

---

---

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

---

---

УДК 519.71

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ<sup>1</sup>**

© 2023 г. А. Е. Голубев

*ИПМех РАН, Москва, Россия*

*e-mail: v-algolu@hotmail.com*

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача стабилизации программных траекторий механических систем с учетом ограничений на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. Управление строится при помощи метода бэкстеппинга в сочетании с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные в работе стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту значений переменных управления при приближении переменных состояния системы к граничным значениям. В качестве примера рассмотрена задача построения и стабилизации траектории пространственного движения подводного аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338823040054, EDN: OCLSAO

**Введение.** Разработка методов решения задач построения и стабилизации траекторий движения динамических систем с учетом различных ограничений является одной из популярных и важных тем исследований последних десятилетий. Актуальность исследований обусловлена требованиями безопасности к переходным процессам при управлении техническими системами, подразумевающими, что при отслеживании программной траектории движения объекта управления переменные состояния системы должны находиться в рамках допустимых значений. Отметим также, что в последнее время все большую популярность среди исследователей приобретают задачи группового управления (см., например, [1]), в процессе решения которых от отдельных объектов управления в группе требуется нахождение в отдельной области пространства, непересекающейся с зонами движения других объектов [2].

Конструктивные аналитические методы синтеза нелинейных законов управления на основе использования нелинейных моделей движения объектов управления были предложены и активно исследовались на рубеже 1990-х и 2000-х годов. Наиболее популярными подходами к синтезу нелинейных обратных связей являются метод обратных задач динамики [3], в общем случае базирующийся на применении дифференциально-геометрического аппарата [4, 5], а также метод бэкстеппинга [6] и методы, использующие свойства пассивности механических систем [7].

Результаты, связанные с возможностью учета различного рода ограничений при синтезе нелинейных законов управления с помощью указанных методов, появились позднее [8, 9]. Наиболее эффективным с точки зрения возможностей учета ограничений на состояние системы является метод бэкстеппинга [6]. В сочетании с использованием барьерных функций [10] метод бэкстеппинга позволяет строить стабилизирующие обратные связи, гарантирующие выполнение ограничений на состояние системы [8, 9, 11–16]. Отметим, что предлагаемые в большинстве работ обратные связи, полученные на основе применения барьерных функций Ляпунова в методе бэкстеппинга, приводят к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающих при приближении переменных состояния к граничным значениям [8, 9, 11, 12]. Однако неогра-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

нический рост значений переменных управления будет нежелательным, так как может приводить к насыщению управляющих воздействий и излишнему расходу ресурса управления. Одним из способов решения указанной проблемы является, например, расширение динамики системы за счет использования производных управляющих переменных, предложенное в [14].

В работе решается задача синтеза обратных связей по состоянию, стабилизирующих программные траектории движения механических систем, которые описываются уравнениями Эйлера–Лагранжа, с учетом ограничений на абсолютные величины обобщенных координат, скоростей и ускорений. Управление строится на основе метода бэкстеппинга с помощью логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные в работе стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту значений переменных управления при приближении переменных состояния к граничным значениям. В качестве примера рассмотрена задача построения и стабилизации траектории пространственного движения подводного аппарата.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача стабилизации программных движений динамических систем, имеющих структуру уравнений Эйлера–Лагранжа и записанных следующим образом:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (1.1)$$

Здесь  $q = (q_1, \dots, q_m)^T \in \mathbb{R}^m$  – вектор обобщенных координат;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)^T \in \mathbb{R}^m$  – вектор управляющих сил и моментов;  $M(q)$  – матрица кинетической энергии,  $M(q) = M^T(q) > 0$  при всех  $q \in \mathbb{R}^m$ ;  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  – центробежные и кориолисовы силы;  $D\dot{q}$  – демпфирование;  $G(q) = [\partial\Pi(q)/\partial q]^T$ , где  $\Pi(q)$  – потенциальная энергия системы.

