < (l-0), \tag{2.3}$$

$$-\lambda'^{(x)} + \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^{\mathrm{T}}(x) \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad (l+0) < x < 2l, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \lambda(l-0) = -2Qy(l-0) - F_\delta^{\mathrm{T}} \lambda(l+0), \\ y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\lambda(l+0) = \lambda(2l). \tag{2.6}$$

Отметим, что эти уравнения можно найти из монографии [8]. На самом деле, первая формула (2.5) получается как формула (3.5.15) из монографии [8, с. 296], а формула (2.6)–как частный случай формул (3.1.18а) и (3.1.18в) из [8, с. 233]. Таким образом, решив уравнения (1.1)–(1.3), (2.3)–(2.4) с краевыми условиями (1.5), (2.2), (2.5) и (2.6), определим экстремальное решение исходной задачи.

3. Нахождение оптимальных программных траекторий. Из (2.2) находим управление в виде

$$u = \frac{1}{2} R^{-1} \lambda(0), \tag{3.1}$$

подставляя его в (1.1), (1.3) и (2.3), (2.4), получим следующие системы $2n$-дифференциальных уравнений в интервале $(0, l)$:

$$\begin{gathered} y'(x) = f_1(y(x), x), \quad y(0) = \frac{1}{2} R^{-1} \lambda(0), \\ \lambda'(x) = \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f_1}{\partial y}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

и в $(l,2l)$:

$$y'(x) = f_2(y(x),x),$$
$$\lambda'(x) = \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f_2}{\partial y}. \tag{3.3}$$

Здесь в точке l имеем разрыв в виду соотношения (2.5) и граничного условия (2.6).

Таким образом, для решения исходной задачи (1.1)–(1.5) имеем системы дифференциальных и конечно-разностных уравнений (2.5), (3.2), (3.3) с неразделенными краевыми условиями (1.5), (2.6), (3.1), где, решив их, мы получим оптимальную программную траекторию $y_{\text{пр}}$ и управление $u_{\text{пр}}$.

Одним из известных методов решения вышеприведенной задачи является метод квазилинеаризации [7, 9]. По сути он представляет собой итеративный процесс и при разумном выборе начальных приближений сходится к исходному решению. Далее рассмотрим линейно-квадратичную (ЛК) задачу как частный случай.

4. ЛК-задача. Пусть система (1.1)–(1.3) описывается линейными уравнениями

$$y'^{(x)} = F_1(x)y(x) + V_1(x), \quad y(0) = u, \quad 0 < x < l, \tag{4.1}$$

$$y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V_2, \tag{4.2}$$

$$y'^{(x)} = F_2(x)y(x) + V_3(x), \quad l < x < 2l, \tag{4.3}$$

где матрицы F_1, F_2 и векторы V_1, V_3 получаются в результате линеаризации соотношений (1.1), (1.3) и имеют согласованные размерности. Если в (1.4) взять $L(y(x),x) = y^T(x)Q_1(x)y(x)$, то квадратичный функционал (1.4) будет иметь вид

$$J = u^{\mathrm{T}}Ru + y^{\mathrm{T}}(l-0)Qy(l-0) + \int_0^{2l} y^{\mathrm{T}}(x)Q_1(x)y(x)\,dx, \tag{4.4}$$

где $Q_1(x) = Q_1^{\mathrm{T}}(x) \geq 0$, а условие частичной периодичности (1.5) остается неизменным.

Тогда, согласно [7, 8], аналогично (3.2), (3.3) уравнения Эйлера-Лагранжа из-за квадратичности функционала (1.4) в виде (4.4) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &y'^{(x)} = F_1(x)y(x) + V_1(x), \quad y(0) = \frac{1}{2}R^{-1}\lambda(0),\\ &\lambda'(x) = Q_1(x)y(x) - F_1^{\mathrm{T}}(x)\lambda(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l-0, \tag{4.5}$$

и

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= F_2(x)y(x) + V_3(x),\\ \lambda'(x) &= Q_1(x)y(x) - F_2^{\mathrm{T}}(x)\lambda(x), \end{aligned}\right\} \quad l+0 < x < 2l, \tag{4.6}$$

с разностным уравнением (2.5) и краевыми условиями (2.6). Здесь также отметим, что вторые формулы из (4.5) и (4.6) таким же образом получаются, как формула (3.1.17) из [8, с. 233].

Теперь остановимся на решении начально-краевой задачи (2.6), (4.5), (4.6).

