

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 681.5

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ
БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ВОЗДУШНОГО СУДНА
ПРИ ОТСУТСТВИИ ИЗМЕРЕНИЙ УГЛОВ СКОЛЬЖЕНИЯ И КРЕНА

© 2023 г. Н. Е. Зубов^{a,*}, Е. Ю. Зыбин^b, А. В. Лапин^{a,b}

^aМГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^bФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

Поступила в редакцию 26.10.2022 г.

После доработки 01.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Для линеаризованной модели четвертого порядка, описывающей боковое движение воздушного судна с двумя органами управления, получены аналитические выражения стабилизирующих законов управления при отсутствии измерений углов скольжения и крена. В основу аналитического синтеза положен новый подход решения задачи управления по выходу. В отличие от традиционного подхода Ван дер Воуда с использованием многоуровневой декомпозиции, предлагаемый подход применим к широкому классу систем, у которых суммарная размерность векторов управления и наблюдения не превышает размерность вектора состояния. Представлена компактная формула, определяющая матрицу регулятора по выходу для четырехмерной динамической системы с двумя входами и двумя выходами при условии, что индексы управляемости и наблюдаемости не равны между собой. Приведены результаты моделирования процессов управления на примере стабилизации бокового движения гипотетического воздушного судна.

DOI: 10.31857/S0002338823020191, EDN: JFPEOZ

0. Введение. Рассматривается задача стабилизации бокового движения воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена. Данное движение описывается линеаризованной моделью в форме “вход–состояние–выход” следующего вида [1–3]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_z^\beta & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & a_z^\gamma \\ a_{m_x}^\beta & a_{m_x}^{\omega_x} & a_{m_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{m_y}^\beta & a_{m_y}^{\omega_x} & a_{m_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & -\text{tg} \vartheta_0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{bmatrix}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{m_x}^{\delta_n} & a_{m_x}^{\delta_s} \\ a_{m_y}^{\delta_n} & a_{m_y}^{\delta_s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{bmatrix}}_u, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{bmatrix}_x. \quad (0.1)$$

Здесь x – вектор состояния (β – угол скольжения, ω_x – угловая скорость крена, ω_y – угловая скорость рыскания, γ – угол крена); A – матрица состояния (α_0 – угол атаки, ϑ_0 – угол тангажа, $a_z^\beta, a_z^\gamma, a_{m_x}^\beta, a_{m_x}^{\omega_x}, a_{m_x}^{\omega_y}, a_{m_y}^\beta, a_{m_y}^{\omega_x}, a_{m_y}^{\omega_y}, a_z^{\delta_n}, a_z^{\delta_s}$ – коэффициенты линеаризации по состоянию); B – матрица управления ($a_{m_x}^{\delta_n}, a_{m_x}^{\delta_s}, a_{m_y}^{\delta_n}, a_{m_y}^{\delta_s}$ – коэффициенты линеаризации по управлению); u – вектор управления (δ_n – угол отклонения рулей направления, δ_s – угол отклонения элеронов); y – вектор наблюдения; C – матрица наблюдения [2]. Матрицы A и B можно считать постоянными в рамках конкретного режима полета.

Введем обозначения: $a_{1,1} = a_z^\beta, a_{1,2} = \sin \alpha_0, a_{1,3} = \cos \alpha_0, a_{1,4} = a_z^\gamma, a_{2,1} = a_{m_x}^\beta, a_{2,2} = a_{m_x}^{\omega_x}, a_{2,3} = a_{m_x}^{\omega_y}, a_{3,1} = a_{m_y}^\beta, a_{3,2} = a_{m_y}^{\omega_x}, a_{3,3} = a_{m_y}^{\omega_y}, a_{4,2} = 1, a_{4,3} = -\text{tg} \vartheta_0, b_{2,1} = a_{m_x}^{\delta_n}, b_{2,2} = a_{m_x}^{\delta_s}, b_{3,1} = a_{m_y}^{\delta_n}, b_{3,2} = a_{m_y}^{\delta_s}$. Тогда

матрицы состояния, управления и наблюдения из модели (0.1) примут обобщенный символичный вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (0.2)$$

Имеет место задача управления при неполной информации о векторе состояния. Решение таких задач можно строить с обратной связью по оценке вектора состояния [4, 5]. Однако недостатком такого подхода является то, что неизбежно возникает ошибка оценивания, которая вносит отклонения от желаемого поведения управляемых процессов [6]. В настоящей работе рассматривается управление без дополнительного динамического звена (наблюдателя) с обратной связью только по имеющейся информации – по выходу.

