ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 4, с. 125–136

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.78

АНАЛИТИЧЕСКИЙ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА[1]

© 2023 г. А. В. Молоденков[a,*], Я. Г. Сапунков[a]

[a] *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: molalexei@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.10.2022 г.
После доработки 12.01.2023 г.
Принята к публикации 06.02.2023 г.

Исследуется задача оптимального программного управления угловым движением космического аппарата как твердого тела с квадратичным функционалом энергии, затраченной на маневр космического аппарата, и фиксированным временем переходного процесса. Динамическая конфигурация космического аппарата и граничные условия произвольны, вектор-функция управления не ограничена. В рамках концепции Пуансо с использованием принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи, которое доведено до алгоритма. Приводятся подтверждающие численные примеры, показывающие близость квазиоптимального решения к оптимальному решению задачи.

DOI: 10.31857/S0002338823030101, **EDN:** EUUEGE

Введение. По проблеме программного управления пространственным угловым движением космического аппарата (КА) опубликовано большое количество работ (например, [1–4] и обширные ссылки на литературу в них; [5, 6]), но аналитическая нерешенность задачи в общем виде оставляет актуальной эту тематику исследований. При произвольных краевых условиях точное решение не известно даже в случае сферически-симметричного КА, поэтому в общем случае применяют только приближенные решения задачи. Явное решение задачи оптимального управления угловым движением КА имело бы не только теоретическую, но и большую прикладную значимость, так как позволило бы использовать в системе управления заранее полученные выражения для управления и траектории КА. Это касается, например, КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности.

В статье исследуется классическая задача оптимального управления угловым движением КА как твердого тела с квадратичным функционалом энергии, затраченной на маневр КА, и фиксированным временем переходного процесса. Динамическая конфигурация КА и граничные условия произвольны, вектор-функция управления не ограничена. С использованием кватернионов и принципа максимума Понтрягина получены формулы краевой задача оптимизации. Кратко описано численное решение этой краевой задачи [7] на основе алгоритма Левенберга–Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Основываясь на проведенных численных экспериментах для различных параметров задачи, сделан вывод о не существенной зависимости кинематических характеристик оптимальной переориентации КА от его динамических параметров. Это обеспечивает близость решений классической задачи и ниже описываемой модифицированной задачи оптимального управления угловым движением КА при его произвольной динамической конфигурации.

Получено явное решение модифицированной задачи оптимального по энергии управления угловым движением КА с произвольными краевыми условиями по угловой скорости и ориентации КА, доведенное до алгоритма. В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением КА, а его траектория задана в этом классе движений. При этом общ-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00218) и в рамках темы FFNM-2022-0007.

ность исходной задачи практически не нарушается: известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного КА в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают. В других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач относительная погрешность между значениями функционала оптимизации составляет не более нескольких процентов, включая угловые маневры КА на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче оптимального углового движения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула вектора управляющего момента КА.

Предлагаемый в статье метод решения задачи ранее был успешно применен к задаче оптимальной по быстродействию переориентации КА произвольной динамической конфигурации с ограниченным по модулю вектором управления [8] и задаче поворота осесимметричного КА без ограничений с комбинированным функционалом и не фиксированным временем переходного процесса [9].

Отметим, что в литературе известны некоторые квазиоптимальные решения задачи поворота КА с использованием обратной задачи динамики твердого тела, например [10, 11]. В [10] решение получено с помощью принципа оптимальности Р. Беллмана на основе задачи оптимальной переориентации КА в кинематической постановке, где функцией управления является вектор угловой скорости КА. Направление вектора угловой скорости КА при этом определяется начальным и конечным значениями кватерниона ориентации КА. В [11] решение задачи получено посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких гарантий (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА, при любых граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА эти решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

1. Постановка классической задачи. Угловое движение КА как произвольного твердого тела в связанной с КА системе координат описывается кватернионным кинематическим уравнением и динамическими уравнениями Эйлера [2]:

$$2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}], \tag{1.2}$$

где $\mathbf{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ — нормированный кватернион, описывающий угловое положение КА, $\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор его угловой скорости, $\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор внешнего управляющего момента, приложенного к КА, мнимые единицы Гамильтона i_1, i_2, i_3 соответствуют ортам трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, символ "$\circ$" означает умножение кватернионов, "[. , .]" — векторное произведение; матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

— тензор инерции, где I_1, I_2, I_3— главные моменты инерции КА. Соответственно, фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$ положены непрерывными функциями, а управление $\mathbf{M}$ — кусочно-непрерывной функцией [12].

