ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 4, с. 3–16

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5.01+629.78.015:52

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПАКТНОГО МИНИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ФОРМИРОВАНИЕ ГАЛО-ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛАГРАНЖА L2

Г. А. Степаньянц

МАИ (национальный исследовательский ун-т) Москва, Россия

e-mail: gssst@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.11.2022 г.
После доработки 22.12.2022 г.
Принята к публикации 06.02.2023 г.

Показана эффективность применения прямого метода Ляпунова для обеспечения устойчивости движения в компактных инвариантных множествах конечномерных динамических систем. В рамках линейной модели ограниченной задачи трех тел рассматривается возможность обеспечения асимптотической устойчивости периодического движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки Лагранжа L2 с использованием сил светового давления без расхода рабочего тела. Оценивается потребная площадь управляющих поверхностей в зависимости от массы космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338823030034, **EDN:** EUFJQP

Введение. При необходимости обеспечить устойчивость невозмущенного движения системы, не являющегося состоянием равновесия, часто переходят к уравнениям в отклонениях, а потом ищут закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы в отклонениях [1–6]. При этом для нелинейных систем уравнения в отклонениях оказываются нестационарными, и нестационарным оказывается также искомый закон управления [1, 4, 5]. Такой подход часто приводит к необходимости подавать на вход системы некоторый программный сигнал, зависящий от времени, а иногда и от параметров системы [7]. В ряде случаев создание такого управляющего сигнала не имеет альтернатив. Однако если нужно обеспечить асимптотическую устойчивость установившегося движения системы, не являющегося состоянием равновесия (например, периодического), нет необходимости в определении конкретной функциональной зависимости состояния системы от времени. Это может быть тогда, когда известно желаемое (или исследуемое) положение целой траектории установившегося движения в пространстве состояний. Как правило, замыкание траектории установившегося движения является ограниченным минимальным множеством динамической системы [8–10]. При этом вместо управления движением в установившемся режиме и обеспечения его асимптотической устойчивости по Ляпунову целесообразно рассматривать задачу обеспечения требуемого поведения системы в окрестности его минимального множества или, другими словами, задачу обеспечения асимптотической устойчивости минимального множества системы. Интуитивно понятные изменения формулировок теорем прямого метода Ляпунова (требующие, конечно, обоснования) позволяют применить их для построения искомых законов управления. Замечательно, что в нетривиальных случаях (когда минимальное множество не является точкой покоя) пространственная конфигурация минимального множества помогает найти требуемые для решения задачи функции Ляпунова.

Цель статьи – построение законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость движения системы в окрестности минимального множества, не являющегося изолированным состоянием равновесия.

Отличительная особенность предлагаемого подхода представляет собой применение индикаторов минимальных множеств для построения функций Ляпунова, используемых для построения законов управления движением системы в окрестности минимального множества. Сформулированы и доказаны достаточные условия асимптотической устойчивости компактных инвариантных множеств, позволяющие строить эффективные законы управления.

В качестве примера рассматривается задача исследования возможности непрерывного управления движением космического аппарата (КА) в окрестности второй коллинеарной точки Лагранжа системы Солнце—Земля—КА с помощью сил светового давления [7, 11]. Применение прямого метода Ляпунова в предлагаемой редакции позволило получить аналитические выражения для закона управления (линейного с насыщением при обеспечении состояния покоя КА в окрестности точки Лагранжа и нелинейного при обеспечении устойчивости его периодического движения — гало-орбиты). Кроме того, проведена оценка потребной площади управляющих поверхностей при дополнительном условии полного освещения КА (для бесперебойного функционирования солнечных батарей).

1. Постановка задачи. Пусть уравнения движения конечномерной стационарной динамической системы записаны в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad \dim \mathbf{x} = n, \quad \dim \mathbf{u}(\mathbf{x}) = m, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — закон управления, U — множество допустимых значений вектора управления, $\mathbf{f}$ — непрерывно дифференцируемая функция от своих аргументов. Законом управления, как обычно, назовем зависимость вектора управления от вектора состояния. Если не будет специальных оговорок, допустимыми считаем кусочно-дифференцируемые функции от вектора состояния, значения которых лежат в замкнутом выпуклом множестве U, как правило, ограниченном (т.е. на компакте). Полагаем выполненными требуемые для решения задачи условия управляемости. Условимся, что в уравнении движения (1.1) функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ будет обозначать значение правой части уравнения (1.1) при конкретном выбранном законе управления, так, что $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})\right)$. Таким образом, может оказаться, что закон управления является кусочно-дифференцируемой функцией от координат вектора состояния и правая часть (1.1) также окажется кусочно-дифференцируемой функцией. При необходимости (например, в случае релейного закона управления) считаем выполненными условия продолжения решения системы (1.1) на поверхности перехода из одной области гладкости в другую [12].

Условимся в дальнейшем, как обычно, называть компактом (или компактным множеством) замкнутые вполне ограниченные подмножества полного топологического пространства (в контексте данной статьи можно ограничиться замкнутыми ограниченными подмножествами евклидового пространства $\mathbb{R}^n$). Для произвольного множества X через $\mathrm{Cl}\, X$, $\mathrm{Int}\, X$, $\mathrm{Fr}\, X = \mathrm{Cl}\, X \backslash \mathrm{Int}\, X$ обозначены соответственно его замыкание, внутренность и граница.

Будем считать, что необходимо обеспечить асимптотическую устойчивость движения в замкнутом ограниченном инвариантном [8—10] множестве, являющимся замыканием устойчивой по Пуассону траектории, т.е. в минимальном множестве, которое обозначим M. Движение в M назовем устойчивым (асимптотически устойчивым), если устойчиво (асимптотически устойчиво) минимальное множество M, что в свою очередь будет означать выполнение следующего определения.

Определение 1. Компактное минимальное множество M называется устойчивым, если для всякой его ε-окрестности $S_\varepsilon(M)$ найдется такая δ-окрестность $S_\delta(M)$ и такое $\tau \geq 0$, что при любых $\mathbf{x}(0) \in S_\delta(M)$ и любых $t > \tau$ состояние системы не выходит за пределы ε-окрестности $S_\varepsilon(M)$, так что $\mathbf{x}(t) \in S_\varepsilon(M)$. Если окрестность $S_\delta(M)$ может быть выбрана независимо от $S_\varepsilon(M)$, то минимальное множество M называется асимптотически устойчивым.

Пусть задано управление (или закон управления), обеспечивающее заданное движение в требуемом минимальном множестве M. В случае, если минимальное множество M не является асимптотически устойчивым, требуется найти закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость минимального множества. По возможности желательно оценить область притяжения множества M снизу, т.е. указать такое множество начальных условий, для которого все начинающиеся в нем движения асимптотически сходятся к M.

В качестве примера рассмотрим задачу обеспечения асимптотической устойчивости установившегося движения КА в окрестности коллинеарной точки Лагранжа L_2 системы Солнце—Земля [6].