Будем полагать, что для системы (1.1), например с использованием результатов работы [17], построено программное движение  $q = P(t)$ ,  $\tau = \tau_p(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , удовлетворяющее фиксированным начальным и конечным условиям на переменные состояния  $q, \dot{q}$  системы:

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad q(T) = q_*, \quad \dot{q}(T) = \dot{q}_*, \quad (1.2)$$

а также ограничениям

$$|q_i(t)| \leq B_i, \quad |\dot{q}_i(t)| \leq N_i, \quad |\ddot{q}_i(t)| \leq Q_i \quad \text{при всех } t \in [0, T], \quad (1.3)$$

где  $B_i, N_i$  и  $Q_i, i = \overline{1, m}$  – некоторые заданные положительные числа.

Обозначим  $i$ -ю компоненту вектор-функции  $P(t)$  через  $p_i(t)$  и определим соответствующие ошибки отслеживания  $\xi_{li} = q_i - p_i(t)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , программной траектории  $q = P(t)$ . Отметим, что при стабилизации программной траектории  $q = P(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , можно при необходимости рассмотреть значения  $p_i(t)$  при  $t \geq T$ , доопределив соответствующие функции, например, значениями  $p_i(t) = p_i(T)$  при  $t \geq T$ . Далее, без ограничения общности будем полагать, что функции  $p_i(t)$  определены при всех  $t \geq 0$ , а также являются дважды непрерывно дифференцируемыми.

**Задача.** Требуется выбрать компоненты вектора управляющих воздействий  $\tau$  в системе (1.1) в виде обратных связей по состоянию системы таким образом, чтобы при всех  $i \in \overline{1, m}$  для произвольных значений  $\xi_{li}(0)$  и  $\dot{\xi}_{li}(0)$  было гарантировано выполнение условий  $|\xi_{li}(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  с учетом ограничений:

$$|\xi_{li}(t)| \leq \varepsilon_{1i}, \quad |\dot{\xi}_{li}(t)| \leq \varepsilon_{2i}, \quad |\ddot{\xi}_{li}(t)| \leq \varepsilon_{3i}, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$  и  $\varepsilon_{3i}$  – некоторые заданные положительные константы, удовлетворяющие соответственно условиям  $\varepsilon_{1i} \geq |\xi_{li}(0)|$ ,  $\varepsilon_{2i} \geq |\dot{\xi}_{li}(0)|$  и  $\varepsilon_{3i} \geq |\ddot{\xi}_{li}(0)|$ .

**2. Стабилизация программных траекторий с учетом ограничений.** Заметим, что одним из хорошо известных и широко используемых методов синтеза нелинейных стабилизирующих законов управления является метод линеаризации обратной связью (см., например, [5]). В результате

применения метода линеаризации обратной связью для решения задачи стабилизации программной траектории  $q = P(t)$  системы (1.1) получим следующее управление:

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + M(q)(\ddot{P}(t) - \tilde{K}_1\dot{\xi}_1 - \tilde{K}_2\xi_1), \quad (2.1)$$

где  $\xi_1 = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1m})^T$ ,  $\tilde{K}_1 = \text{diag}(\tilde{\kappa}_{11}, \dots, \tilde{\kappa}_{1m})$  и  $\tilde{K}_2 = \text{diag}(\tilde{\kappa}_{21}, \dots, \tilde{\kappa}_{2m})$  – диагональные матрицы размера  $m \times m$  с соответствующими коэффициентами усиления  $\tilde{\kappa}_{1i} > 0$  и  $\tilde{\kappa}_{2i} > 0$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , на главной диагонали.

Замкнутую обратной связью (2.1) систему (1.1) можно записать в виде

$$\dot{\xi}_1 = -\tilde{K}_1\xi_1 - \tilde{K}_2\dot{\xi}_1. \quad (2.2)$$

Положение равновесия  $\xi_1 = 0$ ,  $\dot{\xi}_1 = 0$  линейной системы (2.2) асимптотически устойчиво в целом. Однако известно [18], что за счет выбора элементов матриц  $\tilde{K}_1$  и  $\tilde{K}_2$  явным образом обеспечить выполнение для решений системы (2.2) ограничений (1.4) затруднительно. Поэтому закон управления (2.1) далее в работе будет модифицирован.

Для синтеза управления, стабилизирующего программную траекторию  $q = P(t)$  системы (1.1) с учетом ограничений (1.4), воспользуемся идеями метода бэкстеппинга [6] в сочетании с логарифмическими барьерными функциями Ляпунова [8].