Требуется аналитически синтезировать закон управления объектом (0.2) по выходу

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{y}, \quad (0.3)$$

в котором матрица регулятора по выходу \mathbf{F} обеспечивает заданный характеристический полином замкнутой системы управления из области устойчивости:

$$p^*(\lambda) = \text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{BFC}) = |\lambda\mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}| = \sum_{i=0}^4 p_i^* \lambda^{4-i}, \quad p_0^* = 1, \quad p_1^*, \dots, p_4^* \in \mathbb{R}. \quad (0.4)$$

Здесь и далее функция $\text{poly} \mathbf{M}$ возвращает характеристический полином матричного аргумента \mathbf{M} , запись вида \mathbf{I}_n соответствует единичной матрице порядка n , \mathbb{R} – множество вещественных чисел.

Среди известных аналитических методов решения поставленной задачи наиболее распространен декомпозиционный метод модального управления по выходу [7]. Однако лежащий в его основе подход Ван дер Воуда [8] позволяет находить множество решений при условии, что суммарная размерность векторов управления и наблюдения превышает размерность вектора управления. Анализ матриц (0.2) показывает, что для поставленной задачи это условие не выполняется и соответственно применение подхода, изложенного в [7, 8], напрямую неприемлемо. В настоящей работе предлагается новый подход аналитического синтеза регулятора по выходу применительно к задаче управления боковым движением воздушного судна, описываемой уравнениями (0.1), матрицами (0.2) и желаемым характеристическим полиномом (0.4).

1. Описание подхода. Запишем матрицы (0.2) в блочном виде, сгруппировав ненулевые элементы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{a}_c^T & a_{1,4} \\ \mathbf{a}_b & \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & \mathbf{a}_d^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}], \quad (1.1)$$

где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_b = \begin{bmatrix} a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{1,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_{4,2} \\ a_{4,3} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Известно, что матрица регулятора по выходу инвариантна относительно преобразования подобия [9]. Поэтому для упрощения дальнейших расчетов выполним для системы (1.1) преобразование подобия с матрицей преобразования:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 & 0 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим следующие матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{a}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{a}_c^T & a_{1,1} & a_{1,4} \\ \mathbf{a}_d^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}]. \quad (1.2)$$

Определим условия полной управляемости и наблюдаемости [10] системы (1.2), а также индексы ее управляемости и наблюдаемости [11].

Сформируем первые два блочных столбца матрицы управляемости Калмана [12]:

$$U = [\tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B}] = \begin{bmatrix} I_2 & \bar{A} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{B} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что при условии

$$\det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} \bar{B} \right) \neq 0$$

система (0.1) с матрицами (0.2) полностью управляема, а индекс ее управляемости [11] равен двум. При этом матрица (1.3) обратима, а обратная к ней матрица, рассчитанная с помощью формулы Фробениуса обращения блочных матриц [13], имеет вид

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{B}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & -\bar{A} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Сформируем первые три блочных строки матрицы наблюдаемости Калмана [12]

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \bar{A} & \mathbf{a}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \bar{A}^2 + \mathbf{a}_b \mathbf{a}_c^T & \bar{A} \mathbf{a}_b + a_{1,1} \mathbf{a}_b & a_{1,4} \mathbf{a}_b \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что при условии

$$a_{1,4} \mathbf{a}_b \neq \mathbf{0}_{2 \times 1},$$

где $\mathbf{0}_{2 \times 1}$ – нулевая матрица размерности 2×1 , система (0.1) с матрицами (0.2) полностью наблюдаема, а индекс ее наблюдаемости [11] равен трем.