5. Нахождение оптимальных программных траекторий в ЛК-задаче. Представим уравнения (4.5), (4.6) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ \lambda'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 \\ Q_1(x) & -F_1^{\mathrm{T}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < x < l-1, \tag{5.1}$$

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ \lambda'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2(x) & 0 \\ Q_1(x) & -F_2^{\mathrm{T}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_3(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l+0 < x < 2l. \tag{5.2}$$

Пусть W_1 и W_2 – фундаментальные матрицы систем дифференциальных уравнений (5.1) и (5.2) соответственно. Тогда их решения можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = W_1(x, x_0) \begin{bmatrix} y(x_0) \\ \lambda(x_0) \end{bmatrix} + K_1(x, x_0), \quad 0 < x < l - 0, \tag{5.3}$$

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = W_2(x, x_0) \begin{bmatrix} y(x_0) \\ \lambda(x_0) \end{bmatrix} + K_2(x, x_0), \quad l + 0 < x < 2l, \tag{5.4}$$

где

$$K_1(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} W_1(x, t) \begin{bmatrix} V_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt, \tag{5.5}$$

$$K_2(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} W_2(x, t) \begin{bmatrix} V_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt. \tag{5.6}$$

Из (5.3) и (5.4) получим

$$\begin{bmatrix} y(l-0) \\ \lambda(l-0) \end{bmatrix} = W_1(l - 0, 0) \begin{bmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + K_1(l - 0, 0), \tag{5.7}$$

$$\begin{bmatrix} y(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = W_2(2l, l + 0) \begin{bmatrix} y(l+0) \\ \lambda(l+0) \end{bmatrix} + K_2(2l, l + 0). \tag{5.8}$$

Добавляя к (5.7), (5.8) уравнение (1.5), первое уравнение (2.5), а также (2.6) и (4.2), получим систему $9n$ уравнений с $9n$ неизвестными $y(0)$, $\lambda(0)$, $y(l-0)$, $y_p(l-0)$, $\lambda(l-0)$, $y(l+0)$, $\lambda(l+0)$, $y(2l)$, $\lambda(2l)$. Используем обозначения

$$\begin{gathered} W_1(l-0,0) = \begin{bmatrix} W_{11}^1 W_{12}^1 \\ W_{21}^1 W_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad W_2(2l, l+0) = \begin{bmatrix} W_{11}^2 W_{12}^2 \\ W_{21}^2 W_{22}^2 \end{bmatrix}, \\ K_1(l-0,0) = \begin{bmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{bmatrix}, \quad K_1(2l, l+0) = \begin{bmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{5.9}$$

И, объединяя все вышеназванные уравнения, имеем

$$\begin{cases} 2Ry(0) - \lambda(0) = 0, \\ y(l+0) - y(2l) = 0, \\ \lambda(l-0) = -2Qy(l-0) - F_\delta^{\mathrm{T}} \lambda(l+0) = 0, \\ \lambda(l+0) - \lambda(2l) = 0, \\ y(l+0) - F_\delta y(l-0) - \Gamma y_p(l-0) = V_2, \\ y(l-0) - W_{11}^1 y(0) - W_{12}^1 \lambda(0) = K_1^1, \\ \lambda(l-0) - W_{21}^1 y(0) - W_{22}^2 \lambda(0) = K_2^1, \\ y(2l) - W_{11}^2 y(l+0) - W_{12}^2 \lambda(l+0) = K_1^2, \\ \lambda(2l) - W_{21}^2 y(l+0) - W_{22}^2 \lambda(l+0) = K_2^2. \end{cases} \tag{5.10}$$

Отсюда получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $y(0)$, $\lambda(0)$, $y(l-0)$, $y_p(l-0)$, $\lambda(l-0)$, $y(l+0)$, $\lambda(l+0)$, $y(2l)$, $\lambda(2l)$:

$$\begin{bmatrix} 2R & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 & E & 0 & F_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & -E \\ 0 & 0 & -F_\delta & -\Gamma & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ -W_{11}^1 & -W_{12}^1 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W_{21}^1 & -W_{22}^2 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_{11}^2 & -W_{12}^2 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_{21}^2 & -W_{22}^2 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \\ y(l-0) \\ y_p(l-0) \\ \lambda(l-0) \\ y(l+0) \\ \lambda(l+0) \\ y(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \\ K_1^1 \\ K_2^1 \\ K_1^2 \\ K_2^2 \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Если главный определитель этой системы отличен от нуля, то для неизвестных величин получим единственные значения. Таким образом, найдем $y(0)$ и $\lambda(0)$. Тогда из (3.1) следует управление, которое будем считать программным. Далее, решая уравнение (3.2) с начальными данными $y(0)$ и $\lambda(0)$, получим значения функции $y(x)$ и $\lambda(x)$ на интервале $(0,\ l-0)$, затем, используя соотношения (2.5), найдем $y(l+0)$ и $\lambda(l+0)$. Применяя эти значения в качестве начальных данных из уравнения (3.3), получим значения функции $y(x)$ и $\lambda(x)$ уже на интервале $(l+0,\ 2l)$.