2. Решение задачи. Нам понадобится следующее очевидное расширение теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости применительно к устойчивости инвариантных множеств и распространение понятий знакопостоянных и знакоопределенных функций на замкнутые инвариантные множества.

Определение 2. Неотрицательная непрерывная функция $V_M(\mathbf{x})$ от координат вектора состояния, заданная в окрестности $S(M)$ компактного инвариантного множества M, называется знакопостоянной положительной функцией, если $\mathbf{x} \in M \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) = 0$ $(\mathbf{x} \in S(M) \backslash M \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) \geq 0)$. Функция $V_M(\mathbf{x})$ называется знакопостоянной отрицательной, если функция $-V_M(\mathbf{x})$ будет знакопостоянная положительная. Знакопостоянная функция $V_M(\mathbf{x})$ – знакоопределенная, если $V_M(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in M, \mathbf{x} \in S(M) \backslash M \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) > 0$.

Определение 3. Заданная в окрестности $S(M)$ и равная нулю на компактном инвариантном множестве M функция $V_M(\mathbf{x})$ от координат системы называется функцией Ляпунова, если выполнены следующие два условия.

1. Во всех точках области $S(M) \backslash M$ функция $V_M(\mathbf{x})$ имеет производную по любому направлению.

2. В любой точке $\mathbf{x} \in S(M) \backslash M$ производная функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения (т.е. производная функции $V_M(\mathbf{x})$ вдоль направления, определяемого вектором $\mathbf{F(x)}$ правой части уравнения (1.1)) , и равная

$$V'(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = W_M(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{V(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{x}))}{\varepsilon} \right),$$

является знакопостоянной в $S(M)$.

Замечание 1. В тех точках, где функция $V_M(\mathbf{x})$ дифференцируема, ее производная вдоль траекторий движения равна $W_M(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}} V_M(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x})$, где точка – знак скалярного произведения. Так как состояние системы $\mathbf{x}$ – функция времени, то производную функции $V_M(\mathbf{x})$, взятую вдоль траекторий движения, называют также полной производной функции $V_M(\mathbf{x})$ по времени, взятой в силу уравнений движения системы.

Определение 4. Непрерывная функция $V_M(\mathbf{x})$ от координат системы, заданная в окрестности $S(M)$ минимального (инвариантного) множества M, называется индикатором M, если она равна нулю на M и больше нуля на дополнении M в $S(M)$, т.е. на $S(M) \backslash M$.

2.1. Достаточные условия устойчивости компактного минимального множества.

Теорема 1. Для устойчивости компактного минимального множества M динамической системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением (1.1) с правой частью $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, достаточно выполнения следующих условий.

1. Найдется знакоопределенная положительная функция Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$, являющаяся индикатором минимального множества M.

2. Функция Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$ равна нулю на многообразии M. Во всех точках множества $S(M) \backslash M$ для любого направления существует производная функции $V_M(\mathbf{x})$ вдоль этого направления.

3. Полная производная по времени от функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения системы, т.е. функция $V'(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = W_M(\mathbf{x})$, представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию в окрестности $S(M)$.

Доказательство. Обозначим через $V_* > 0$ минимальное значение функции $V_M(\mathbf{x})$ на компакте $\mathrm{Fr}\, S_\varepsilon(M)$, являющемся границей множества $S_\varepsilon(M)$. Так как $V_M(\mathbf{x})$ непрерывна и равна нулю на M, то найдется такая окрестность $S_\delta(M)$, что $\mathbf{x} \in S_\delta(M) \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) < V_*$ & $S_\delta(M) \subset S_\varepsilon(M)$. Значение, принимаемое функцией Ляпунова в процессе движения системы, запишем в следующем виде:

$$V_M(\mathbf{x}(t)) = V_M(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t W_M(\mathbf{x}(\tau)) d\tau. \tag{2.1}$$

Так как $W_M(\mathbf{x}) \le 0$ & $t \ge 0 \Rightarrow V_M(\mathbf{x}(t)) \le V_M(\mathbf{x}(0)) = V_*$, то движение, начавшееся в $S_\delta(M)$, никогда не достигнет границы $\mathrm{Fr}S_\varepsilon(M)$. Теорема доказана.

Нам понадобится следующая теорема, которая для инвариантного множества является аналогом теорем Ляпунова и Барбашина–Красовского [2] об асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия стационарной системы.

2.2. Расширенные достаточные условия асимптотической устойчивости компактного инвариантного множества.

Теорема 2. Пусть в ограниченной окрестности $S(M)$ минимального множества M выполняются условия теоремы 1, а множество $S(M)$ содержит подмножество $S_{VM}(c_0) = \{\mathbf{x} : 0 < V_M(\mathbf{x}) \le c_0\}$. В этом случае для асимптотической устойчивости минимального множества M достаточно, чтобы для любого $c \le c_0$ для множества $S_{VM}(c)$ выполнялось любое из следующих условий.

1. Для любого $\gamma > 0$ замкнутое множество $S_V(c,\gamma) = \{\mathbf{x} : \gamma \le V_M(\mathbf{x}) \le c\}$ не является инвариантным и не содержит инвариантного подмножества системы.

2. При любых $0 < \gamma \le c$ поверхности равных уровней $S_{VC}(\gamma) = \{\mathbf{x} : V_M(\mathbf{x}) = \gamma\}$ не инвариантны и не имеют инвариантных подмножеств системы.

3. Множество $S_{VM}(c) = \{\mathbf{x} : 0 < V_M(\mathbf{x}) \le c\}$ не содержат ω – предельных точек системы (условие Барбашина–Красовского применительно к минимальным множествам).

4. Производная $W_M(\mathbf{x})$ функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения системы, является знакоопределенной отрицательной функцией в $S(M)$, равной нулю на инвариантном множестве M.

Доказательство. 1. Поскольку в силу теоремы 1 состояние системы остаётся внутри множества $S_V(c,0) = \{\mathbf{x} : 0 \le V_M(\mathbf{x}) \le c\}$, а при любом как угодно малом γ множество $S_V(c,\ \gamma) = \{\mathbf{x} : \gamma \le V_M(\mathbf{x}) \le c\}$ не инвариантно и не содержит инвариантных подмножеств, то для любых начальных условий $\mathbf{x}(0) \in S_V(c,0)$ найдется такое $\tau > 0$, что $\mathbf{x}(\tau) \in S_V(\gamma,0)$. Таким образом, условие 1 – перефразировка определения асимптотической устойчивости из определения 1 и поэтому справедливо.