Таким образом, у рассматриваемой полностью управляемой и полностью наблюдаемой четырехмерной динамической системы индексы управляемости и наблюдаемости не равны между собой. Для такого класса систем решение задачи модального управления по выходу (за редкими исключениями конкретных желаемых спектров) существует, единственно и определяется следующей теоремой.

Теорема. Для четырехмерной системы вида (0.1) с индексом управляемости два и индексом наблюдаемости три регулятор по выходу, обеспечивающий желаемый характеристический полином (0.4), описывается матрицей

$$F = \left[\mathbf{d}_2 \mid \mathbf{d}_1 - p_1^* \mathbf{d}_2 \right] \left[\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d}_2 \right]^{-1}. \quad (1.6)$$

Двумерные вектор-столбцы \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 и \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 рассчитываются из соотношений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = U^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}^R, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{A}^2 \mathbf{N}^R, \quad (1.7)$$

где

$$U = [B | AB], \quad N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}, \quad D = \sum_{i=0}^4 p_i^* A^i,$$

а \mathbf{N}^R – произвольный правый аннулятор [14] матрицы \mathbf{N} .

Доказательство данной теоремы основано на получении полных параметризованных множеств решений соответствующих задач модального управления по состоянию (множество матриц \mathbf{K} : $\text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = p^*(\lambda)$) и модального наблюдения (множество матриц \mathbf{L} : $\text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) =$

$= p^*(\lambda)$), а также на обеспечении разрешимости и решении односторонних матричных уравнений ($\mathbf{FC} = \mathbf{K}$ и $\mathbf{BF} = \mathbf{L}$) относительно искомой матрицы регулятора по выходу \mathbf{F} .

Ввиду существенного объема выкладок в статье доказательство самой теоремы не приводится. Однако достоверность результата, полученного на ее основе для рассматриваемого примера, подтверждена ниже проверкой характеристического полинома замкнутой системы объект – регулятор по выходу.

2. Основной результат. Рассчитаем по формуле (1.6) матрицу регулятора \mathbf{F} , обеспечивающую желаемый характеристический полином (0.4) замкнутой системе управления, состоящей из объекта (0.1) с матрицами (0.2) и регулятора (0.3).

Согласно записи (1.5), первые две блочные строки матрицы наблюдателя и их правый аннулятор имеют соответственно вид

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{a}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^R = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]^T.$$

Возведя матрицу состояния $\tilde{\mathbf{A}}$ в различные степени от 0 до 4, составим все необходимые для формул (1.7) произведения этих степеней справа на аннулятор \mathbf{N}^R :

$$\begin{aligned} & [\tilde{\mathbf{A}}^4 \mathbf{N}^R \mid \tilde{\mathbf{A}}^3 \mathbf{N}^R \mid \tilde{\mathbf{A}}^2 \mathbf{N}^R \mid \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{N}^R \mid \mathbf{N}^R] = \\ & = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b) + (a_{1,1}^2 + z_c)\tilde{\mathbf{a}}_b & \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b & \tilde{\mathbf{a}}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}(\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b) + \begin{bmatrix} a_{1,4}(a_{1,1}^3 + a_{1,1}z_c + a_{1,4}z_d) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_b + \begin{bmatrix} a_{1,4}a_{1,1}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,4}a_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,4} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{a}}_b = a_{1,4}\mathbf{a}_b$, $z_c = \mathbf{a}_c^T \mathbf{a}_b$, $z_d = \mathbf{a}_d^T \mathbf{a}_b$. Тогда произведение \mathbf{DN}^R будет иметь вид

$$\mathbf{DN}^R = \sum_{i=0}^4 (p_i^* \tilde{\mathbf{A}}^{4-i} \mathbf{N}^R) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + (a_{1,1} + p_1^*)\tilde{\mathbf{a}}_b) + \begin{bmatrix} s\tilde{\mathbf{a}}_b \\ a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) \\ p_4^* \end{bmatrix},$$

где $s = a_{1,1}^2 + p_1^*a_{1,1} + p_2^* + z_c$.