Таким образом, решая поставленную задачу, определяем программные траектории и управление $y_{np}(x)$ и u_{np}.

6. Пример. Пусть задано уравнение [4, 10, 11] модели газлифтинга

$$Q'(x) = \frac{2a\rho FQ^2}{c^2\rho^2F^2\mu - Q^2} = f(\mu), \tag{6.1}$$

где μ – малый параметр. Здесь $Q = \rho\omega_c F$ – массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, c – скорость звука в газе и в ГЖС, ρ – плотность газа и ГЖС соответственно, F – площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб, являющаяся постоянной по осям,

$$2a = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda_c}{2D},$$

g – ускорение свободного падения, λ – гидравлическое сопротивление в газе и в ГЖС; ω_c – усредненная по сечению скорость движения смеси и газа в кольцевом пространстве и в подъемнике, D – внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства. Разложим $f(\mu)$ в ряд Маклорена. Тогда имеем

$$f(\mu) = f(0) + \mu f'(0) + \ldots, \tag{6.2}$$

где

$$f(0) = -2a\rho F, \quad f'(0) = -\frac{2ac^2\rho^3F^3}{Q^2}.$$

Учитывая в (6.1) вместо $f(\mu)$ нулевое приближение $f(0)$ и обозначая $y(x) = Q(x)$ задачу (1.1)–(1.5) можно представить в следующем виде:

$$y'(x) = -2a_1\rho_1F_1, \quad y(0) = u, \quad 0 < x < l-0, \tag{6.3}$$

$$y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V, \tag{6.4}$$

$$y'^{(x)} = -2a_2\rho_2F_2, \quad l+0 < x < 2l, \tag{6.5}$$

$$\alpha y(l+0) = y(2l), \quad 0 < \alpha \le 1. \tag{6.6}$$

Здесь вместо функционала (1.4) возьмем функционал

$$J = u^2 + y^2(l-0) + \int_0^{2l} y^2(x)\,dx, \tag{6.7}$$

который нужно минимизировать. Нетрудно видеть, что на интервале $0 < x < l - 0$ решение уравнения (6.3) имеет следующий вид:

$$y(x) = y(0) - 2a_1\rho_1 F_1 x = u - 2a_1\rho_1 F_1 x, \quad 0 < x < l - 0. \tag{6.8}$$

Аналогично

$$y(x) = y(l+0) - 2a_2\rho_2 F_2 x, \quad l + 0 < x < 2l.$$

С другой стороны, подобно (2.1) или (4.4) расширенный функционал для этой задачи (6.3)–(6.7) запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}\bar{J} = J + \int_0^l \lambda^{\mathrm{T}}(y'^{(x)} + 2a_1\rho_1 F_1)dx + \int_l^{2l} \lambda^{\mathrm{T}}(y'^{(x)} + 2a_2\rho_2 F_2)dx + \lambda(l+0)\times \\ \times\big(y(l+0) - F_\delta y(l-0) - \Gamma y_p(l-0) - V\big) + \mu\big(y(l+0) - y(2l)\big) + \lambda(0)\big(y(0) - u\big).\end{gathered} \tag{6.9}$$

Отсюда, используя методику [7, 8], получим для функционала (5.20) следующую систему уравнений Эйлера–Лагранжа аналогично (2.2)–(2.6):

$$\left.\begin{aligned}
&2y(0) - \lambda(0) = 0,\\
&y'(x) = -2a_1\rho_1 F_1, \quad 0 < x < l - 0,\\
&y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V,\\
&y^{'(x)} = -2a_2\rho_2 F_2, \quad l + 0 < x < 2l,\\
&\lambda(l-0) = -2y(l-0) + F_\delta \lambda(l+0),\\
&\alpha y(l+0) = y(2l),\\
&\lambda(l+0) = \alpha\lambda(2l),\\
&\lambda'(x) = y(x), \quad 0 < x < l - 0,\\
&\lambda'^{(x)} = y(x), \quad l + 0 < x < 2l.
\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Тогда, решая систему (6.10), имеем