2. Так как любая поверхность равных уровней $S_{VC}(\gamma)$ является подмножеством $S_V(c,\gamma)$, то нарушение условия 2 влечет за собой нарушение условия 1. При доказательстве теоремы 1 было показано, что значения функции Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$ не возрастают. Предположим, нарушая условия теоремы, что существует инвариантное подмножество G, указанное в условии 1. Так как замыкание инвариантного множества инвариантно, не нарушая общности, можно считать G замкнутым минимальным множеством, а так как $S(M)$ ограничено, то G – компактно. На компакте G функция Ляпунова будет принимать свое минимальное положительное значение, не возрастающее при $t \to \infty$ и, следовательно, постоянное наG, откуда вытекает, что нарушение условия 1 влечет нарушение условия 2. Таким образом, условия 1 и 2 эквивалентны.

3. Отрицание условия 3 влечет отрицание условия 1, поскольку множество ω – предельных точек замкнуто и инвариантно, а поэтому наличие предельной точки в $S_{VM}(c)$ противоречит условию 1. Любая бесконечная последовательность точек компактна и содержит сходящуюся подпоследовательность, поэтому нарушение условия 1 означает наличие хотя бы одной предельной точки, т.е. условия 1 и 3 эквивалентны.

4. Если выполнено условие 4, то любая поверхность равного уровня $S_{VC}(\gamma) = \{\mathbf{x} : V_M(\mathbf{x}) = \gamma\}$ является компактом, на котором производная W_M принимает свое не равное нулю максимальное значение (отрицательное), и поэтому состояние системы не может оставаться на множестве $S_{VC}(\gamma)$ в течение конечного промежутка времени и выполнение условия 4 влечет за собой справедливость условия 2. Теорема доказана.

2.3. Оценка области притяжения компактного инвариантного множества.

Следствие теоремы 2. Из доказательства теоремы следует, что любое множество $S_{VM}(c_0)$, заданное соотношением $S_{VM}(c_0) = \{\mathbf{x} : 0 < V_M(\mathbf{x}) \le c_0\} \subset S(M)$, лежит в области притяжения инвариантного множества M и поэтому может служить оценкой снизу этой области притяжения. Наилучшей оценкой снизу, которая может быть построена на основании выбранной функции Ляпунова, очевидно, является та, которая соответствует максимальному значению параметра c_0.

Для полноты добавим теорему о неустойчивости инвариантного множества в форме, практически совпадающей с классическими формулировками теорем Ляпунова о неустойчивости нулевого состояния равновесия системы в отклонениях.

2.4. Достаточные условия неустойчивости компактного инвариантного множества.

Теорема 3. Для неустойчивости компактного инвариантного множества M динамической системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением (1.1) с правой частью $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, достаточно выполнения следующих условий.

1. Найдётся функция Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$, являющаяся индикатором множества M.

2. В любой как угодно малой окрестности множества M найдется такая точка, в которой функция $V_M(\mathbf{x})$ принимает положительные значения.

3. Во всех точках множества $S(M)\backslash M$ для любого направления существует производная функции $V_M(\mathbf{x})$ вдоль этого направления.

4. Полная производная по времени от функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения системы, т.е. функция $V'(\mathbf{x},\mathbf{F}(\mathbf{x})) = W_M(\mathbf{x})$, представляет собой знакоопределенную положительную функцию в окрестности $S(M)$.

Доказательство опускается, поскольку является перефразировкой доказательства соответствующей теоремы Ляпунова о неустойчивости нулевого состояния равновесия системы в отклонениях.

Замечание 2. Иногда при исследовании кусочно-гладких динамических систем минимальное компактное множество, устойчивость которого оценивается, удобно бывает представить в виде замыкания пересечений конечного числа связных открытых множеств. В этом случае может оказаться полезным следующее утверждение.

2.5. Устойчивость инвариантных множеств, являющихся пересечением конечного числа областей.

Теорема 4. Пусть инвариантное компактное множество M динамической системы представляет собой замыкание пересечения конечного числа открытых множеств G_k:

$$M = \mathrm{Cl}\bigcap_{k=1}^{h} G_k = \bigcap_{k=1}^{h} \mathrm{Cl}\, G_k.$$

В этом случае для асимптотической устойчивости множества M достаточно выполнения следующих двух условий.

1. Каждое множество G_k содержит M в качестве подмножества и может быть представлено в виде $G_k = \{\mathbf{x} : V_k(\mathbf{x}) < C_k\}$, где V_k – непрерывные дифференцируемые функции, равные нулю на множестве M и непрерывно дифференцируемые во всех точках $G_k\backslash M$ (в дополнении M в G_k), область определения которых совпадает с G_k.

2. Производная по времени $V_k'(\mathbf{x})$ любой функции V_k вдоль траекторий динамической системы – непрерывная функция от $\mathbf{x}$, а ее значения во всех точках $\mathbf{x} \notin M$ строго отрицательны.

Доказательство. Обозначим через $\hat{G}_m$ множества:

$$\hat{G}_m = G_m \backslash \bigcup_{k=m+1}^{h} G_k,$$

положим

$$G_{Ck} = \left\{\mathbf{x} : V_k(\mathbf{x}) \le C = \min_k C_k\right\}$$

и введем функцию $V(\mathbf{x})$, значение которой определим соотношением $\mathbf{x} \in \hat{G}_m \Rightarrow V(\mathbf{x}) = V_m(\mathbf{x})$. Пусть

$$G_{CV} = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) \le C\} = \bigcup_k G_{Ck},$$