Используя левую формулу из записи (1.7) и значение матрицы (1.4), сформируем первый множитель расчетного произведения (1.6):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{U}^{-1} \mathbf{DN}^R = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{B}}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{a} - s\tilde{\mathbf{a}}_b) \\ \bar{\mathbf{B}}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + \mathbf{a} + (a_{1,1} + p_1^*)\tilde{\mathbf{a}}_b) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \mid \mathbf{d}_1 - p_1^* \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} &= \bar{\mathbf{B}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a} \mid \tilde{\mathbf{a}}_b \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{S}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a} \mid \tilde{\mathbf{a}}_b \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{S}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & a_{1,1} + p_1^* \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -p_1^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) \\ p_4^* \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) & a_{1,4}z_c \\ p_4^* & a_{1,4}z_d \end{bmatrix}.$$

Используя правую формулу из записи (1.7), сформируем второй множитель расчетного произведения (1.6):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{NA}^2 \mathbf{N}^R = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_b \\ \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{CBd}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_b \mid -(\mathbf{a} + p_1^*\tilde{\mathbf{a}}_b) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -p_1^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Объединив полученные соотношения (2.1) и (2.2), применим общий результат теоремы – формулу (1.6) – для расчета искомой матрицы регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{d}_2 \mid \mathbf{d}_1 - p_1^* \mathbf{d}_2 \right] \left[\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d}_2 \right]^{-1} = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & a_{1,1} + p_1^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}^{-1} \right). \quad (2.3)$$

Далее выполним проверку полученной матрицы (2.3) на соответствие равенству (0.4) с желаемым характеристическим полиномом.

3. Проверка характеристического полинома. Над матрицей замкнутой системы объект (0.2) – регулятор по выходу (2.3)

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{a}_c^T & a_{1,4} \\ \mathbf{a}_b & \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ s & -a_{1,1} - p_1^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & \mathbf{a}_d^T & 0 \end{bmatrix}$$

выполним преобразование [13] подобия с матрицей преобразования

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу с тем же характеристическим полиномом:

$$\mathbf{S}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C}) \mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) & a_{1,4}z_c & a_{1,4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_{1,4}^{-1} & s & -a_{1,1} - p_1^* & 0 \\ 0 & p_4^* & a_{1,4}z_d & 0 \end{bmatrix}.$$

Находя соответствующие определители (например, по первому столбцу), нетрудно показать, что характеристический полином данной матрицы совпадает с желаемым характеристическим полиномом (0.4):

$$\text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C}) = \lambda^4 + p_1^* \lambda^3 + p_2^* \lambda^2 + p_3^* \lambda + p_4^*.$$

4. Пример численного моделирования. Для подтверждения применимости синтезированного закона (0.3) с матрицей регулятора по выходу (2.3) к управлению боковым движением гипотетического воздушного судна воспользуемся следующими числовыми значениями матриц (0.2) [1]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.1520 & 0.4226 & 0.9063 & 0.0960 \\ -18.6430 & -1.0600 & -1.6000 & 0 \\ -1.7570 & -0.1530 & -0.1360 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4663 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.8740 & -8.9660 \\ -1.4600 & 0.3040 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Назначим желаемые полюса матрицы замкнутой системы $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C}$, сходные по порядку величин с полюсами, выбранными в работах [1, 3]:

$$\phi_1 = -1.0, \quad \phi_2 = -1.5, \quad \phi_3 = -2.0, \quad \phi_4 = -2.5.$$

Этим полюсам соответствуют коэффициенты характеристического полинома (0.4)

$$p_1^* = 7.00, \quad p_2^* = 17.75, \quad p_3^* = 19.25, \quad p_4^* = 7.50. \quad (4.2)$$

Матрица регулятора (2.3) для объекта (4.1) и коэффициентов (4.2) принимает значение

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.6234 & -2.6770 \\ -0.0535 & 0.3148 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

