
**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 629.78

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РЕЗЕРФОРДА И СИНТЕЗ ТРАЕКТОРИЙ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ

© 2023 г. Ю. Ф. Голубев^{a,*}, А. В. Грушевский^{a,**}, В. В. Корянов^{a,***},
А. Г. Тучин^{a,****}, Д. А. Тучин^{a,*****}

^aИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: golubev@keldysh.ru

**e-mail: alexgrush@rambler.ru

***e-mail: korianov@keldysh.ru

****e-mail: tag@kiam1.rssi.ru

*****e-mail: den@kiam1.rssi.ru

Поступила в редакцию 15.11.2022 г.

После доработки 10.12.2022 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Статья посвящена разработке новых эффективных методов проектирования траекторий космических аппаратов для миссий с использованием предложенного авторами обобщения формулы Резерфорда рассеивания заряженных частиц на случай гравитационного рассеивания. Для управляемых гравитационных маневров космических аппаратов сформулировано правило, позволяющее целенаправленно создавать в результате совершения гравитационного маневра пучки траекторий с заданными свойствами. Представлены модификации этого правила, создающие возможность осуществления эффективных и надежных пучковых рекуррентных процедур поиска баллистических сценариев межпланетных перелетов. Особую роль приобретает синтез последовательностей гравитационных маневров, которые обеспечивают заданное изменение асимптотической скорости космического аппарата относительно планеты-мишени.

DOI: 10.31857/S0002338823030058, **EDN:** EUKUGY

Введение. Проектирование современных межпланетных космических экспедиций в значительном числе случаев предполагает естественное использование малозатратного целевого изменения скорости космического аппарата (КА) при совершении гравитационных маневров (ГМ). Ставшие классикой первый в истории человечества ГМ КА “Луна 3”, как и длительная межпланетная одиссея “Вояджеров”, общеизвестны и служат примером для проектирования будущих миссий в дальнем космосе с учетом их ограниченных бюджетов по характеристической скорости. Вместе с тем использование ГМ в баллистических схемах экспедиций несет и значительное усложнение их разработки, связанное с гиперболической неустойчивостью, которая возникает при сквозном пролете сфер действия целевых планет и, особенно, при резкой смене масштабов сложных гравитационных полей. Выявить в таких условиях требуемую точную траекторию КА (при интегрировании в полных эфемеридах) – отдельная проблема, зачастую не поддающаяся решению рекуррентными итерационными процедурами в силу их плохой сходимости. В этом случае значимую роль приобретают пучковые алгоритмы [1, 2], позволяющие извлечь такую траекторию КА из пучка ее “виртуальных попутчиков” посредством численного интегрирования всего множества траекторий пучка через сферу действия планеты-цели с учетом эфемерид. Достаточное число (а значит, трудоемкость метода) виртуальных траекторий КА для обнаружения следующего, единичного пролета целевой планеты зависит от свойств гравитационного искривления пучка полем очередной целевой планеты и может исчисляться сотнями тысяч вариантов [1–3]. Здесь баллистики-проектанты при поиске подходящих траекторий сталкиваются с проблемами, связанными с существенной неоднородностью пучка виртуальных траекторий КА, рассеянного планетой при совершении ГМ. Число существенно отклонившихся от начального направления траекторий на выходе из сферы действия планеты-цели оказывается на порядок меньше общего числа траекторий, хотя именно они наиболее ценны для возможности про-

должения поиска. Попытки решения этой проблемы привели авторов к необходимости обратиться к опытам Э. Резерфорда по кулоновскому рассеиванию пучков α -частиц [3–5] и учесть известную аналогию между кулоновским и гравитационным взаимодействиями [6]. Соответствующее обобщение формулы Резерфорда на случай гравитационного рассеивания, представленное в данной статье, позволило не только выявить и объяснить возникающее при проведении ГМ неоднородное рассеивание пучка виртуальных траекторий КА, но и разработать алгоритм для его регуляризации. В итоге при численном моделировании цепочек ГМ около массивных тел Солнечной системы удастся существенно уменьшить необходимое число виртуальных траекторий КА в пучке, обеспечивающих надежную реализацию итерационной процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных миссий.

1. Кулоновское и гравитационное рассеивание. В астродинамике баллистический анализ полетов КА в дальнем космосе с использованием ГМ (фактически – гравитационного рассеивания пробных частиц массивными телами Солнечной системы) проводится обычно с помощью традиционного решения конечного набора задач Коши и Ламберта [1–3]. Изучение и описание аналогичных процессов в физике (кулоновское рассеивание заряженных частиц) осуществляется в ином ключе – с введением в рассмотрение пучка заряженных частиц – сонаправленного компактного потока однородных частиц [4–6]. В последние годы, при решении задач баллистического анализа и построении адаптивных сценариев проведения КА ГМ, в астродинамике также наметилась тенденция по использованию пучковых алгоритмов с целью синтеза точных требуемых траекторий КА в полных эфемеридах [1–3]. Здесь уже вместо ансамбля траекторий заряженных частиц фигурирует пучок виртуальных траекторий КА, которые обладают свойством почти совпадающих асимптотических скоростей [1–3]. В этом контексте для возможности успешного решения конкретных задач баллистического синтеза траекторий КА представляет интерес сопоставление гравитационного рассеивания [1–3] и кулоновского [4–6] рассеивания.

Сначала рассмотрим кулоновское рассеивание [4–6]. Выпишем силовую функцию $U_{Coulomb}$ кулоновского взаимодействия частиц [5, 6]:

$$U_{Coulomb} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{aim}}{r},$$

где $\epsilon_0 \approx 8.85418781762 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, q_α, q_{aim} – одноименные заряды частицы и рассеивающей цели соответственно, r – расстояние между их центрами.