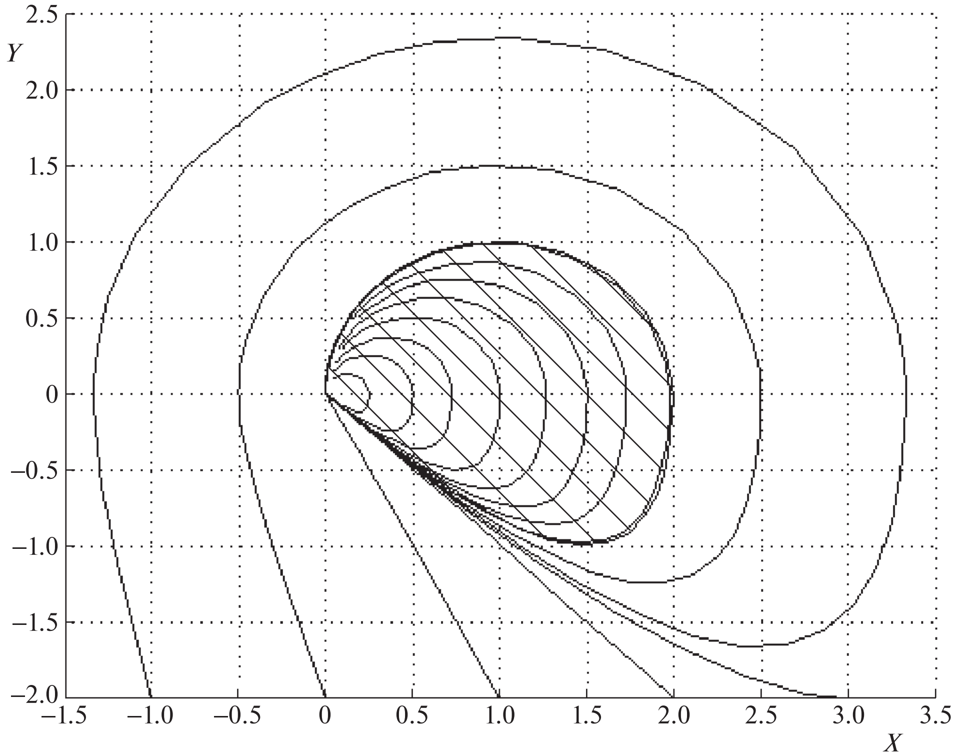

Рис. 1. Фазовый портрет системы 3

а $S_\varepsilon(M)$ – открытая окрестность множества M. Рассмотрим множество $G_{\varepsilon C} = G_{CV} \backslash S_\varepsilon(M)$ и функцию $V(\mathbf{x})$. Заданное таким образом множество $G_{\varepsilon C}$ является компактом, на границе которого функция V принимает значение C, а в любых внутренних точках ее значение не превышает C. Каждой точке $\mathbf{x} \in G_{\varepsilon C}$ соответствует значение производной $V'(\mathbf{x}) = V_k'(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \hat{G}_k$, и хотя $V'(\mathbf{x})$ может не быть непрерывной, но она интегрируема и принимает на $G_{\varepsilon C}$ свое максимальное (отрицательное) значение. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получим, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ при любых начальных условиях, лежащих в окрестности G_{CV}, движение системы за конечное время достигнет окрестности $S_\varepsilon(M)$. Теорема доказана.

Например, рассмотрим кусочно-гладкую систему второго порядка, дифференциальные уравнения движения которой записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = y,\\
&\frac{dy}{dt} = f(x,y),\\
&y \le 0 \Rightarrow f(x,y) = -2x - 3y, \quad x = 0 \;\&\; y = 0 \Rightarrow f(x,y) = 0,\\
&y > 0 \;\&\; (x-1)^2 + y^2 > 1 \Rightarrow f(x,y) = -x + 1,\\
&y > 0 \;\&\; (x-1)^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow f(x,y) = -x + \frac{x^2 + y^2}{2x}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Эта система имеет единственное неустойчивое нулевое состояние равновесия, причем все движения системы при $t \to \infty$ сходятся к этому состоянию равновесия. Для траекторий этой системы, лежащих в ограниченной области, т.е. устойчивых по Лагранжу, состояние равновесия является одновременно и α и ω предельной точкой, что и определяет его неустойчивость по Ляпунову (для остальных траекторий нулевое состояние равновесия представляет собой только ω предельную точку). Фазовый портрет этой системы показан на рис. 1.

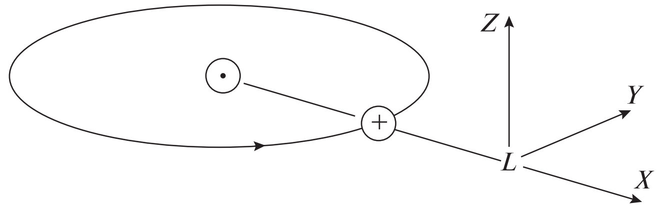

Рис. 2. Система координат, связанная с точкой Лагранжа

Объединение G всех обыкновенных (орбитно устойчивых) траекторий системы (2.2) лежит в ограниченной открытой области $G = \text{Int}\, G$, выделенной на рисунке штриховкой. В рассматриваемом случае эти траектории начинаются и заканчиваются в окрестности неустойчивого нулевого состояния равновесия. Их объединение является связным открытым ограниченным инвариантным множеством системы и может быть представлено в виде $G = \{\langle x, y\rangle : \Phi(x, y) < 0\}$, причем функция $\Phi(x, y)$ задается соотношениями $y > 0 \Rightarrow \Phi(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$, $y \le 0 \Rightarrow \Phi(x, y) = (2x + y)^2 - 8(x + y)$. Замыкание этого множества также инвариантно, а его граница состоит из двух особых (орбитно неустойчивых) траекторий – нулевого состояния равновесия и траектории, проходящей через точку (2,0).

Зададим $V(x, y) = \Phi(x, y)$ при $\Phi(x, y) \ge 0$. При $\Phi(x, y) \le 0$ положим $V(x, y) = 0$. Такая функция $V(x, y)$ является индикатором инвариантного множества G. Ее производная, взятая вдоль траекторий движения системы, равна нулю при $y > 0$, а при $y < 0$ отрицательна. Поверхности ее равных уровней (линии) не содержат инвариантных подмножеств (в данном случае – состояний равновесия). Таким образом, на основании теоремы 2 компактное инвариантное множество G асимптотически устойчиво. Применение такой функции Ляпунова к замкнутым инвариантным множествам, являющимся строгими подмножествами множества G, приведет к равенству нулю производной функции Ляпунова. Таким образом, эти множества окажутся устойчивыми, но не асимптотически.

В [3] был предложен принцип построения такого закона управления, который обеспечивает наиболее быстрое затухание значений выбранной функции Ляпунова. Такой же закон управления обеспечивает наибольшее значение оценки снизу области притяжения стабилизируемого состояния равновесия [5]. Применительно к рассматриваемой задаче построения закона управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость минимального множества, закон управления целесообразно строить следующим образом. Выбирается знакоопределенная положительная функция $V_M(\mathbf{x})$, являющаяся индикатором минимального множества M и такая, производная которой $V'(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = W_M(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, взятая вдоль траекторий движения, зависит от управления $\mathbf{u}$. Если удается найти такой допустимый закон управления $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, при котором $V_M(\mathbf{x})$ попрежнему остается индикатором минимального множества M и вместе с тем выполняются условия теорем 1 и 2, то задача обеспечения асимптотической устойчивости минимального множества M считается решенной. Оптимальным для выбранной функции Ляпунова называем закон управления, обеспечивающий минимальное значение производной этой функции. Естественно, такой минимум предполагается существующим. Как правило, в таких случаях множество допустимых значений управления является замкнутым и ограниченным.

3. Пример. 3.1. Задача обеспечения асимптотической устойчивости периодического движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки L2. Решение будем искать в рамках линейной модели ограниченной круговой задачи трех тел [6]. Систему дифференциальных уравнений движения центра масс КА запишем в правой вращающейся системе координат [4]. Центр системы координат поместим в точке Лагранжа (L2), ось X направим вдоль оси Солнце–Земля ($\odot$, $\oplus$) в сторону от Солнца, ось Y – по направлению вектора скорости Земли, ось Z – перпендикулярно плоскости орбиты Земли (рис. 2).