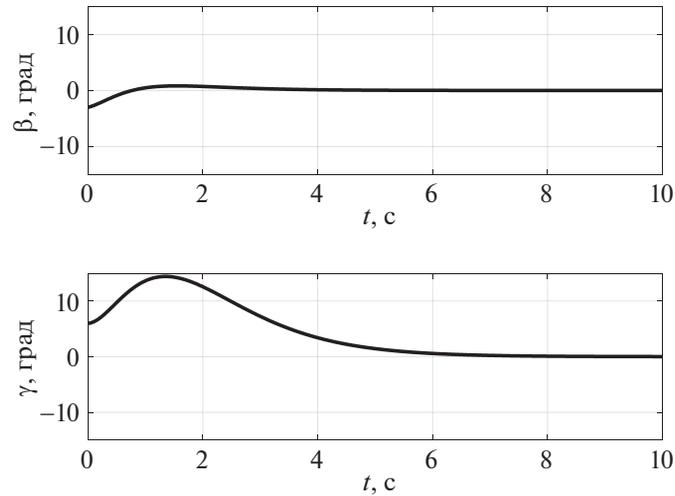


Рис. 1. Стабилизация угловых координат гипотетического воздушного судна.

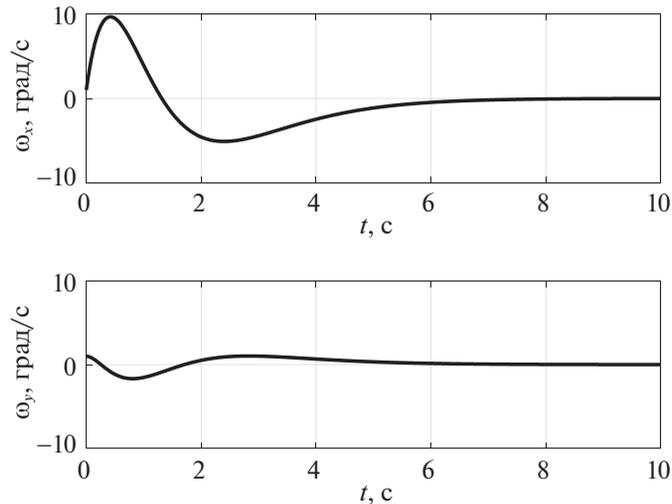


Рис. 2. Стабилизация угловых скоростей гипотетического воздушного судна.

В начальный момент времени $t = 0$ зададим вектор начальных условий

$$\mathbf{x}(0) = \frac{\pi}{180} [-3 \mid 1 \mid 1 \mid 6], \quad (4.4)$$

которому соответствуют типовые начальные значения углов и угловых скоростей:

$$\beta = 3^\circ, \quad \omega_x = \omega_y = 1 \text{ град/с}, \quad \gamma = 6^\circ.$$

Решение матрично-векторного дифференциального уравнения (0.1) с управлением (0.3), характеризующее процесс стабилизации объекта, имеет вид [15]

$$\mathbf{x}(t) = \expm((\mathbf{A} - \mathbf{BFC})t) \mathbf{x}(0), \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{FCx}(t), \quad (4.5)$$

где \expm – функция матричной экспоненты [16].

В среде MATLAB [17] был промоделирован переходный процесс длительностью 10 с стабилизации объекта (4.1), (4.3), описываемый функциями (4.5) при начальных условиях (4.4). Графики изменения параметров движения приведены на рис. 1–3.