Для угла φ рассеивания (угла между исходным и отраженным векторами асимптотической скорости заряженной альфа-частицы $\mathbf{V}_{\infty,in}$ и $\mathbf{V}_{\infty,out}$) будет верно соотношение (рис. 1, а)

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{mbV_\infty^2}, \tag{1.1}$$

где $V_\infty = \|\mathbf{V}_{\infty,in}\| = \|\mathbf{V}_{\infty,out}\|$, $m = m_\alpha m_{aim} / (m_\alpha + m_{aim})$ – приведенная масса, b – величина прицельной дальности [2, 5].

Учитывая, что если $m_{aim} \gg m_\alpha$, то $m \approx m_\alpha$, а для угла рассеивания φ будет выполнено

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m_\alpha b V_\infty^2}. \tag{1.2}$$

Заметим, что формулы (1.1), (1.2) остаются справедливыми и в том случае, когда заряды разноименные.

Поскольку структуры силовой функции гравитационного взаимодействия двух массивных тел U_{grav} и кулоновского электрического поля для двух разноименно заряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются аналогичными, появляется возможность применения аналогов формул (1.1) и (1.2) в случае гравитационного рассеивания. Аналогом альфа-частицы с зарядом q_α становится КА с массой m_{sc} , аналогом ускорения от рассеивающей цели $\mathbf{a}_{aim} = -q_{aim} \mathbf{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ – гравитационное воздействие малого тела (планеты, спутника планеты или астероида) с массой m_p , воздействию которого соответствует ускорение $\mathbf{a}_p = -\mu_p \mathbf{r} / r^3$ с гравитационным параметром $\mu_p = Gm_p$, где G – гравитационная постоянная.

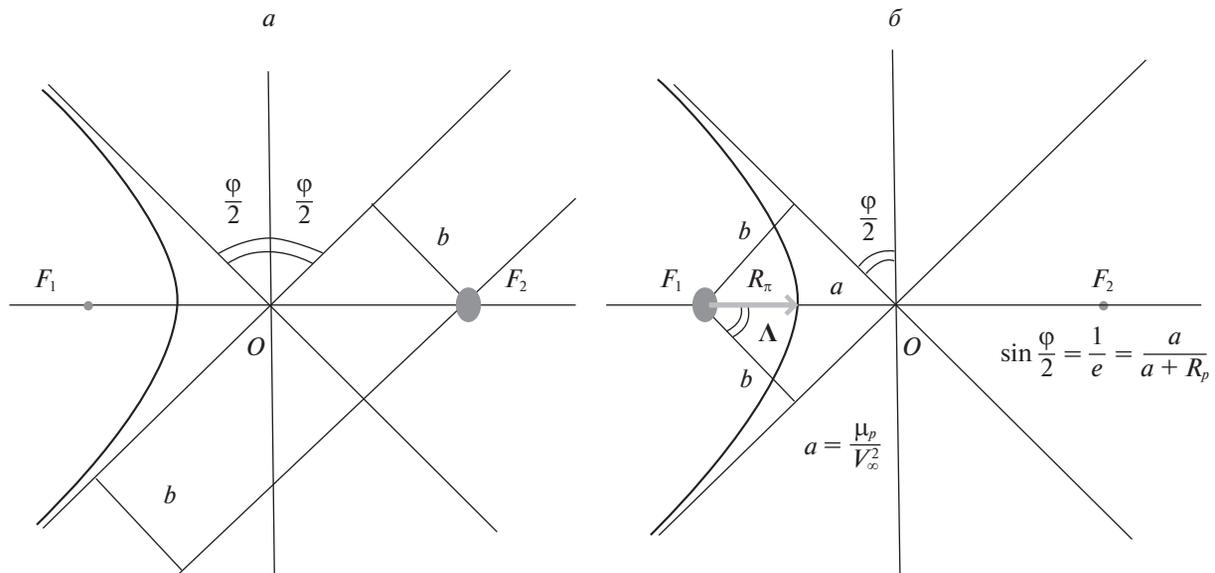


Рис. 1. Геометрия кулоновского и гравитационного рассеивания

Гравитационное рассеивание определяется вектором Лапласа Λ [7]:

$$\Lambda = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{\mu_p}{r} \mathbf{r},$$

направленным из центра цели в сторону перигелия орбиты. Для бесконечно удаленной точки орбиты будет выполнено $\mathbf{r}/r = -\mathbf{V}_\infty/V_\infty$. Следовательно,

$$\Lambda = V_\infty^2 \mathbf{b} + \frac{\mu_p}{V_\infty} \mathbf{V}_\infty, \quad (1.3)$$

где \mathbf{b} – вектор прицельной дальности. Видим, что при изменении \mathbf{b} вектор Лапласа поворачивается вокруг центра планеты-цели, смещая в пространстве соответствующим образом перигелий пролетной орбиты. Угол гравитационного рассеивания φ есть угол, дополнительный до π к углу между двумя асимптотами траектории, а вектор Лапласа определяет биссектрису угла между асимптотами. Поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_p}{b V_\infty^2}. \quad (1.4)$$

Очевидно, что эта формула служит аналогом формулы (1.2) и формально может быть получена из (1.2) с помощью замены:

$$m_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad q_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad q_{aim} \rightarrow m_p, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow G.$$

З а м е ч а н и е 1. В астродинамике φ называется углом поворота вектора асимптотической скорости при совершении ГМ. При его вычислении вместо прицельной дальности b чаще используется минимальное расстояние до КА от центра планеты R_π (очевидно – расстояние перигелия пролетной гиперболы) [2, 3, 8], при этом вместо (1.4) чаще применяется выражение

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{R_\pi V_\infty^2}{\mu_p}},$$

где e – эксцентриситет пролетной гиперболы. Это выражение не используется в физике элементарных частиц по понятным причинам: в отличие от прицельной дальности b экспериментальное определение R_π для α -частиц трудно реализуемо.