При построении управления рассмотрим сначала функцию

$$V_1(\xi_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_{1i} \ln \left( \frac{\epsilon_{1i}^2}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} \right),$$

где положительные постоянные  $k_{1i}$  определяются далее. Производная по времени функции  $V_1(\xi_1)$  в силу системы (1.1) имеет вид

$$\dot{V}_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} \dot{\xi}_{1i}}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} = \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} (\dot{q}_i - \dot{p}_i(t))}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2}.$$

Для удобства используем переменные  $\xi_{2i} = \dot{q}_i - \alpha_{1i}(\xi_1)$ , где  $\alpha_{1i}(\cdot)$  – непрерывно дифференцируемые функции, определяемые далее. Тогда выражение для  $\dot{V}_1(\xi_1)$  можно представить следующим образом:

$$\dot{V}_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} (\alpha_{1i}(\xi_1) - \dot{p}_i(t))}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} \xi_{2i}}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2}.$$

Выбрав  $\alpha_{1i}(\xi_1) = -\kappa_{1i} \xi_{1i} + \dot{p}_i(t)$ , где  $\kappa_{1i} > 0$  – положительные коэффициенты усиления, получим

$$\dot{V}_1(\xi_1) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \kappa_{1i} \xi_{1i}^2}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} \xi_{2i}}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2}.$$

В качестве функции Ляпунова замкнутой управлением системы используем функцию

$$V_2(\xi_1, \xi_2) = V_1(\xi_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_{2i} \ln \left( \frac{\epsilon_i^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} \right),$$

где  $\xi_2 = (\xi_{21}, \dots, \xi_{2m})^T$ ,  $k_{2i} > 0$  – положительные коэффициенты, определяемые далее,  $\epsilon_i = \epsilon_{2i} - \kappa_{1i} \epsilon_{1i}$ . Будем полагать, что значения  $\kappa_{1i} > 0$  и  $\epsilon_{1i} > 0$ ,  $\epsilon_{2i} > 0$ , такие, что выполняются условия  $\epsilon_i > 0$ . Заметим, что функция  $V_2(\xi_1, \xi_2)$  является положительно определенной в области  $\{(\xi_1^T, \xi_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{1i}| < \epsilon_{1i}, |\xi_{2i}| < \epsilon_i, i \in \overline{1, m}\}$  и неограниченно возрастает  $V_2(\xi_1, \xi_2) \rightarrow +\infty$  при стрем-

лении  $|\xi_{li}| \rightarrow \epsilon_{li} - 0$  или  $|\xi_{2j}| \rightarrow \epsilon_j - 0$  хотя бы для одного значения  $i, 1 \leq i \leq m$ , или соответственно значения  $j, 1 \leq j \leq m$ .

Производная по времени функции  $V_2(\xi_1, \xi_2)$  в силу системы (1.1) запишется следующим образом:

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \xi_{li} \xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i} \xi_{2i} \xi_{2i}}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2}.$$

Для удобства дальнейших рассуждений представим последнее слагаемое в выражении для  $\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2)$  в виде скалярного произведения векторов:

$$a = \left( \frac{k_{21} \xi_{21}}{\epsilon_1^2 - \xi_{21}^2}, \dots, \frac{k_{2m} \xi_{2m}}{\epsilon_m^2 - \xi_{2m}^2} \right)$$

и  $\dot{\xi}_2$ . Тогда с учетом равенства  $\dot{\xi}_2 = \ddot{\xi}_1 + K_1 \dot{\xi}_1 = \ddot{q} - \ddot{P}(t) + K_1 \dot{\xi}_1$ , где  $K_1 = \text{diag}(\kappa_{11}, \dots, \kappa_{1m})$ , производная по времени функции  $V_2(\xi_1, \xi_2)$  в силу системы (1.1) примет вид

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \xi_{li} \xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + a(\ddot{q} - \ddot{P}(t) + K_1 \dot{\xi}_1).$$