Граничные условия по угловому положению и угловой скорости КА произвольны и заданы:

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T. \tag{1.4}$$

Ставится задача найти оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$, доставляющее минимум квадратичному критерию энергозатрат с фиксированным временем T:

$$J = \int_0^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}dt. \tag{1.5}$$

2. Переход к безразмерным переменным. Так как основная переменная задачи кватернион $\mathbf{\Lambda}$ является безразмерной величиной, с использованием формул

$$I^{\text{масш}} = \left(\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2\right)\Big/3\right)^{1/2}, \quad I_k^{\text{безраз}} = I_k\Big/I^{\text{масш}}, \quad k = 1, 2, 3;$$
$$\boldsymbol{\omega}^{\text{безраз}} = T\boldsymbol{\omega}, \quad t^{\text{безраз}} = T^{-1}t, \quad \mathbf{M}^{\text{безраз}} = T^2\mathbf{M}/I^{\text{масш}}, \quad J^{\text{безраз}} = T^3J/I^{\text{масш}2}$$

переформулируем задачу в безразмерных переменных, при этом все выражения постановки задачи кроме функционала оптимизации

$$J = \int_0^1 \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}dt \tag{2.1}$$

не изменятся. Далее рассмотрим безразмерную постановку задачи (1.1)–(1.4), (2.1) при $T = 1$.

3. Применение принципа максимума. Применяя принцип максимума Понтрягина [2, 12], введем сопряженные переменные $\mathbf{\Psi}(t)$ (кватернион), $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (вектор) к фазовым переменным $\mathbf{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ соответственно. Функция Гамильтона–Понтрягина

$$H = -\psi^*(\mathbf{M},\mathbf{M}) + (\mathbf{\Psi},\mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega})/2 + (\boldsymbol{\varphi},\mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega},\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]), \tag{3.1}$$

где константа $\psi^* \geq 0$, а “(. , .)” – скалярное произведение векторов.

Рассматривая невырожденные решения краевой задачи принципа максимума при условии $\psi^* > 0$ и в силу однородности функции Гамильтона–Понтрягина H [12], в формуле (3.1) положим $\psi^* = 1$.

Уравнения для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi}\circ\boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{vect}\left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}\circ\mathbf{\Psi}\right)\Big/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi},\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\omega}], \end{cases} \tag{3.2}$$

где “$\mathbf{vect}(.)$”– векторная часть кватерниона, а символ “$\sim$” означает сопряжение кватерниона.

Кватернионные уравнения для переменных $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Lambda}$ совпадают, следовательно, их решения различаются на постоянный кватернион $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}\circ\mathbf{\Lambda}. \tag{3.3}$$

В силу этого и учитывая обозначение [2]

$$\mathbf{p} = \mathbf{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}\circ\mathbf{\Psi}) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\circ\mathbf{c}_v\circ\mathbf{\Lambda}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{c}_v$ – векторная часть кватерниона $\mathbf{C}$, выражения (3.2) примут вид

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\circ\mathbf{c}_v\circ\mathbf{\Lambda}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}\big/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi},\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\omega}]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Таким образом, в силу самосопряженности линейной дифференциальной системы уравнений (1.1), размерность краевой задачи принципа максимума понижается на четыре [2]. Из условия максимума (3.1) получим непрерывную структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}/2. \tag{3.6}$$

С учетом переменной $\mathbf{p}$ (3.4) функция Гамильтона–Понтрягина (3.1) запишется так:

$$H = -(\mathbf{M},\mathbf{M}) + (\mathbf{p},\boldsymbol{\omega})/2 + (\boldsymbol{\varphi},\mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega},\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]). \tag{3.7}$$

4. Наводящие соображения. Описываются примеры численного решения задачи оптимального управления угловым движением различных по своей динамической конфигурации КА (твердых тел) и приводятся выводы, следующие из этих примеров.

Рассматривается численное решение краевой задачи, полученной на основании принципа максимума для исходной задачи (1.1)–(1.4), (2.1):

$$\begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}\left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\right], \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}/2 - \left[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\right] + \mathbf{I}\left[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}\right], \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{c}_v = \mathbf{const}, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}/2, \tag{4.4}$$

откуда необходимо найти $\mathbf{M}^{\text{опт}}$, $\mathbf{\Lambda}^{\text{опт}}$, $\boldsymbol{\omega}^{\text{опт}}$, $\mathbf{c}_v$.