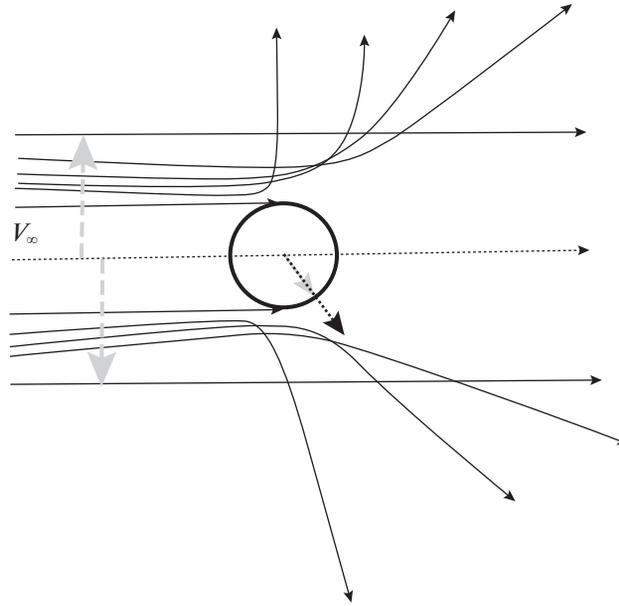


Рис. 2. Структура кулоновского рассеивания (“кубок”)

Очевидно, что R_{π} не может быть меньше радиуса планеты R_p , поэтому для максимального угла поворота вектора асимптотической скорости φ_{\max} будет выполнено

$$\sin \frac{\varphi_{\max}}{2} = \frac{1}{1 + (R_p/\mu_p)V_{\infty}^2} = \frac{1}{1 + V_{\infty}^2/V_{pc}^2}, \quad (1.5)$$

где $V_{pc} = \sqrt{\mu_p/R_p}$ – первая космическая скорость около поверхности планеты. Указанному случаю соответствует минимально допустимое значение прицельной дальности в пучке b_{\min} , обеспечивающее проведение ГМ.

Подставляя в (1.4) выражение для прицельной дальности b [2, 3, 8]

$$b = R_{\pi} \sqrt{1 + 2 \frac{\mu_p}{R_{\pi} V_{\infty}^2}} \quad (1.6)$$

и воспользовавшись тождеством $\operatorname{ctg}^2(\varphi/2) = \sec^2(\varphi/2) - 1$, приходим к классическому “астрономическому” результату для $\sin(\varphi/2)$, что еще раз подтверждает эквивалентность обоих способов описания угла поворота φ : кулоновского и гравитационного [2, 4–6].

Отличие геометрии рассеивания заряженных частиц и гравитационного рассеивания виртуальных траекторий КА при ГМ иллюстрируется на рис. 1, а, б (на рис. 1, б изображен вектор Лапласа Λ).

Практически, разница заключается в инверсии номера фокуса, в котором расположено возмущающее тело.

Структуры гравитационного и кулоновского рассеивания схематически представлены на рис. 2, 3. На рис. 2 все соседние траектории расходятся с обязательным пересечением. Кругом представлено рассеивающее заряженное ядро. На рис. 3, а кругом радиуса R_p изображена рассеивающая планета-цель, R_d – радиус основания трубки траекторий, равный радиусу сферы действия планеты. На рис. 3, б точки входа занимают примерно половину сферы действия, а соседние траектории расходятся, не пересекаясь.

З а м е ч а н и е 2. В предположении о пренебрежимой малости размеров сфер действия планет относительно протяженности межпланетных дуг (метод сопряженных конических сечений – МСКС) либо малости размеров рассеивающего центра относительно рассеянных кулоновских траекторий разница между структурами рассеивания кулоновского (при разноименных зарядах)