Далее, принимая во внимание соотношение (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = & -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \xi_{li} \xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \\ & + a(M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - D\dot{q} - G(q) + \tau) - \ddot{P}(t) + K_1 \dot{\xi}_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Стабилизирующее программную траекторию  $q = P(t)$  системы (1.1) управление выберем следующим образом:

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + M(q)(\ddot{P}(t) - K_1 \dot{\xi}_1 - K_2 \xi_2 - b), \quad (2.4)$$

где  $K_2 = \text{diag}(\kappa_{21}, \dots, \kappa_{2m})$ ,  $\kappa_{2i} > 0$  – положительные коэффициенты усиления,

$$b = (\xi_{21}(\epsilon_1^2 - \xi_{21}^2), \dots, \xi_{2m}(\epsilon_m^2 - \xi_{2m}^2))^T.$$

Подставив управление (2.4) в выражение (2.3), получим

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \xi_{li} \xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i} \kappa_{2i} \xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \sum_{i=1}^m k_{2i} \xi_{2i}^2.$$

В результате выделения полных квадратов по соответствующим переменным справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = & -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \sum_{i=1}^m \left( \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \frac{k_{li} \xi_{li} \xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \frac{k_{li} \xi_{2i}^2}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i} \kappa_{2i} \xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \sum_{i=1}^m \xi_{2i}^2 \left( k_{2i} - \frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i} \kappa_{2i} \xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \\ & - \sum_{i=1}^m \left( \xi_{li} \sqrt{\frac{k_{li} \kappa_{li}}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)}} - \xi_{2i} \sqrt{\frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)}} \right)^2 - \sum_{i=1}^m \xi_{2i}^2 \left( k_{2i} - \frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right) \leq \\ & \leq -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li} \kappa_{li} \xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i} \kappa_{2i} \xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \sum_{i=1}^m \xi_{2i}^2 \left( k_{2i} - \frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, производная по времени функции  $V_2(\xi_1, \xi_2)$  в силу системы (1.1) с управлением (2.4) отрицательно определена в области

$$\{(\xi_1^T, \xi_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{li}| < \sqrt{\epsilon_{li}^2 - k_{li}/(2k_{2i}\kappa_{li})}, |\xi_{2i}| < \epsilon_i, i \in \overline{1, m}\}.$$

Заметим, что для любых положительных коэффициентов усиления  $\kappa_{li}$ ,  $\kappa_{2i}$  в управлении (2.4) за счет выбора положительных постоянных  $k_{li}$ ,  $k_{2i}$  в функции Ляпунова  $V_2(\xi_1, \xi_2)$  значения величин  $\sqrt{\varepsilon_{li}^2 - k_{li}/(2k_{2i}\kappa_{li})}$  можно сделать сколь угодно близкими к соответствующим значениям констант  $\varepsilon_{li}$ .

Система (1.1), замкнутая управлением (2.4), с учетом соотношения  $\xi_2 = \dot{\xi}_1 + K_1\xi_1$  может быть представлена в виде

$$\dot{\xi}_1 = -K_2K_1\xi_1 - (K_1 + K_2)\dot{\xi}_1 - b. \quad (2.5)$$

Тогда в силу справедливости при всех  $t \geq 0$  неравенств

$$|\dot{\xi}_{li}(t)| = |\xi_{2i}(t) - \kappa_{li}\xi_{li}(t)| \leq |\xi_{2i}(t)| + \kappa_{li}|\xi_{li}(t)|$$

с учетом соотношений  $\varepsilon_i = \varepsilon_{2i} - \kappa_{li}\varepsilon_{li}$  положение равновесия  $\xi_1 = 0$ ,  $\dot{\xi}_1 = 0$  системы (2.5), согласно монографии [19], асимптотически устойчиво с областью притяжения

$$\{(\xi_1^T, \dot{\xi}_1^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{li}| < \varepsilon_{li}, |\dot{\xi}_{li}| < \varepsilon_{2i}, i \in \overline{1, m}\}, \quad (2.6)$$

являющейся положительно инвариантным множеством.