Условия в конечный момент времени (4.3) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве $\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{vect}\left(\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T\right) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T. \tag{4.5}$$

При решении краевой задачи (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) применялся итерационный численный метод на основе алгоритма Левенберга–Марквардта, являющегося комбинацией методов Рунге–Кутты, Ньютона и градиентного спуска [7]. Следует отметить, что в работе [13] осуществлялась попытка выполнить условие $\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T$, что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве начальных условий по сопряженным переменным $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{p}$ брались их значения, полученные в точном решении применительно к сферически-симметричному КА в классе плоских эйлеровых поворотов [2].

Для твердых тел (КА) с различным распределением масс сравним кинематические характеристики оптимального движения в задачах оптимального разворота с одними и теми же граничными условиями, например:

$$\mathbf{\Lambda}_0 = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0.2739, -0.2388, -0.3), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{\Lambda}_T = (0.8443, 0.3984, -0.3260, 0.1485), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, -0.59). \tag{4.7}$$

Т е л о 1. Сферически симметричное твердое тело $I_1 = I_2 = I_3 = 1.0$.

Т е л о 2. Произвольное тело $I_1 = 0.9869$, $I_2 = 1.1843$, $I_3 = 0.7895$.

Т е л о 3. Произвольное тело $I_1 = 0.9506$, $I_2 = 1.3308$, $I_3 = 0.5704$.

Т е л о 4. Международная космическая станция (МКС) (ранняя версия [14]) как произвольное твердое тело $I_1 = 4853000$ кг $\cdot$ м^2, $I_2 = 23601000$ кг $\cdot$ м^2, $I_3 = 26278000$ кг $\cdot$ м^2 (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.2358$, $I_2 = 1.1466$, $I_3 = 1.2766$ (безразмерные величины).

Т е л о 5. “Спейс Шаттл” (динамические характеристики КА “Спейс Шаттл” такие же, как у почти осесимметричного твердого тела): $I_1 = 3400648$ кг $\cdot$ м^2, $I_2 = 21041672$ кг $\cdot$ м^2 или $I_1 = 0.1967$, $I_2 = 1.2168$; $I_3 \approx I_2$.

Т е л о 6. Произвольное тело $I_1 = 0.9116$, $I_2 = 1.3674$, $I_3 = 0.5470$.

В табл. 1 представлены кинематические характеристики (компоненты кватерниона положения КА и вектора угловой скорости) для пяти из вышеуказанных тел при $t = 0.5$ (в середине промежутка времени оптимального движения) при решении задачи оптимального управления с граничными условиями (4.6), (4.7) в классической постановке. В последней строке табл. 1 для сравнения приводятся данные, полученные при решении модифицированной задачи оптимального управления, о которой пойдет речь в разд. 6, 7 статьи.

Таблица 1. Величины кватерниона ориентации и вектора угловой скорости

Тело	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.8096	0.3625	–0.3768	0.2668	–0.0502	–0.0114	–0.4937
2	0.8095	0.3628	–0.3766	0.2670	–0.0499	–0.0115	–0.4941
3	0.8093	0.3631	–0.3765	0.2674	–0.0496	–0.0116	–0.4949
4	0.8077	0.3654	–0.3773	0.2678	–0.0506	–0.0159	–0.4949
5	0.8086	0.3634	–0.3780	0.2668	–0.0519	–0.0137	–0.4948
Модифицированная задача	0.8099	0.3627	–0.3756	0.2673	–0.0488	–0.0098	–0.4938

Таблица 2. Величины углового ускорения

Тело	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
1	–0.9854	0.7259	–0.4892	–0.2917	0.2087	–0.2878	0.5077	–0.1272	–0.0985
2	–0.9649	0.7262	–0.4736	–0.3051	0.2053	–0.2902	0.5357	–0.1154	–0.0965
3	–0.9399	0.7235	–0.4449	–0.3207	0.2039	–0.2942	0.5681	–0.1076	–0.0940
4	–0.9262	0.6536	–0.4422	–0.3182	0.2586	–0.2978	0.5591	–0.2446	–0.0886
5	–0.7914	0.6537	–0.4345	–0.3968	0.2549	–0.3002	0.7341	–0.2381	–0.0875
Модифицированная задача	–0.9647	0.7634	–0.4932	–0.3103	0.1687	–0.2847	0.5350	–0.0220	0.1024