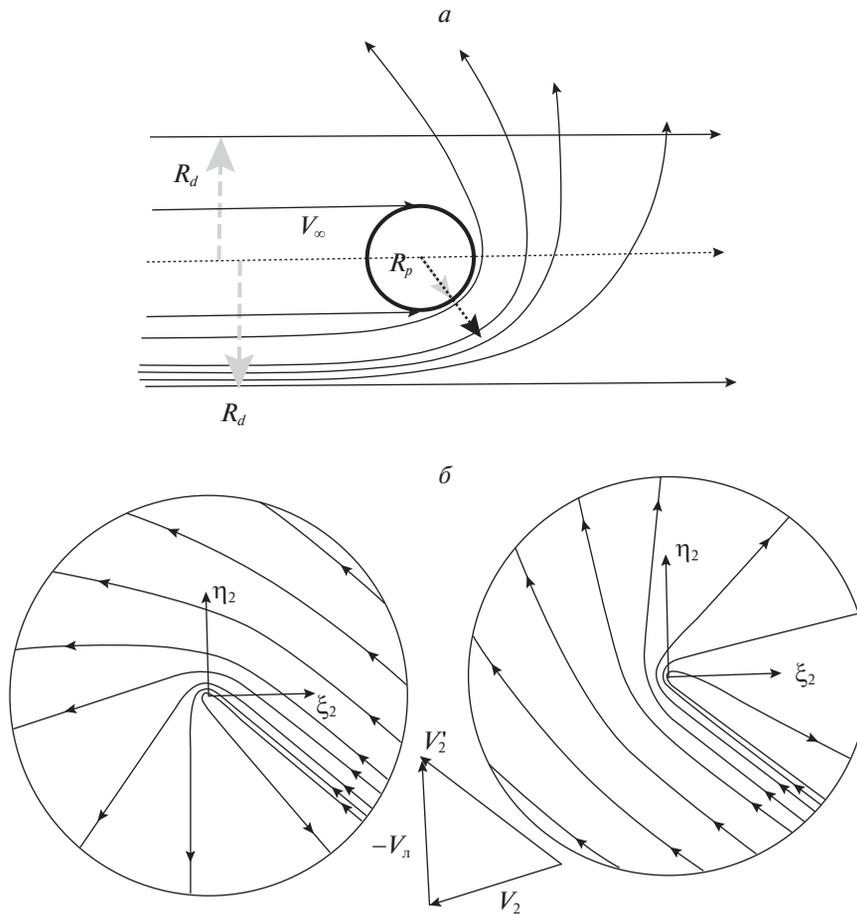


Рис. 3. Структура гравитационного рассеивания (а), структура гравитационного рассеивания на прототипах пучковых диаграмм, полученных В.А. Егоровым [9] (б)

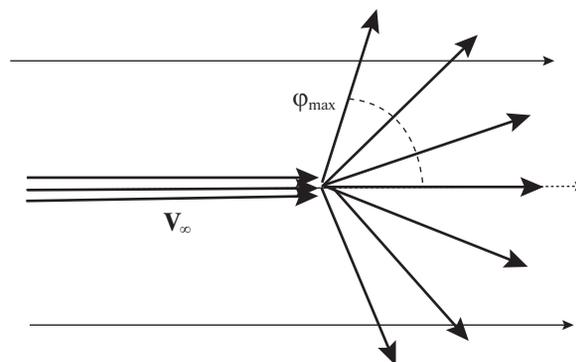


Рис. 4. Общая схема рассеивания в рамках МСКС

и гравитационного становится неразличимой и похожей на структуру типа рассеивающей линзы, действие которой схематично изображено на рис. 4.

В пространственном 3D-случае структуру гравитационного и кулоновского рассеивания может эффективно представить V_∞ -сфера [2, 3, 10] (рис. 5), которая строится следующим образом. Рассматривается область, образованная концами возможных, исходящих из одной точки, векторов асимптотической скорости V_∞ , получаемых после совершения ГМ, при различных векторах прицельных дальностей для каждого фиксированного вектора входной асимптотической

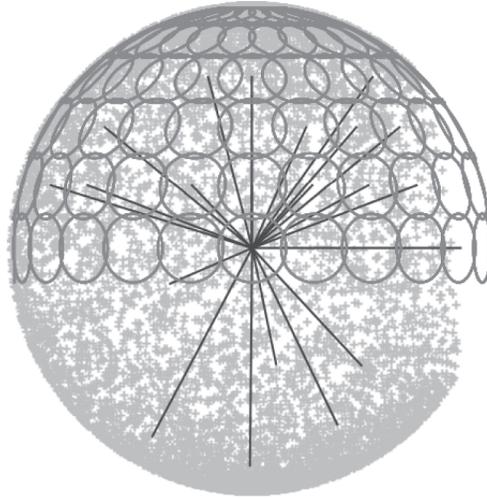


Рис. 5. 3D-структура гравитационного рассеивания в рамках МСКС

скорости. Эта область представляет собой пересечение V_∞ -сферы и телесного угла с раствором, равным Φ_{\max} (сферической шапочкой). Центр шапочки соответствует траекториям, лежащим на границе сферы действия планеты, а граница шапочки отвечает траекториям, для которых прицельная дальность равна эффективному радиусу планеты. Для разных направлений входных асимптотических скоростей получим набор сферических шапочек, покрывающих V_∞ -сферу, как это показано на рис. 5. Направления изображены прямыми линиями.

2. Обобщение формулы Резерфорда для гравитационных воздействий. Для описания поведения ансамбля траекторий пучку одноименно заряженных не взаимодействующих между собой частиц сопоставляется пучок (трубка) динамически допустимых траекторий КА с одинаковым вектором V_∞ асимптотической скорости КА относительно рассеивающей цели (планеты). Поведение пучка заряженных частиц при рассеивании описывается формулой Резерфорда [4–6]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_\alpha q_{aim}}{8\pi\epsilon_0 m_\alpha V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}}, \tag{2.1}$$

где $d\sigma$ – элементарная площадка нерассеянного пучка (так что число проходящих через нее частиц $dN = n d\sigma$, n – интенсивность пучка, характеризующая число частиц, проходящих через перпендикулярную пучку единичную площадку за единицу времени), $d\Omega$ – телесный угол, в который попадают соответствующие альфа-частицы после рассеивания (рис. 5–7). Единицей измерения телесного угла в системе СИ является стерadian, $d\sigma$ измеряется в m^2 .

Представим универсализацию формулы Резерфорда на случай рассеивания виртуальных траекторий КА при гравитационном маневре (при гравитационном рассеивании). Рассмотрим структуру рассеянного множества траекторий, которые до ГМ принадлежали цилиндрической виртуальной трубке траекторий (ВИРТ). В дальнейшем предполагается, что центр планеты лежит на оси ВИРТ, а радиус ВИРТ равен радиусу R_d сферы действия планеты. Для оценки расхождения соседних виртуальных траекторий КА проварьируем по b выражение (1.3) при заданных фиксированных значениях V_∞ и μ_p . Нетрудно видеть, что из (1.3) следует

$$\frac{d\frac{\Phi}{2}}{\cos^2 \frac{\Phi}{2}} = -\frac{\mu_p db}{V_\infty^2 b^2}, \tag{2.2}$$