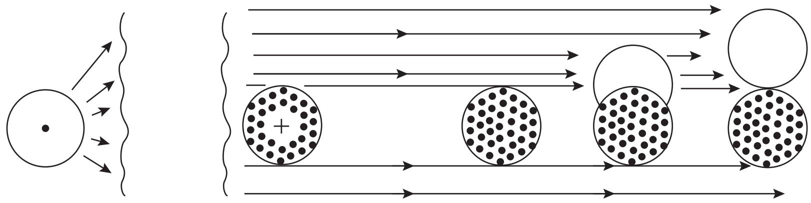

Рис. 3. Условие выхода КА из полутени

Линейное приближение для такой системы, записанное для ускорений КА, будет иметь следующий вид [4]:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2,\\
\frac{dx_2}{dt} &= (2C_0 + \Omega_0^2)x_1 + 2\Omega_0 y_2 + \frac{u_x}{m},\\
\frac{dy_1}{dt} &= y_2,\\
\frac{dy_2}{dt} &= (\Omega_0^2 - C_0)y_1 - 2\Omega_0 x_2 + \frac{u_y}{m},\\
\frac{dz_1}{dt} &= z_2,\\
\frac{dz_2}{dt} &= -C_0 z_1 + \frac{u_z}{m}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В этих уравнениях u_x, u_y, u_z – проекции на координатные оси действующих на КА сил, Ω_0 – угловая скорость вращения Земли по орбите, mC_0 – гравитационные силы, действующие на КА, m – масса КА, $C_0 = k(m_\odot/(r_\oplus + r_L)^3 + m_\oplus/r_L^3)$, константа k – гравитационная постоянная, $m_\odot$ – масса Солнца, $m_\oplus$ – масса Земли, $r_\oplus$ – расстояние от Земли до Солнца, r_L – расстояние от Земли до точки Лагранжа.

В [7, 11] в качестве управляющих сил, стабилизирующих движение КА, предложено рассматривать силы светового давления. Величину и направление этих сил будем задавать с помощью изменения эффективной площади и пространственного положения управляющих отражающих поверхностей (включая солнечные батареи).

Из точки Лагранжа L_2 диск Земли и диск Солнца видны под одним и тем же углом. Поэтому для длительного функционирования КА необходимо, чтобы он был смещен в плоскости X, Y относительно оси X (требование постоянного функционирования солнечных батарей). Учитывая, что Земля и Солнце видны под малым углом (примерно 1°), для полного освещения КА требуется его смещение относительно оси X на величину диаметра Земли (рис. 3).

При меньшем смещении видимый диск солнца имеет вид серпа, а КА будет находиться в полутени и его освещенность будет в γ раз слабее, чем при полном видимом диске. Коэффициент γ равен $1 - 2\arccos\Delta - \Delta\sqrt{1-\Delta^2}$, где Δ – половина величины смещения КА от оси X в долях земного радиуса.

Применим предлагаемый подход к решению задачи управления установившимся движением КА в окрестности точки Лагранжа. На первом этапе не будем рассматривать вопросы, связанные с реализацией требуемых величин управляющих воздействий. Обозначим через r_0 требуемую величину отклонения КА от точки Лагранжа, необходимую для функционирования солнечных батарей и получения потребного для управления давления солнечного света. Для конкретности примем r_0, равным диаметру Земли $D_\oplus$. Свободное движение системы (3.1) неустойчиво (ее характеристический многочлен содержит один положительный, один отрицательный и два чисто мнимых корня). Рассмотрим два варианта решения поставленной задачи.

3.2. Первый вариант. Требуется создать устойчивое состояние равновесия на расстоянии r_0 от оси X, проходящей через точку Лагранжа и не меняющей свое положение относительно выбранной системы координат. Преимущество такого подхода заключается в равенстве нулю возмущающих воздействий, вызванных наличием кориолисовых ускорений ($2\Omega_0 y_2$ и $2\Omega_0 x_2$) при невозмущенном движении системы. Недостатком является необходимость создания постоянного управляющего воздействия, равного $\left(C_0 - \Omega_0^2\right) r_0$ (при смещении вдоль оси Y) или $C_0 r_0$ (при смещении вдоль оси Z). Задача решается стандартными методами. Можно предложить, например, следующий линейный закон управления, обеспечивающий автономное управление по каждой координате с максимальной степенью устойчивости:

$$\begin{gathered}
u_x = m(-2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 - 2\Omega_0 y_2 - 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2), \\
u_y = m((\Omega_0^2 - C_0)r_0 - 2\Omega_0 x_2 - 2(\sqrt{C_0 - \Omega_0^2})y_2), \\
u_z = m(-2(\sqrt{C_0})z_2).
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Заметим только, что при любом подходе критическим является смещение КА вдоль оси X, связанное с потерей устойчивости. Для грубой оценки недопустимых величин смещений можно принять равными нулю смещения от номинальных значений вдоль осей Z и Y. При законе управления (3.2) движение вдоль оси X на основании (3.1) будет описываться уравнением

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = x_2, \\
\frac{dx_2}{dt} = (2C_0 + \Omega_0^2)x_1 + u_x, \quad u_x = -2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 - 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2.
\end{gathered}$$

Обозначим через $D_\oplus$ диаметр Земли и перейдем к безразмерному времени и координатам, положив

$$\bar{x}_1 = x_1/D_\oplus, \quad \bar{t} = \Omega_0 t, \quad \bar{x}_2 = x_2/D_\oplus\Omega_0, \quad C = C_0/\Omega_0^2 \approx 3.94.$$

Ограничив управление u_x величиной u_0, получим систему второго порядка:

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{x}_1}{d\bar{t}} = \bar{x}_2, \\
\frac{d\bar{x}_2}{d\bar{t}} = (2C + 1)\bar{x}_1 + \bar{u}_x, \\
\bar{u}_x = -2(2C + 1)\bar{x}_1 - 2(\sqrt{2C + 1})\bar{x}_2, \quad |\bar{u}_x| \le \bar{u}_0.
\end{gathered}$$

На рис. 4 показан фазовый портрет этой системы при единичных ограничениях на безразмерную величину управляющего ускорения ($\bar{u}_0 = 1$). Условно можно считать безопасными отклонения в пределах зоны линейности и катастрофическими – выходящие за пределы области притяжения, ограниченной сепаратрисами сёдел и равной удвоенной зоне линейности.

3.3. Второй вариант. Требуется обеспечить устойчивое движение КА по круговой орбите радиуса r_0 и периода τ_0 с центром на оси X в плоскости, перпендикулярной оси X.