Таблица 3. Кватернион ориентации и вектор угловой скорости

Тело	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.78995	0.41434	–0.35808	0.28583	0.32168	–0.01522	–0.52451
6	0.78999	0.41442	–0.35860	0.27492	0.32414	–0.01453	–0.52402
4	0.79080	0.41371	–0.35618	0.27679	0.31768	–0.01578	–0.52304
5	0.79103	0.41317	–0.35664	0.27635	0.31932	–0.01491	–0.52314

Таблица 4. Угловое ускорение

Тело	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
1	0.26547	0.38677	–1.00250	–0.06733	0.52385	0.10458	–0.43888	0.74958	1.18404
6	0.19271	0.34271	–1.05149	–0.05270	0.54857	0.12304	–0.41047	0.70409	1.16712
4	0.36496	0.53821	–1.00244	–0.07017	0.44837	0.10585	–0.54722	0.88317	1.18497
5	0.28551	0.51819	–1.00680	–0.04259	0.45769	0.10771	–0.55803	0.86381	1.18517

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 2 рассмотрены компоненты векторов углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \varepsilon_1(t)\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2(t)\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3(t)\mathbf{i}_3 = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ для начала, середины и конца процесса оптимального управления ($t = 0$, $t = 0.5$, $t = T = 1$).

Также опишем кинематические характеристики оптимального движения различных тел для случая, когда начальное состояние тела определяется соотношением (4.6), а конечное состояние соотношением

$$\boldsymbol{\Lambda}_T = (0.79368,\ 0.49375,\ -0.26823,\ 0.23309), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0.2,\ 0.3,\ -0.2). \tag{4.8}$$

В табл. 3 для тел 1, 4–6 представлены компоненты кватерниона положения и вектора угловой скорости при $t = 0.5$.

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 4 приводятся компоненты векторов углового ускорения при $t = 0$, $t = 0.5$, $t = T = 1$.

Аналогичные расчеты проводились и для других начальных и конечных состояний тел. Из табл. 1—4 и других вычислений с граничными условиями видно, что кинематические характеристики оптимального движения тел существенно зависят от начального и конечного состояния тел и слабо зависят от распределения масс в теле. Отсюда следует, что, используя кинематические характеристики тела со сферической симметрией, из динамических уравнений Эйлера с учетом моментов инерции произвольных тел можно вычислить управляющие моменты для движения произвольных тел. Такие моменты можно рассматривать как квазиоптимальные управляющие моменты для перевода твердых тел из начального состояния в конечное состояние. Выражения для кватерниона ориентации и угловой скорости можно построить аналитически в явном виде на основе решения модифицированной задачи оптимальной переориентации, а управляющий момент определить исходя из решения обратной задачи динамики. Опишем этот подход.

5. Модифицированная задача оптимального управления. Точное решение задачи нахождения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости, или иначе задачи Дарбу (1.1), в общем случае не известно. Поэтому рассмотрим решение задачи в классе обобщенных конических движений и принудительно зададим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ формулой

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1\dot{f}(t)\sin g(t) + \mathbf{i}_2\dot{f}(t)\cos g(t) + \mathbf{i}_3\dot{g}(t), \tag{5.1}$$

где функции $f(t)$ и $g(t)$ произвольны. В этом случае уравнение (1.1) имеет точное решение [15], удовлетворяющее начальному условию (1.3):

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}, \tag{5.2}$$

где “$\mathbf{exp}\{.\}$”— кватернионная экспонента [2].

Выражения (5.1), (5.2) соответствуют всем известным точным решениям классической задачи оптимального управления угловым движением сферически-симметричного КА, когда вектор его угловой скорости сохраняет постоянное направление на всем интервале времени движения КА или совершает регулярную прецессию [1—3, 16]. При этом с помощью взаимно-однозначных замен переменных [15] задачу Дарбу в общем случае можно свести к решению уравнения типа (1.1), где угловая скорость примет вид

$$\boldsymbol{\omega}^*(t) = -\boldsymbol{\omega}(t),$$

и будет отличаться от (5.1) только знаком (однако задача Дарбу (1.1) по-прежнему не разрешима). Другими словами, структура вектора угловой скорости (5.1) хорошо соотносится с концепцией Пуансо из теоретической механики, заключающейся в том, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение [17].