откуда с учетом тождества

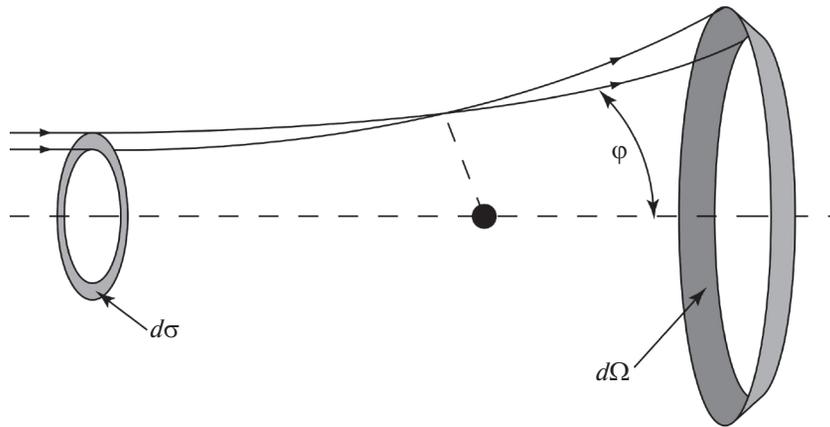


Рис. 6. Элементарная кольцевая площадка $d\sigma$ и соответствующий ей телесный угол $d\Omega$ после рассеивания

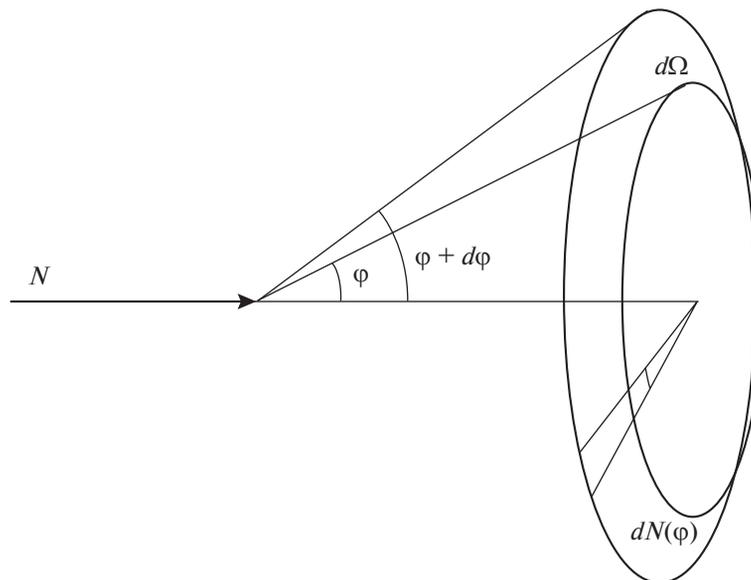


Рис. 7. Телесный угол $d\Omega$ при рассеивании

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\Phi}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} = 1 + \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2 b} \right)^2 \quad (2.3)$$

получим

$$db = -\frac{V_\infty^2}{2\mu_p} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right) d\varphi. \quad (2.4)$$

Знак “–” в выражении (2.4) характеризует убывающую зависимость угла φ от b . Обычно в дальнейших вычислениях этот знак (за несущественностью) опускается [5], но мы этого делать не будем.

Пусть dN_φ – число виртуальных траекторий КА, рассеиваемых на углы, которые лежат в интервале $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, n_b – “поверхностная плотность ВИРТ”, т.е. число прообразов траекторий, проходящих через единицу площади поперечного сечения ВИРТ. В простейшем случае при равномерном засевании всей (или части) трубки ВИРТ имеем $n_b = N/S_{beam}$, где N – общее число

пробных траекторий, а S_{beam} – площадь поперечного сечения ВИРТ, через которую проходят виртуальные траектории.

В силу (1.3) отображение $\varphi \Leftrightarrow b$ взаимно-однозначно, и каждому телесному углу 3D-пространства Ω_φ , отвечающему интервалу плоского угла $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, соответствует определенная кольцевая область поперечного сечения ВИРТ шириной $d\sigma = 2\pi b db$ для интервала прицельной дальности $[b, b + db]$.

З а м е ч а н и е 3. Для анализа гравитационного рассеивания планет в поперечном сечении ВИРТ целесообразно выделить *пертурбационное кольцо* [11], внешний радиус которого равен радиусу сферы действия планеты R_d , а внутренний радиус (“минимальная прицельная дальность”) равен ее полному эффективному радиусу $R_{\varphi}^{полн} = \sqrt{R_p^2 + 2R_p\mu_p/V_\infty^2}$ [8]. В таком случае $S_{beam} = \pi(R_d^2 - R_p^2 - 2R_p\mu_p/V_\infty^2)$. Таблица характеристических размеров пертурбационных колец для планет Солнечной системы, рассчитанная с использованием [12, 13], приведена в [11].

Для числа dN_φ виртуальных образов из интервала $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ (им соответствует полая трубка, вырезанная из сплошной ВИРТ) верно соотношение $dN_\varphi = n_b d\sigma$. Другими словами, траектории при пертурбационном маневре не теряются. Тогда

$$dN_\varphi = n_b 2\pi b db, \tag{2.5}$$

откуда с учетом (2.4) следует, что

$$dN_\varphi = -\frac{\pi n_b b V_\infty^2}{\mu_p} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right) d\varphi. \tag{2.6}$$

Знак “–” в формуле (2.6) лишь компенсирует тот факт, что угол φ убывает с ростом b , и поэтому здесь надо считать $d\varphi < 0$. Чтобы избавиться от этого неудобства, достаточно перейти к дополнительному углу $\psi = \pi - \varphi$, который задает тот же вектор асимптотической скорости после ГМ, но отсчитывается от направления, обратного направлению ВИРТ.