Поскольку движение должно проходить в плоскости, перпендикулярной оси X, то необходимо гарантировать стабилизацию КА вдоль оси X, что будем считать выполненным путем выбора закона управления

$$u_x = m(-2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 - 2\Omega_0 y_2 - 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2). \tag{3.3}$$

Таким образом, задача сводится к выбору закона управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость предельного цикла радиуса r_0 и круговой частоты $\omega = 2\pi/\tau_0$. Круговую

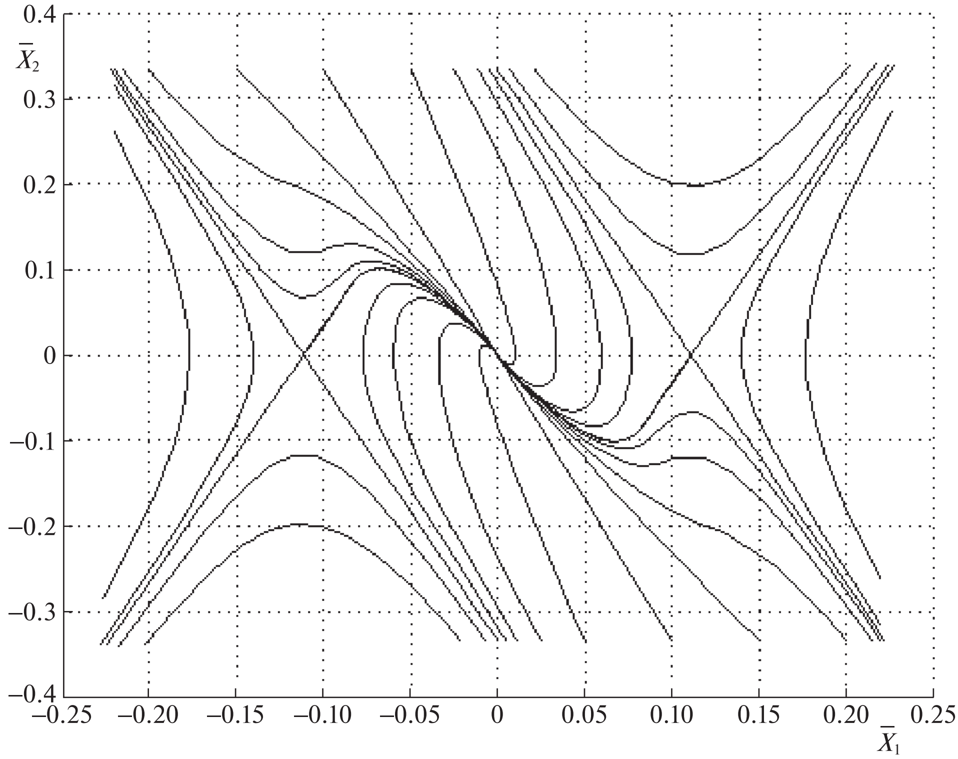

Рис. 4. Фазовый портрет системы стабилизации координаты x

орбиту радиуса r_0 в четырехмерном подпространстве с координатами y_1, y_2, z_1, z_2 можно задать в виде равенства нулю трех функций:

$$\begin{gathered} V_1(y_1, y_2, r_0, \omega) = (\omega^2 y_1^2 + y_2^2 - \omega^2 r_0^2), \\ V_2(z_1, z_2, r_0, \omega) = (\omega^2 z_1^2 + z_2^2 - \omega^2 r_0^2), \\ V_3(y_2, z_2, r_0, \omega) = (y_2^2 + z_2^2 - \omega^2 r_0^2). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что в качестве индикатора стабилизируемого предельного цикла (являющегося компактным минимальным множеством системы) можно выбрать сумму квадратов этих функций:

$$V(y_1, y_2, z_1, z_2, r_0, \omega) = V_1^2(y_1, y_2, r_0, \omega) + V_2^2(z_1, z_2, r_0, \omega) + V_3^2(y_2, z_2, r_0, \omega). \tag{3.5}$$

Производная функции $V(y_1, y_2, z_1, z_2, r_0, \omega)$, взятая вдоль траекторий движения, в соответствии с уравнениями (3.1) при законе управления (3.3) равна

$$4(V_1 + V_3)(y_1\omega^2 - (C_0 - \Omega_0^2)y_1 + u_y)y_2 + 4(V_2 + V_3)(z_1\omega^2 - C_0 z_1 + u_z)z_2. \tag{3.6}$$

Если при любом $k > 0$ положить

$$\begin{gathered} u_x = -m(2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 + 2\Omega_0 y_2 + 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2), \\ u_y = -m(\omega^2 y_1 - (C_0 - \Omega_0^2)y_1 + k(V_1 + V_3)y_2), \\ u_z = -m(\omega^2 z_1 - C_0 z_1 + k(V_2 + V_3)z_2), \end{gathered} \tag{3.7}$$

то производная (3.6) функции $V(y_1, y_2, z_1, z_2, r_0, \omega)$ будет равна $-4k(V_1^2 y_2^2 + V_2^2 z_2^2 + V_3^2(y_2^2 + z_2^2))$, что влечет выполнение условий теоремы 1 и первых трех условий теоремы 2. Возможно также использовать “релейное” управление, положив

$$\breve{u}_x = u_x/\breve{u}, \quad \breve{u}_y = u_y/\breve{u}, \quad \breve{u}_z = u_z/\breve{u}, \quad \breve{u} = \|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \tag{3.8}$$

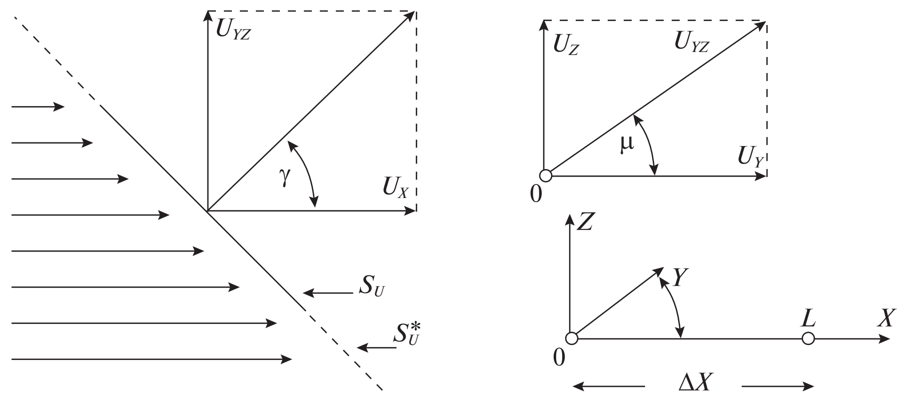

Рис. 5. Создание управляющих сил вдоль координатных осей

Таким образом, функция (3.5) при законе управления (3.7), заданном в окрестности $S(L)$, является функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям асимптотической устойчивости исследуемого предельного цикла.