Формулы (5.1), (5.2) можно обобщить, введя в них постоянный кватернион $\mathbf{K}$, $\|\mathbf{K}\| = 1$:

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left(\mathbf{i}_1\dot{f}(t)\sin g(t) + \mathbf{i}_2\dot{f}(t)\cos g(t) + \mathbf{i}_3\dot{g}(t)\right) \circ \mathbf{K}, \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2(f(t) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \tag{5.4}$$

Положим вторые производные от функций f и g в качестве управлений. С учетом обозначений

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1 \tag{5.5}$$

можно составить управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2, \tag{5.6}$$

где f, f_1, g, g_1 являются фазовыми координатами, u_1, u_2 — управлениями. Кватернион $\mathbf{K}$ представим произведением

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}, \tag{5.7}$$

где α_1, α_2 – некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (5.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1$, Поворот вокруг оси $\mathbf{i}_3$ уже включен в формулу (5.3), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}. \tag{5.8}$$

Удовлетворение краевым условиям (1.3), (1.4), (4.5) функций $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ (5.3), (5.4) с учетом (5.7), (5.8) запишется так:

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0)\sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0)\cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0, \tag{5.9}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T)\sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T)\cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T, \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T. \tag{5.11}$$

Для управляемой системы (5.6) поставим следующую задачу оптимизации. Требуется найти оптимальные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, которые переводят управляемую систему (5.6) из положения

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \tag{5.12}$$

в положение

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \tag{5.13}$$

удовлетворяющие соотношениям (5.9)–(5.11), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)dt. \tag{5.14}$$

Выражения (5.9)–(5.11) перепишем так:

$$\mathbf{i}_1 f_1(0)\sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0)\cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{i}_1 f_1(T)\sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T)\cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \tag{5.16}$$

$$\mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2. \tag{5.17}$$

Такую задачу оптимизации будем называть модифицированной задачей оптимального управления угловым движением КА, точное решение которой допустимо рассматривать как приближенное или квазиоптимальное решение исходной задачи (1.1)–(1.4), (2.1). Из уравнения (1.2) на основе обратной задачи динамики твердого тела определяется управляющий момент КА, соответствующий решению модифицированной задачи:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]. \tag{5.18}$$

6. Точное решение модифицированной задачи. Функция Гамильтона–Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления

$$H = -\left(u_1^2 + u_2^2\right) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2. \tag{6.1}$$

Здесь ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2, \tag{6.2}$$

общее решение которой содержит произвольные константы $c_1, \ldots, c_4$:

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4. \tag{6.3}$$

Условие максимума для (6.1) дает оптимальные управления

$$u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в (5.6), получаем выражения для фазовых координат, содержащие восемь неопределенных констант $c_1, \ldots, c_8$:

$$f = -c_1t^3/12 + c_3t^2/4 + c_5t + c_6, \quad g = -c_2t^3/12 + c_4t^2/4 + c_7t + c_8,$$
$$f_1 = -c_1t^2/4 + c_3t/2 + c_5, \quad g_1 = -c_2t^2/4 + c_4t/2 + c_7. \tag{6.5}$$

В силу того, что в выражение для функции f константа c_6 входит аддитивно, из (5.4) видно, что она не оказывает влияния, и поэтому c_6 можно не учитывать. Тогда для поиска девяти неизвестных $c_1, \ldots, c_5, c_7, c_8$, α_1, α_2 имеется девять уравнений (5.15)–(5.17) (из-за наличия условия $\|\boldsymbol{\Lambda}\| = 1$ в кватернионном уравнении (5.17) независимыми являются только три скалярных уравнения). Подставляя формулы (6.5) в (5.3), (5.4), получим выражения для вектора угловой скорости и кватерниона ориентации КА. Эти выражения определят оптимальный в смысле минимума функционала (5.14) угловой маневр КА, построенный в классе обобщенных конических движений. Внешний управляющий момент, приложенный к КА, на основе (5.3), (5.18)

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I}\big(\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \\ + \mathbf{i}_2(u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}\big) + \\ + \big[\tilde{\mathbf{K}} \circ \big(\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1\big) \circ \mathbf{K}, \mathbf{I}\big(\tilde{\mathbf{K}} \circ \big(\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1\big) \circ \mathbf{K})\big].\end{aligned} \tag{6.6}$$