При переходе от прообраза рассеянного пучка – плоского кольцевого элемента $d\sigma$ к его образу – элементу телесного угла $d\Omega_\varphi$, заключенному между конусами с углами раствора $\varphi, \varphi + d\varphi$, куда попадают рассеянные траектории КА после ГМ (рис. 6, 7), воспользуемся соотношением $d\Omega_\varphi = 2\pi \sin \psi d\psi = -2\pi \sin \varphi d\varphi$ (см., например, [5, 6]). Тогда из (2.6) немедленно следует, что

$$dN_\varphi = \frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \frac{n_b b}{\sin \varphi} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right) d\Omega_\varphi. \tag{2.7}$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi/2} = b^2 \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} + 1$$

и, принимая во внимание, что, согласно (1.3),

$$b = \frac{\mu_p \sin \varphi}{V_\infty^2 2 \sin^2 \varphi/2}, \quad \frac{b}{\sin \varphi} = \frac{\mu_p}{2V_\infty^2 \sin^2 \varphi/2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_p}{V_\infty^2} \left(b^2 \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} + 1 \right),$$

из (2.7) с учетом (1.5) получим, что

$$n_\varphi = \frac{dN_\varphi}{d\Omega_\varphi} = \frac{1}{4} \frac{n_b V_\infty^4}{\mu_p^2} (b^2 + (\mu_p/V_\infty^2)^2)^2 = \frac{R_p^2}{4} \left(\left(\frac{b}{R_p} \frac{V_\infty}{V_{pc}} \right)^2 + 1 \right)^2 n_b, \tag{2.8}$$

где $V_{pc} = \sqrt{\mu_p/R_p}$ – круговая скорость относительно планеты, а n_φ – плотность пучка траекторий, попавших в элемент $d\Omega_\varphi$ соответствующего телесного угла. Полученное выражение (2.8) представляет собой *обобщение формулы Резерфорда (ОФР)* [5, 6] для образа гравитационного рассеивания, *по параметрам на “левом конце”*. Оно выражает зависимость плотности распределения рассеянных траекторий КА от прицельной дальности. Формула (2.8) показывает, что *число*

Таблица 1. Гравитационное рассеивание для различных углов φ (параметр на правом конце). Общее число пробных траекторий $N = 300\,000$

Углы поворота φ , град	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
Число траекторий	276237	17330	3445	1100	456	223	122	73	47

попавших после ГМ виртуальных траекторий КА в элемент телесного угла $d\Omega_\varphi$ убывает, согласно биквадратической зависимости от прицельной дальности b .

В табл. 1 в качестве иллюстрации представлены результаты расчетов по гравитационному рассеиванию для случая равномерного распределения траекторий в ВИРТ, посчитанные по формуле (2.8) для $V_\infty/V_{pc} = 1.0$. Видно, что подавляющее число траекторий очень мало отклоняется от первоначального направления и поэтому они оказываются мало интересными для ГМ. Анализ этой таблицы с учетом оценок, приведенных в работе [11], показывает, что в случае использования в качестве цели планеты Венера, а в качестве мишени – планеты Земля при равномерном заполнении ВИРТ требуется вовлечение в вычислительный эксперимент как минимум 300 000 пробных траекторий.

С учетом известных соотношений для c_{hyp} , a_{hyp} , фокального расстояния и действительной полуоси гиперболы, $c_{hyp}^2 = a_{hyp}^2 + b^2$, $a_{hyp} = \mu_p/V_\infty^2$ [8], формула (2.8) запишется как

$$n_\varphi = \frac{c_{hyp}^4}{4a_{hyp}^2} n_b. \quad (2.9)$$

З а м е ч а н и е 4. ОФР для гравитационного рассеивания в каноническом виде через параметры “на правом конце” может быть получено и формально из (2.1) с помощью замены:

$$m_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad q_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad \frac{q_{aim}}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \mu_p. \quad (2.10)$$

После подстановки (2.10) формула (2.1) преобразуется к ОФР для гравитационного рассеивания через параметры “на правом конце”:

$$n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}} n_b. \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.11) непосредственно (1.4) для угла φ поворота вектора асимптотической скорости через расстояние перигея пролетной гиперболы R_π , можно получить еще одну формулу для гравитационного рассеивания траекторий КА, выраженного через эксцентриситет e пролетной гиперболы:

$$n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \left(1 + R_\pi \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \right)^4 n_b = \frac{e^4}{4} a_{hyp}^2 n_b. \quad (2.12)$$

Ниже собраны основные полученные в работе ОФР через параметры на левом конце, на правом конце и в перигея соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\varphi = \frac{c_{hyp}^4}{4a_{hyp}^2} n_b = \frac{1}{4} \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right)^2 n_b = \frac{R_p^2}{4} \left(\left(\frac{b}{R_p} \right)^2 \left(\frac{V_\infty}{V_{pc}} \right)^2 + 1 \right)^2 n_b, \\ n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}} n_b = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 e^4 n_b, \\ n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \left(1 + R_\pi \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \right)^4 n_b. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Последняя формула (2.13) показывает, что ОФР представляет собой композицию однородной деформации с коэффициентом $V_\infty^4/(4\mu_p^2)$ и неоднородной деформации вида:

$$\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2 = \left(b^2 + R_p^2 \frac{V_{pc}^4}{V_\infty^4}\right)^2,$$

зависящей от прицельной дальности.

3. Постановка вычислительного эксперимента. В традиционной постановке пучкового баллистического проектирования в начальный момент (на левом конце) численного эксперимента формируется трубка равномерно распределенных траекторий КА – ВИРТ. Это выполняется с помощью специальных методик [1–3]. Затем моделируется прохождение ВИРТ мимо планеты-цели, согласно точным эфемеридам. Осуществляется селекция полученных траекторий. Для дальнейшего проектирования оставляются только те траектории, которые при их продолжении “дуплетом” попадают в требуемую планету-мишень. Ценность найденного набора таких траекторий состоит в их реалистичности, поскольку они получены с учетом реальных эфемерид и не требуют решения задач Ламберта и выполнения связанного с ним каскада уточняющих итерационных процедур. В свою очередь каждая из таких траекторий может использоваться в качестве опорной оси для нового пучка с локализацией и углубленной детализацией (Zoom-методика [1–3]).