3.4. Обеспечение управляющих сил и моментов. Осталось рассмотреть возможность создания необходимых для обеспечения устойчивости рассматриваемого цикла управляющих сил и моментов. Пусть S_{SB} – потребная для функционирования аппаратуры КА площадь поверхности солнечных батарей. Если считать солнечные батареи черным телом, то действующая на них сила светового давления направлена вдоль оси X. Ее величина равна $p_{\odot}S_{SB}$, где $p_{\odot}$ – удельное давление солнечного света на черное тело, $p_{\odot} \approx 0.9\times10^{-6}$, Н/м^2. Управляющие поверхности условно представим в виде набора параллельных друг другу плоских зеркальных элементов. Обозначим через S_U общую площадь всех этих элементов, а через $\mathbf{h}$ – вектор нормали к их поверхности. Будем считать, что величину S_U можно произвольно изменять в пределах от 0 до S_U^* (например, сворачивая отражающую поверхность или изменяя ее прозрачность).

Изменяя угол наклона зеркальных управляющих поверхностей по отношению к световому потоку и их ориентацию по отношению к осям Y и Z, можно получить изменение направления и величины вектора светового давления (рис. 5).

Сила светового давления на управляющую поверхность равна $2p_{\odot}S_U\cos^2\gamma = p_{\odot}S_U(1 + \cos(2\gamma))$, где γ – угол между направлением светового потока и вектором нормали к плоскости зеркальной управляющей поверхности. Сместим начало координат в сторону Солнца вдоль оси x на величину $\Delta x = p_{\odot}(S_{SB} + S_U)(2C_0 + \Omega_0^2)/m$. Желаемую круговую орбиту КА также сместим в сторону Солнца на величину Δx. Линеаризованные уравнения движения при этом останутся прежними, но значение координаты u_X вектора управления $\mathbf{u}$, изменится. Управление u_x равно проекции вектора управления на ось X: $u_x = p_{\odot}S_U\cos(2\gamma)$. Пусть U_{YZ} – проекция вектора управления на плоскость Y, Z. Очевидно, норма вектора $\mathbf{U}_{YZ}$ равна $u_{yz} = p_{\odot}S_U\sin(2\gamma)$. Если μ – угол между осью Y и вектором $\mathbf{U}_{YZ}$, то управляющие силы равны $u_y = u_{yz}\cos(\mu)$, $u_z = u_{yz}\sin(\mu)$. При этом вектор управления может принимать любые значения внутри трехмерного шара $\hat{U}$, радиус которого равен $p_{\odot}S_U^*$. Ориентация управляющих отражающих поверхностей определяется значениями углов μ, γ и площадью S_U следующими равенствами:

$$\mu = \mathrm{arctg}(u_Z/u_Y), \quad \gamma = \mathrm{arctg}(u_{YZ}/u_X), \quad S_U = (U_X + p_{\odot}S_U^*)/(2p_{\odot}\cos(2\gamma)).$$

Назовем предельной оценкой снизу нормы вектора управления величину u_*, необходимую для обеспечения невозмущенного движения КА. Траектория такого движения лежит в плоскости Y, Z, координата $x = 0$, а закон управления задается соотношением (3.7). Значение вектора управления для этого случая обозначим $\hat{\mathbf{u}}_*$. Координаты вектора $\hat{\mathbf{u}}_*$ будут равны

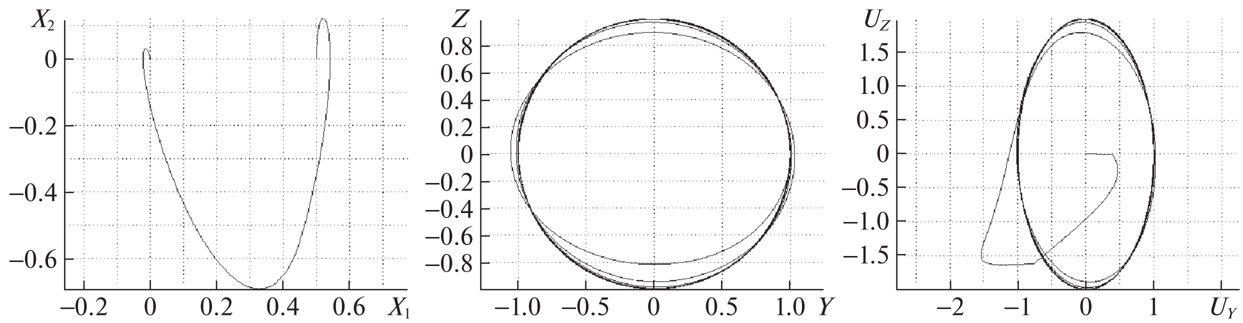

Рис. 6. Проекции траекторий движения на координатные плоскости при минимально допустимых ресурсах управления

$$\hat{u}_x = -2m\Omega_0 y_2 = -2m\Omega_0 \frac{dy}{dt}, \quad \hat{u}_y = m(C_0 - \Omega_0^2 - \omega^2)y_1, \quad \hat{u}_z - m(\omega^2 - C_0)z_1.$$

Для круговой орбиты радиуса $r_0 = D_{\oplus}$, лежащей в плоскости Y, Z, получим

$$\hat{y}(t) = r_0 \sin(\omega t), \quad \hat{z}(t) = r_0 \cos(\omega t), \quad \frac{dy}{dt} = r_0 \omega \cos(\omega t).$$

Оценим максимальное значение, которое принимает при движении по этой орбите норма вектора управления:

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = \|\hat{u}_x\|^2 + \|\hat{u}_y\|^2 + \|\hat{u}_z\|^2 =$$
$$= m^2 r_0^2 [(4\Omega_0^2\omega^2 + (C_0 - \omega^2)^2)\cos^2(\omega t) + (C_0 - \omega^2 - \Omega_0^2)^2 \sin^2(\omega t)] =$$
$$= m^2 r_0^2 [(4\Omega_0^2\omega^2 + (C_0 - \omega^2)^2) - (2C_0\Omega_0^2 + 2\Omega_0^2\omega^2 - \Omega_0^4)\sin^2(\omega t)].$$

Так как сомножитель $(-(2C_0\Omega_0^2 + 2\Omega_0^2\omega^2 - \Omega_0^4))$ отрицателен, то максимум достигается при $t = 0$:

$$\max_t \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2 = m^2 r_0^2 (4\Omega_0^2\omega^2 + (C_0 - \omega^2)^2).$$

В свою очередь для минимума этого выражения по ω получим два экстремальных значения круговой частоты. Одно из них – тривиальное нулевое (локальный максимум), а другое – $\widehat{\omega} = \sqrt{C_0 - 2\Omega_0^2}$ (искомый минимум). Для работоспособности системы необходимо обеспечить величину нормы располагаемых значений управления U^* выше предельной оценки $\hat{u}_* = 2mr_0\Omega_0\sqrt{(4\Omega_0^2\widehat{\omega}^2 + (C_0 - \widehat{\omega}^2)^2)}$. Отношение $u^*/\hat{u}_*$ будет при этом играть роль своеобразного запаса ресурса управления. Для зеркальной отражающей управляющей поверхности ее минимальная площадь может быть оценена величиной

$$S_* = \frac{\hat{u}_*}{2p_{\odot}} = \left(\frac{mr_0}{p_{\odot}}\right)\Omega_0\sqrt{(4\Omega_0^2\widehat{\omega}^2 + (C_0 - \widehat{\omega}^2)^2)}.$$

Сомножитель $\Omega_0\sqrt{(4\Omega_0^2\widehat{\omega}^2 + (C_0 - \widehat{\omega}^2)^2)}$, равен $\approx 7.76 \times 10^{-14}$, 1/с^2. Для грубой оценки можно считать, что на 1 кг массы потребная площадь управляющих поверхностей лежит в пределах от 0.6 до 1 м^2 в зависимости от реального значения их коэффициента отражения.