Отметим, что для сферически-симметричного КА скалярный квадрат вектора управляющего момента выражается через переменные модифицированной задачи так:

$$\mathbf{M}^2 = u_1^2 + u_2^2 + f_1^2 g_1^2. \tag{6.7}$$

В случае плоского поворота сферически-симметричного КА [2], когда $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_T$ (1.4) коллинеарны $\operatorname{vect}\big(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T\big)$, решения классической и модифицированной задач тождественно равны. Это справедливо и для случаев решения задач углового движения сферически-симметричного КА в классе регулярных конических движений (регулярной прецессии) [12]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (6.7) обращается в нуль и критерий (5.14) соответствует критерию (1.5) (2.1) классической задачи. В задаче углового движения сферически-симметричного КА при произвольных граничных условиях, полагая, что $\int_0^1 f_1^2 g_1^2 dt$ мало по сравнению с $\int_0^1 \mathbf{M}^2 dt$, в (6.7) можно опустить последнее слагаемое. Тогда модифицированная задача оптимального управления в переменных f, g, f_1, g_1, u_1, u_2 с функционалом (5.14) и выражениями (5.3), (5.4), (5.15)–(5.17), (6.5), (6.6) будет соответствовать классической задаче оптимального поворота сферически-симметричного тела в классе обобщенных конических движений. На основании рассуждений разд. 5 статьи, модифицированная задача может рассматриваться в качестве квазиоптимальной задачи управления угловым движением произвольного КА при произвольных краевых условиях.

Квазиоптимальный алгоритм углового движения КА произвольной динамической конфигурации при произвольных краевых условиях имеет следующий вид:

1) по заданным величинам $\boldsymbol{\Lambda}_0, \boldsymbol{\Lambda}_T, \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$ (1.3), (1.4) и $T = 1$ из (5.7), (5.8), (5.15)–(5.17) вычисляются девять неопределенных констант $c_1, \ldots, c_5, c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$ и выражаются функции f, f_1, g, g_1;

2) используя (5.7), рассчитываем кватернион $\mathbf{K}$;

3) определяем вектор угловой скорости КА

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ \big(\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)\big) \circ \mathbf{K};$$

4) находим кватернион ориентации КА

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\big\{\mathbf{i}_2(f(t) - f(0))/2\big\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K};$$

5) с использованием (6.6) определяем вектор управляющего момента $\mathbf{M}$;

6) из выражений (2.1), (6.6) находится значение безразмерного критерия оптимизации задачи оптимальной переориентации КА.

Таблица 5. Управляющий момент для тела 3

t	$M_1^{классич}$	$M_2^{классич}$	$M_2^{классич}$	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.9480	0.9316	−0.2786	−0.9715	0.9847	−0.3062
0.5	−0.3093	0.2807	−0.1676	−0.2987	0.2337	−0.1622
$T = 1$	0.5401	−0.1432	−0.0536	0.5085	−0.0293	−0.0584

Таблица 6. Управляющий момент для тела 4

t	$M_1^{классич}$	$M_2^{классич}$	$M_2^{классич}$	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.2091	0.8349	−0.6241	−0.2181	0.9608	−0.6893
0.5	−0.0741	0.2697	−0.3795	−0.0725	0.1683	−0.3630
$T = 1$	0.1318	−0.2804	−0.1131	0.1261	−0.0253	−0.1307

Таблица 7. Управляющий момент для тела 5

t	$M_1^{классич}$	$M_2^{классич}$	$M_2^{классич}$	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.1556	0.8793	−0.5955	−0.1897	1.0127	−0.6669
0.5	−0.0780	0.2846	−0.3644	−0.0610	0.1807	−0.3459
$T = 1$	0.1444	−0.2897	−0.1065	0.1052	−0.2682	−0.1246

Таблица 8. Функционалы классической и модифицированной задач

Класс тела	Тело 1	Тело 2	Тело 3	Тело 4	Тело 5
$J^{классич}$	0.4782	0.4920	0.4947	0.35522	0.35797
$J^{модиф}$	0.4797	0.4935	0.4966	0.36404	0.36775

7. Числовые примеры. Рассматриваются сравнительные результаты численных решений классической и модифицированной задач оптимальной переориентации КА (твердого тела). Для модифицированной задачи выполнялись расчеты по аналитическому алгоритму разд. 6 статьи. Значения констант α_1, α_2, $c_1, \ldots, c_6$, c_8, входящих в аналитическое решение модифицированной задачи, для углового движения с краевыми условиями (4.6), (4.7) таковы:

$$\alpha_1 = -0.0421, \quad \alpha_2 = -0.2226, \quad c_1 = 3.2902, \quad c_2 = -1.4885, \quad c_3 = 2.2113,$$

$$c_4 = -1.45, \quad c_5 = -0.4156, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -0.2221, \quad c_8 = -0.9216.$$

Результаты решений двух задач оказались близки. В табл. 5–7 приводятся значения вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения в этих решениях для тел типа 3–5.