Отметим, что при описанном традиционном подходе к баллистическому проектированию постановка вычислительного эксперимента и само моделирование происходят в направлении “слева направо”: значение телесного угла Ω (на конце справа) не является здесь известной величиной. Напротив, величина b прицельной дальности на левом конце – априорно задаваемое проектное значение для соответствующей задачи Коши в начальной ВИРТ. Общее число пробных траекторий N в трубке также известно априори, поскольку может задаваться по желанию. Для возможности успешного поиска цепочки ГМ алгоритм формирования сценариев космической экспедиции должен обеспечить наличие после очередного ГМ хоть какой-нибудь виртуальной траектории, попадающей в сферу действия планеты-мишени. Из всего набора пробных траекторий оставляется лишь одна траектория, ближе всех других приводящая КА к планете-мишени. Она служит основанием нового пучка. Остальные траектории отбраковываются.

Решающее значение в обнаружении траектории, пригодной для продолжения поиска сценария, имеет плотность множества виртуальных траекторий КА на выходе из сферы действия планеты. Чем больше плотность исходного пучка, тем больше вероятность близкого пролета КА хотя бы по одной траектории вблизи намеченной планеты. При подсчете достаточного числа траекторий виртуальной трубки, направленной к планете-цели, целесообразно учитывать минимальное число ее виртуальных сфер действия в покрытии орбиты планеты-мишени после совершения ГМ [11].

Процедура первичного обнаружения планеты-мишени на множестве траекторий после выполнения ГМ осложняется его пространственной неравномерностью, которая соответствует формуле (2.8).

4. Регуляризация рассеянных траекторий (метод выпрямления). Многим исследователям-баллистикам знакома проблема неустойчивости, возникающая при выполнении итерационных процедур в процессе моделирования ГМ. В первую очередь речь идет о сходимости метода Ньютона (и его модификаций) при вычислении действительных эфемеридных траекторий КА по прообразу найденного решения задачи Ламберта [1–3]. Одна из причин кроется в гиперболическом расхождении соседних виртуальных траекторий КА в процессе ГМ. На рис. 3, а видно, что соседние траектории расходятся с возрастающим в зависимости от угла рассеивания градиентом. Вследствие такого расхождения поиск планеты-мишени на множестве пучка траекторий после выполнения ГМ осложняется из-за пространственной неравномерности полученного пучка, которая соответствует формулам (2.8), (2.11). Использование густых пучков траекторий повышает вероятность встречи с планетой-мишенью хотя бы одной из них, если плотность рассеянного пучка не позволяет “проскочить” планете-мишени в промежутке между траекториями. Зачастую это требует рассмотрения миллионов виртуальных вариантов [1–3].

Действительно, при равномерном распределении виртуальных траекторий в ВИРТ (например, по алгоритму И.М. Соболя [14]) наиболее эффективные траектории КА, в смысле воздействия на них ГМ, т.е. наиболее близко пролетающие над планетой-целью, оказываются и наиболее “одиночными”. Вероятность промаха такой одиночной траектории мимо планеты-мишени

Таблица 2. Равномерное (отрегулированное) гравитационное рассеивание для различных углов φ (параметр на правом конце). Общее число пробных траекторий $N = 300000$

Углы поворота φ , град	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Прицельная дальность, b/R_p	11–6	6–4	4–3	3–2.5	2.5–2	2–1.5
Число траекторий	50000	50000	50000	50000	50000	50000

будет велика. Однако при изменении закона распределения начальных виртуальных траекторий ситуация может кардинально поменяться.

Формулы гравитационного рассеивания (2.13) открывают возможность для эффективного управления начальным распределением виртуальных траекторий в их трубке до осуществления ГМ. Вместо равномерного распределения траекторий $n_b = n_0 = \text{const}$ в начальной ВИРТ установим в ней неоднородное регуляризирующее распределение n_b по следующему закону:

$$n_b = \frac{n_0}{\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}, \quad b \in [R_{\varphi}^{\text{полн}}, R_d]. \quad (4.1)$$

Тогда из (2.8) получим

$$dN_\varphi = n_b d\sigma = \frac{n_0}{\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2} d\sigma, \quad (4.2)$$

откуда

$$n_\varphi = \frac{n_0 V_\infty^4}{4 \mu_p^2}. \quad (4.3)$$

Тем самым зависимость плотности рассеянных виртуальных траекторий КА от прицельной дальности (и от угла φ) исчезает. В итоге получается равномерно рассеянный гравитацией (по углу φ) на отрезке $b \in [R_{\varphi}^{\text{полн}}, R_d]$ пучок траекторий КА.

В табл. 2 представлены модельные таблицы отрегулированного, “распрявленного”, гравитационного рассеивания траекторий КА при совершении ГМ, посчитанные по соотношениям (4.2), (4.3) (модельное значение $V_\infty/V_{pc} = 1.0$).

Видим, что распределение траекторий по значениям прицельной дальности стало неравномерным, а по углу φ – равномерным. В реальных условиях, специально распределяя траектории на старте в ВИРТ подобным образом (на левом конце), можно существенно улучшить равномерность их рассеянного пучка на правом конце и соответственно повысить эффективность синтеза подходящих последовательностей ГМ.