Из представленных графиков видно, что предлагаемый закон управления по выходу, несмотря на отсутствие информации об углах скольжения и крена, позволяет в течение 10 с

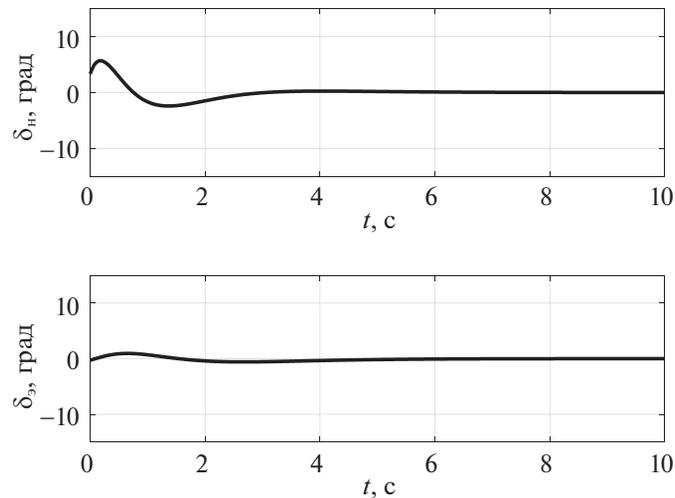


Рис. 3. Отклонения рулей управления гипотетического воздушного судна.

стабилизировать боковое движение воздушного судна по всем компонентам вектора состояния при допустимых значениях (в пределах $\pm 25^\circ$) [2] отклонений управляющих органов (рис. 3). Значения угловых координат (рис. 1) и угловых скоростей (рис. 2) воздушного судна в процессе стабилизации также находятся в допустимых пределах $\pm 20^\circ$ по углам и ± 10 град/с по угловым скоростям (из условий линеаризации) [2].

Заключение. Показано, что при отсутствии измерений углов скольжения и крена можно стабилизировать боковое движение воздушного судна по информации только об угловых скоростях крена и рысканья. При этом не требуется построения дополнительных динамических звеньев в виде наблюдателей состояния. Предложен качественно новый подход к аналитическому синтезу управления по выходу системой четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами (сумма входов и выходов равна размерности системы), описывающей боковое движение воздушного судна. Показано, что для такой системы с неравными индексами управляемости и наблюдаемости решение задачи управления по выходу существует, но единственно для каждого конкретного желаемого размещения полюсов. Числовая настройка предлагаемого аналитического закона управления возможна лишь за счет выбора конкретных значений полюсов из области устойчивости.

Достоверность подхода применительно к рассматриваемой модели подтверждена совпадением характеристического полинома замкнутой системы управления с заданным полиномом. Приведен пример моделирования процесса стабилизации для числовой модели бокового движения гипотетического воздушного судна. Моделирование подтвердило работоспособность предлагаемого алгоритма управления и показало, что за счет выбора конкретных значений желаемых полюсов соблюдаются ограничения на отклонения управляющих органов и на допустимые изменения компонент вектора состояния в процессе полета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Фомичев А.В. Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 61–70.
2. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
3. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Пролетарский А.В. Аналитический синтез законов управления боковым движением летательного аппарата // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 3. С. 14–20.
4. Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н. Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 128–138.
<https://doi.org/10.1134/S0002338819040176>

5. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Autonomous Stabilization of a Spacecraft Orbital Orientation at the Lack of Angular Velocity Measurements // Int. Russian Automation Conf. Sochi. 2022. P. 51–56.
<https://doi.org/10.1109/RusAutoCon54946.2022.9896299>.
6. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 716 с.
7. *Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Лапин А.В.* Аналитический синтез законов стабилизации взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж–рысканье при отсутствии информации об угле атаки // Изв. вузов. Авиационная техника. 2022. № 1. С. 87–96.
8. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
9. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64.
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64>
10. *Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Рекурсивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем // АиТ. 2006. № 5. С. 119–132.
11. *Скороход Б.А., Колежук В.С.* Определение индекса наблюдаемости линейной дискретной системы с векторным выходом // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. 2003. № 6. С. 24–28.
12. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. М.: Юрайт, 2020. 276 с.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
14. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 1 (97). С. 1–16.
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950>
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.
16. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines // AIP Conf. Proceedings. Moscow. 2021. V. 2318. Iss. 1. 130009. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1063/5.0036155>.
17. *Kisacanin B., Agarwal G.C.* Linear Control Systems: With Solved Problems and MATLAB Examples. N.Y.: Kluwer Acad. Plenum Publ., 2002.