В табл. 8 рассмотрены значения функционала (2.1) для тел 1–5, полученные в результате решения классической и модифицированной задач с краевыми условиями (4.6), (4.7).

Как видно, по мере возрастания различия между моментами инерции тел I_1, I_2, I_3 возрастает разница между управляющими моментами, полученными при решении двух задач. Также оказывает влияние характер изменения величин I_1, I_2, I_3 между собой. При этом расхождение значений критерия качества (2.1) в классической и модифицированной задачах допустимо. Отметим, что величина критерия качества является важнейшим показателем в задачах оптимизации.

Также проводились численные решения задачи оптимального управления угловым движением для случаев, когда начальное состояние твердого тела (КА) определялось соотношениями (4.6). Конечное положение тела задавалось поворотом тела из начального положения на некоторый угол вокруг эйлеровой оси, единичный вектор которой определялся координатами:

$$(0.04500, -0.07519, -0.99615). \tag{7.1}$$

Таблица 9. Формирование кватернионов конечной ориентации КА

φ	$\lambda_0(T)$	$\lambda_1(T)$	$\lambda_2(T)$	$\lambda_3(T)$
30.0	0.84643	0.40650	–0.31853	0.12982
60.0	0.84013	0.48716	–0.21783	–0.09703
90.0	0.77657	0.53461	–0.10229	–0.31727
120.0	0.66009	0.54564	0.02023	–0.51589
150.0	0.49863	0.51948	0.14136	–0.67935
180.0	0.30318	0.45792	0.25286	–0.79652

Таблица 10. Величины функционалов и их расхождения

Тело	Функционалы и расхождения их величин	$\varphi = 30.0°$	$\varphi = 60.0°$	$\varphi = 90.0°$	$\varphi = 150.0°$	$\varphi = 180.0°$
1	$J^{\text{классич}}$	0.52385	4.63277	15.31437	56.39081	86.78094
	$J^{\text{модиф}}$	0.52510	4.63724	15.32882	56.52086	87.51533
	ΔJ	0.00125	0.00447	0.01445	0.13005	0.73439
	%	0.24	0.10	0.09	0.23	0.85
6	$J^{\text{классич}}$	0.48938	1.68431	4.99284	17.73522	27.05714
	$J^{\text{модиф}}$	0.49142	1.69229	5.08024	18.48275	28.29371
	ΔJ	0.00204	0.00798	0.08740	0.74753	1.23657
	%	0.40	0.48	1.75	4.20	4.56
4	$J^{\text{классич}}$	0.44007	7.25434	24.73075	88.98745	132.97487
	$J^{\text{модиф}}$	0.44918	7.26926	24.80963	92.18788	142.39358
	ΔJ	0.00911	0.01492	0.07888	3.30042	9.41871
	%	2.07	0.21	0.32	3.71	7.08
5	$J^{\text{классич}}$	0.44007	7.25434	24.73075	83.69665	128.85478
	$J^{\text{модиф}}$	0.44918	7.26926	24.80963	83.93641	129.60500
	ΔJ	0.00911	0.01492	0.07888	0.23976	0.75022
	%	2.09	0.21	0.32	0.29	0.56

В табл. 9 приводятся компоненты кватернионов конечного положения твердого тела (КА) для поворотов на различные величины эйлерова угла φ в градусах вокруг вектора (7.1).

В табл. 10 представлены значения функционалов классической и модифицированной задач, определяющих качество процесса перевода тел 1, 4–6 из начального состояния (4.6) в конечные состояния $\boldsymbol{\Lambda}_T$ по табл. 9 и при $\boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, -0.59)$, с указанием разности между значениями этих функционалов $\Delta J = J^{\text{модиф}} - J^{\text{классич}}$ и процентного расхождения $\left(\Delta J / J^{\text{классич}}\right) \times 100\%$.

В табл. 11 приводятся подобные показатели, когда конечная угловая скорость твердых тел определяется вектором

$$\boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, 0.0),$$

т.е. в этом случае твердое тело (КА) переводится в состояние покоя.