З а м е ч а н и е 3. Специфика рассматриваемого примера заключается в том, что для работоспособности системы проекция предельного цикла на плоскость Y, Z должна быть окружностью. Параметры закона управления при установившемся движении не должны выходить на ограничения. Такое требование вызвано принципиальной необходимостью компенсации кориолисовых сил, которая требует практически всех запасов управления.

На рисунках 6 и 7 для закона управления (3.7) показаны проекции траекторий вектора состояний на плоскость $X_1, X_2 (x_1 = x, x_2 = dx/dt)$, на плоскость Y, Z и проекция вектора управления на плоскость U_Y, U_Z. Использовалась стандартная безразмерная форма записи дифференциальных

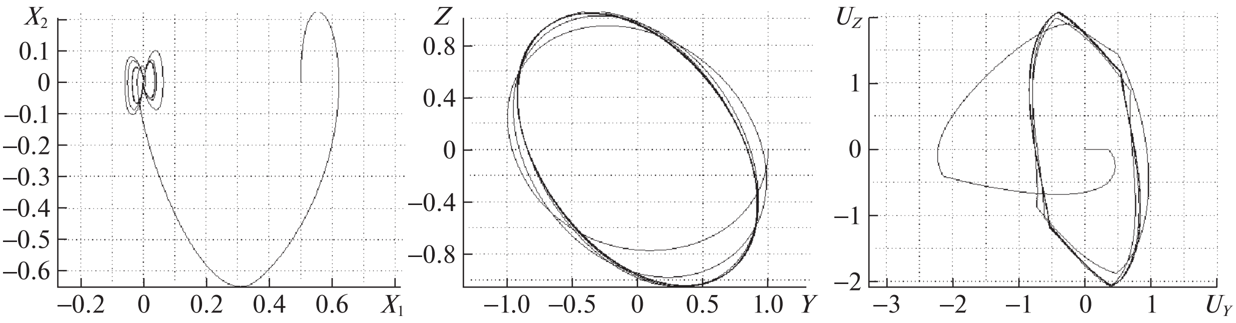

Рис. 7. Проекции траекторий движения на координатные плоскости при дефиците ресурсов управления

уравнений движения. Масштаб времени выбран так, что период обращения Земли вокруг Солнца (безразмерный год) равен 2π. При этом безразмерное значение Ω угловой скорости вращения Земли вокруг Солнца равно 1. За единицу длины выбран диаметр Земли. Безразмерное значение C константы C_0 принято равным $C = 3.94$.

Оптимальное значение угловой скорости вращения КА вокруг точки Лагранжа будет равно $\overline{\omega} = \sqrt{C - 2\Omega^2} \approx 1.393$. Сомножитель $\Omega_0\sqrt{(4\Omega_0^2\widehat{\omega}^2 + (C_0 - \widehat{\omega}^2))}$, равен 2.786 для безразмерной формы ($\Omega_0 = 1$).

Для представления о возможных отклонениях КА от номинальной траектории на рис. 6 показаны проекции траекторий вектора состояний при предельно допустимых значениях ресурсов управления. Величины начальных условий по координатам выбраны соответствующими невозмущенному движению по круговой орбите, лежащей в плоскости Y, Z.

Как видно из рис. 6, после компенсации близких к предельно допустимым значениям координаты x отклонений (левый график), траектория установившегося движения совпадает с окружностью (средний график). Влияние 10% дефицита ресурсов управления показано на рис. 7.

Невозможность полностью компенсировать кориолисовы ускорения приводит к тому, что в установившемся режиме координата $x \neq 0$ (левый график) и поэтому проекция установившегося движения на плоскость Y, Z не является окружностью (средний график). На правом графике рис. 7 видно, что управляющие воздействия периодически выходят на ограничения.

З а м е ч а н и е 4. При решении задачи управляющие воздействия считались безынерционными. Для проверки допустимости такого условия в уравнения движения были включены уравнения привода управляющих поверхностей. Они были записаны в виде $T(du/dt) + u = v$. Безразмерная постоянная времени T была задана равной 0.0014, что соответствует $\approx$12 ч реального времени. Выяснилось, что на графиках практически невозможно отличить траектории такой системы от графиков траекторий системы с безынерционным приводом. Поскольку полутора земных суток, по-видимому, вполне достаточно для разворота управляющих панелей на любой угол, то вполне допустимо при начальных исследованиях считать привод безынерционным.

Заключение. Можно утверждать, что если замыкание траектории установившегося движения является компактным минимальным множеством, т.е. инвариантно, ограниченно и не содержит замкнутых инвариантных подмножеств, то применение прямого метода Ляпунова для построения законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость установившихся движений, может оказаться достаточно эффективным. Дифференцируемые вдоль траекторий движения системы индикаторы минимальных множеств в первую очередь являются претендентами на используемую для построения такого закона функцию Ляпунова.

Приведенный пример применения прямого метода Ляпунова, хотя и не может претендовать на серьёзную практическую значимость, тем не менее, показывает, что постановка задачи использования светового давления для обеспечения длительного функционирования КА в окрестности второй точки Лагранжа, по крайней мере, не бессмысленна. Для КА малой массы (порядка сотен килограмм) управляющие поверхности по площади примерно соответствуют площади солнечных батарей, а следовательно, конструктивно могут быть выполнены в каркасном исполнении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
3. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.
4. *Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.* и др. Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических космических аппаратов к телам солнечной системы / Под ред. А.Г. Тучина. М.: АО НПО Лавочкина, 2018.
5. *Степаньянц Г.А.* Теория динамических систем. М.: URSS, Либроком, 2010.
6. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
7. *Forres A., Jorba A.* Station Keeping Close Unstable Equilibrium Points wits a Solar Sail. URL. http: www.maia.ub.es/dsg/2007/0710 farres.pdf.
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ГТТИ, 1947.
9. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1941.
10. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГТТИ, 1949.
11. *Novikov D., Nazirov R., Eismont N.* Spacecraft Formation Control in Vicinity of Libration Points Using Solar Sails. Small Satellites for Earth Observation // Selected Proc. 5th Intern. Sympos. of the Interntional Academy of Astronautics / Eds. R. Sandau, A. Valenzuela. Berlin, N. Y.: Walter de Gruyter, 2005.
12. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Мат. сб., 1960. Т. 51. № 1.