5. Управляемое апостериорное формирование пучка рассеянных траекторий (продвинутая Zoom-методика фокусировки). Согласно распределению (4.1), на выходе из ГМ получается почти равномерно распределенный по углу φ в интервале $b \in [R_{\varphi}^{\text{полн}}, R_d]$ пучок траекторий. Однако можно пойти дальше. Подобным образом можно не только компенсировать вышеуказанную неравномерность, но и извлечь из нее некоторую пользу, сфокусировав пучок около требуемого значения угла $\varphi = \varphi^*$, которому, согласно (1.3), соответствует значение прицельной дальности:

$$b^* = \frac{\mu_p}{V_\infty^2} \text{ctg} \frac{\varphi^*}{2}.$$

В качестве значения φ^* может фигурировать ориентировочное проектное значение угла поворота вектора асимптотической скорости КА, приближающее КА к встрече со следующей планетой-мишенью. Пучок траекторий достаточной мощности, сфокусированный около угла φ^* , позволит сконцентрировать поиск на перспективном интервале $\varphi \in [\varphi^* - \Delta\varphi, \varphi^* + \Delta\varphi]$, где удастся более надежно выявить требуемую точную траекторию для возможности продолжения цепочки ГМ. В свою очередь теперь уже эта траектория может быть использована в качестве опорной для по-

иска семейства перспективных траекторий посредством дополнительно углубленной детализации (продвинутая Zoom-методика фокусировки [1–3]).

Вместо распределения траекторий по формуле (4.1) установим для начальной ВИРТ “фокусирующее” распределение $\hat{n}(b, b^*)$ по закону:

$$\hat{n}(b, b^*) = \begin{cases} n_{forced} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right)^{-2}, & b \in [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b], \\ 0, & b \notin [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b], \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$n_{forced} = n_0 \frac{R_d - R_{эф}^{полн}}{2\Delta b} \gg n_0.$$

Тогда получим

$$n_\phi = \begin{cases} \frac{n_{forced} V_\infty^4}{4 \mu_p^2}, & b \in [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b], \\ 0, & b \notin [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b]. \end{cases} \quad (5.2)$$

Зависимость плотности рассеянных виртуальных траекторий КА от прицельной дальности (и от угла ϕ) убывает, а сама плотность рассеивания значительно увеличивается за счет фокусировки равномерно рассеянного (по углу ϕ) гравитацией пучка траекторий КА в окрестности $\phi = \phi^*$.

З а м е ч а н и е 5. Как показывает формула (1.3), вектор Лапласа принадлежит плоскости, образованной вектором \mathbf{V}_∞ скорости на бесконечности и вектором \mathbf{b} прицельной дальности. Следовательно, относительно планеты плоскость пробной орбиты при ГМ не меняется. Пусть заранее приблизительно известен апостериорный (после ГМ) угол i^* наклона орбиты к плоскости экватора планеты. Тогда для построения пучка траекторий направление вектора \mathbf{b} целесообразно выбирать в плоскостях с углами наклона, близкими к углу i^* . Тем самым плотность пучка траекторий дополнительно может быть существенно увеличена без увеличения числа траекторий.

Заключение. Управляемые ГМ являются результатом целенаправленного использования часто встречающегося в масштабах Вселенной [15] феномена естественного гравитационного рассеивания. В работе синтезировано усиление формулы Резерфорда, учитывающее специфику воздействия планеты-цели на траекторию КА. Применение предлагаемых формул для оценки результата гравитационного рассеивания дает возможность преодолеть проблему нелинейной неравномерности рассеянного пучка. Также появляется возможность создания целенаправленного пучка траекторий после ГМ. В итоге существенно повышается вероятность попадания в сферу действия планеты-мишени хотя бы одной пролетной траектории из ограниченного числа виртуальных прототипов. Как следствие оказывается возможным значительно уменьшить необходимое число моделируемых вариантов пролета сферы действия планеты-цели для формирования требуемой последовательности цепочек многократных ГМ. Существенно повышается эффективность и быстродействие рекуррентной процедуры поиска разнообразных баллистических сценариев межпланетных перелетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 149–167.
2. Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренев С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы // Под ред. А.Г. Тучина. МО, Химки: “НПО Лавочкина”, 2018. 336 с. ISBN 978 5-905646-12-6.
3. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Обобщенная формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных маневров в Солнечной системе: Препринт № 6. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-6>.

4. Резерфорд Э. Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов. М.: Наука, 1972. 533 с.
5. Евдокимов К.Е. Атомная физика. https://portal.tpu.ru/SHARED/e/EVDOKIMOV/Teach/course_at/Lectures/.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. 4-е изд., исправленное. Т. 1. М.: Наука, 1988. 215 с. ISBN 5-02-013850-9.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2019. 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7.
8. Охоцимский Д.Е., Сухарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2.
9. Егоров В.А. О некоторых задачах полета к Луне // УФН. 1957. LXIII. С. 73–117.
10. Strange N.J., Russell R.P., Buffington B. Mapping the V-infinity Globe // Proc. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Mackinac Island, MI, Aug 2007. Advances in the Astronautical Sciences. V. 129. Univelt, 2007. P. 423–446. Paper AAS 07-277.
11. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационное рассеивание при совершении гравитационных маневров и пертурбационные кольца в Солнечной системе // Препринт № 2. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-2>
12. Luzum B., Capitaine N., Fienga A. et al. The IAU 2009 System of Astronomical Constants: The Report of the IAU Working Group on Numerical Standards for Fundamental Astronomy // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 110. <https://doi.org/10.1007/s10569-011-9352-4>
13. Fukushima T. System of Astronomical Units and Constants. IAU – WGRS/SGAC, 1990, Circ. 13.
14. Соболев И.М. Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 5. С. 1332–1337.
15. Wambsganss J. Gravitational Lensing in Astronomy. Living Rev. Relativity. 1998. № 1. [Online Article]: Cited on January 26, 2004, <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-1998-12>.