$$y(0) = \frac{1}{2}\lambda(0),$$

$$\left.\begin{aligned}
&y(x) = y(0) - 2a_1\rho_1 F_1 x, \quad 0 < x < l - 0,\\
&y(x) = y(l+0) - 2a_2\rho_2 F_2 (x - l), \quad l + 0 < x < 2l,\\
&\lambda(x) = \lambda(0) + y(0)x - a_1\rho_1 F_1 x^2, \quad 0 < x < l - 0,\\
&\lambda(x) = \lambda(l+0) + y(l+0)(x-l) - a_2\rho_2 F_2 (x-l)^2, \quad l + 0 < x < 2l.
\end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Используя решение (6.11), а также уравнения Эйлера–Лагранжа (6.10), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y(0)$, $\lambda(0)$, $y(l-0)$, $y_p(l-0)$, $\lambda(l-0)$, $y(l+0)$, $\lambda(l+0)$, $y(2l)$, $\lambda(2l)$:

$$\left.\begin{aligned}
&2y(0) - \lambda(0) = 0,\\
&\alpha y(l+0) - y(2l) = 0,\\
&\lambda(l-0) + 2y(l-0) - F_\delta\lambda(l+0) = 0,\\
&\lambda(l+0) - \alpha\lambda(2l) = 0,\\
&y(l+0) - F_\delta y(l-0) - \Gamma y_p(l-0) = V,\\
&y(l-0) - y(0) = -2a_1\rho_1 F_1 l,\\
&\lambda(l-0) - \lambda(0) - y(0)l = -a_1\rho_1 F_1 l^2,\\
&y(2l) - y(l+0) = -2a_2\rho_2 F_2 l,\\
&\lambda(2l) - \lambda(l+0) - y(l+0)l = -a_2\rho_2 F_2 l^2.
\end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Система уравнений (6.12) в матрично-векторной форме будут иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -F_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -F_\delta & -\Gamma & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \\ y(l-0) \\ y_p(l-0) \\ \lambda(l-0) \\ y(l+0) \\ \lambda(l+0) \\ y(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ -2a_1\rho_1F_1l \\ -a_1\rho_1F_1l^2 \\ -2a_2\rho_2F_2l \\ -a_2\rho_2F_2l^2 \end{bmatrix}. \qquad (6.13)$$

Решая линейно алгебраическую систему (6.13), можно найти корни этого уравнения.

Заключение. Таким образом, задача оптимального управления начальным условием в задаче газлифтинга (1.1)—(1.5) сводится к системе дифференциальных и конечно-разностных уравнений (2.5), (3.2), (3.3) с неразделенными краевыми условиями (1.5), (2.6), (3.1). Решая их, получим оптимальную программную траекторию $y_{\text{пр}}$ и управление $u_{\text{пр}}$. В случае ЛК-задачи оптимального управления (4.1)—(4.4) решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (5.10). Предложенный способ проиллюстрирован на простом одномерном примере.

В дальнейшем интересно расширить полученные результаты для случая, когда имеются ограничения на управляющий параметр и траектории системы. Здесь вместо уравнений Эйлера—Лагранжа из вариационного исчисления следует применять методы Понтрягина, Беллмана и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.
2. *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.* Моделирование работы газлифтной скважины // Докл. НАН Азербайджана. 2008. № 4. С. 30—41.
3. *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б.* Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикладная механика. 2010. Т. 46. № 6. С. 113—122.
4. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.* Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе // Proceedings of IAM. 2013. V. 2. № 1. P. 3—10.
5. *Алиев Ф.А., Муталлимов М.М.* Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом // Докл. НАН Азербайджана. 2009. Т. LXV. № 5. С. 9—18.
6. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.* Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах // Нелинейные колебания. 2014. Т. 17. № 2. С. 151—160.
7. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
8. *Алиев Ф.А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989.
9. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
10. *Hajiyeva N.S.* An Asymptotical Method for Determining the Coefficient of Hydraulic Resistance in Gas-lift Process by the Lines Method // Proc. IAM. 2019. V. 8. № 2. P. 187—195.
11. *Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A.* Asymptotic Method for Finding the Coefficient of Hydraulic Resistance in Lifting of Fluid on Tubing // J. Inverse and Ill-posed Problems. 2015. V. 23. № 5. P. 511—518.