Из численных экспериментов для различных параметров задачи управления угловым движением КА следует, что кватернион ориентации КА $\boldsymbol{\Lambda}$ и его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не существенно зависят от величин I_1, I_2, I_3 и в большей степени зависят от краевых условий, а управляющий

Таблица 11. Величины функционалов и их расхождения

Тело	Функционалы и расхождения их величин	$\varphi = 90.0°$	$\varphi = 120.0°$	$\varphi = 150.0°$	$\varphi = 180.0°$
1	$J^{\text{классич}}$	24.25074	45.17597	72.66431	106.71186
	$J^{\text{модиф}}$	24.28745	45.19513	72.77169	107.40843
	ΔJ	0.03672	0.01916	0.10738	0.69657
	%	0.15	0.04	0.15	0.65
6	$J^{\text{классич}}$	7.67679	14.14398	22.61087	33.03152
	$J^{\text{модиф}}$	7.82727	14.55971	23.46155	34.32325
	ΔJ	0.15048	0.41573	0.85068	1.29173
	%	1.92	2.94	3.76	3.91
4	$J^{\text{классич}}$	39.30956	72.66173	113.88517	162.63861
	$J^{\text{модиф}}$	39.45538	73.72885	118.74480	174.83836
	ΔJ	0.14582	1.06712	4.85963	12.19975
	%	0.37	1.47	4.26	7.53
5	$J^{\text{классич}}$	35.85965	67.01230	83.69665	158.59297
	$J^{\text{модиф}}$	35.91027	67.10659	83.93641	159.06287
	ΔJ	0.06062	0.09429	0.23976	0.46990
	%	0.17	0.14	0.29	0.30

момент определяется величинами I_1, I_2, I_3 и краевыми условиями задачи. Не существенная зависимость кинематических характеристик оптимального управления угловым движением КА от его динамических параметров обеспечивает близость решений классической и модифицированной задач оптимального управления угловым движением динамически произвольного КА, что позволило рассматривать решение модифицированной задачи как квазиоптимальное решение классической задачи оптимальной переориентации КА.

Отметим, что кватернион ориентации КА $\mathbf{\Lambda}(t)$ может быть двузначным [2], т.е. $\mathbf{\Lambda}$ и $-\mathbf{\Lambda}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение. Аналитический квазиоптимальный алгоритм управления угловым движением КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации с произвольными краевыми условиями применим в системах управления КА. Предлагаемый алгоритм имеет теоретическое обоснование и с хорошими точностями решает задачу оптимальной переориентации КА. При этом он не требует численного решения краевой задачи принципа максимума или иного сложного численного решения. Полученные результаты могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи элементов не жесткости конструкции КА и различных возмущений. Результаты также могут быть применены для КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности.

На основе предложенного в статье алгоритма переориентации КА может быть аналитически приближенно решена задача управления оптимального в смысле минимума дуального интегрального квадратичного функционала качества в отношении взаимосвязанного (совместного) управления угловым и поступательным движениями КА или, иначе, задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат маневрирования КА. В этом случае построение квазиоптимальной программной траектории и управления пространственным движением КА в классе дуальных (винтовых) конических движений в бикватернионной постановке осуществляется с использованием концепции решения обратных задач динамики для бикватернионных уравнений движения твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control Dynam. 1994. V. 17. № 2.
2. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
3. *Junkins, J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. N.Y.: Elsevier, 1986.
4. *Crassidis J.L., Markley F.L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. N.Y.: Springer, 2014.
5. *Левский М.В.* Ограниченное квадратично оптимальное управление разворотом космического аппарата за фиксированное время // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1.
6. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6.
7. *Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.* Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6.
8. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Quasi-Optimal Solution of the Problem of the Time-Optimal Rotation of a Spacecraft // J. Comput. Sci. Int. 2021. V. 60. № 4.
9. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Analytical Solution of the Problem on an Axisymmetric Spacecraft Attitude Maneuver Optimal with Respect to a Combined Functional // Automat. Remote Contr. 2021. V. 82. № 7.
10. *Акуленко Л.Д., Лилов Л.К.* Синтез квазиоптимальной системы переориентации и стабилизации КА // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 2.
11. *Boyarko G.A., Romano M., Yakimenko O.A.* Time-Optimal Reorientation of a Spacecraft Using an Inverse Dynamics Optimization Method // J. Guidance, Control Dynam. 2011. V. 34. № 4.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
13. *Lastman G.J.* A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Int. J. Contr. 1978. V. 27. № 4.
14. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.
15. *Molodenkov A.V.* On the solution of the Darboux problem //Mechan. Solid. 2007. V. 42. № 2.
16. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Optimal Slew Problem of a Spherically Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motion // J. Comput. Sci. Int. 2013. V. 52. № 3.
17. *Molodenkov A.V., Perelyaev S.E.* Solution of Approximate Equation for Modified Rodrigues Vector and Attitude Algorithm Design // J. Guidance, Control Dynam. 2021. V. 44. № 6.