Далее, в силу равенства  $q = \xi_1 + P(t)$  для компонент  $q_i(t)$  любого решения  $q = q(t)$  системы (1.1), замкнутой управлением (2.4), с начальной точкой в множестве (2.6) при всех  $t \geq 0$  и  $i \in \overline{1, m}$  верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} |q_i(t)| &= |q_i(t) - p_i(t) + p_i(t)| \leq |q_i(t) - p_i(t)| + |p_i(t)| = |\xi_{li}(t)| + |p_i(t)| \leq \varepsilon_{li} + B_i, \\ |\dot{q}_i(t)| &= |\dot{q}_i(t) - \dot{p}_i(t) + \dot{p}_i(t)| \leq |\dot{q}_i(t) - \dot{p}_i(t)| + |\dot{p}_i(t)| = |\dot{\xi}_{li}(t)| + |\dot{p}_i(t)| \leq \varepsilon_{2i} + N_i. \end{aligned}$$

Дополнительно, с учетом уравнения (2.5) для любого  $t \geq 0$  и  $i \in \overline{1, m}$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |\ddot{q}_i(t)| &= |\ddot{p}_i(t) - \kappa_{li}\kappa_{2i}\dot{\xi}_{li}(t) - (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\dot{\xi}_{li}(t) - \xi_{2i}(t)(\varepsilon_i^2 - \xi_{2i}^2(t))| \leq \\ &\leq |\ddot{p}_i(t)| + \kappa_{li}\kappa_{2i}|\dot{\xi}_{li}(t)| + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})|\dot{\xi}_{li}(t)| + |\xi_{2i}(t)(\varepsilon_i^2 - \xi_{2i}^2(t))| \leq \\ &\leq Q_i + \kappa_{li}\kappa_{2i}\varepsilon_{li} + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\varepsilon_{2i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\varepsilon_i^3 = \\ &= Q_i + \kappa_{li}\kappa_{2i}\varepsilon_{li} + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\varepsilon_{2i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\varepsilon_{2i} - \kappa_{li}\varepsilon_{li})^3 \leq Q_i + \varepsilon_{3i} \end{aligned}$$

при любых значениях констант  $\varepsilon_{li}$ ,  $\varepsilon_{2i}$ ,  $\varepsilon_{3i}$ ,  $\kappa_{li}$  и  $\kappa_{2i}$ , удовлетворяющих условиям:

$$\varepsilon_{3i} \geq \kappa_{li}\kappa_{2i}\varepsilon_{li} + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\varepsilon_{2i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\varepsilon_{2i} - \kappa_{li}\varepsilon_{li})^3.$$

Здесь постоянные  $B_i$ ,  $N_i$  и  $Q_i$  взяты из ограничений (1.3), выполняющихся для программной траектории  $q = P(t)$ .

Заметим, что правые части систем (2.2) и (2.5) при соотношениях коэффициентов усиления  $\tilde{\kappa}_{li} = \kappa_{li}\kappa_{2i}$  и  $\tilde{\kappa}_{2i} = \kappa_{li} + \kappa_{2i}$  различаются за счет присутствия в правой части системы (2.5) слагаемого  $b$ ,  $i$ -я компонента  $b_i$  которого в переменных  $\xi_{li}$ ,  $\dot{\xi}_{li}$  имеет вид

$$\begin{aligned} b_i &= \xi_{2i}(\varepsilon_i^2 - \xi_{2i}^2) = \\ &= (\dot{\xi}_{li} + \kappa_{li}\xi_{li})(\varepsilon_{2i} - \kappa_{li}\varepsilon_{li})^2 - (\dot{\xi}_{li} + \kappa_{li}\xi_{li})^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, наличие дополнительного слагаемого  $b$  в обратной связи (2.4) по сравнению с законом управления (2.1), найденным при помощи метода линеаризации обратной связи, обеспечивает выполнение ограничений (1.4). Отметим, что при стремлении  $|\xi_{li}| \rightarrow \varepsilon_{li} - 0$  и/или  $|\dot{\xi}_{li}| \rightarrow \varepsilon_{2i} - 0$  для любого  $i$  соответствующая функция (2.7) не является неограниченно возрастающей и имеет конечный предел. В этом свойстве дополнительной стабилизирующей компоненты  $b$  в обратной связи (2.4) заключается существенное отличие предлагаемого в работе способа

применения метода бэкстеппинга от других работ, например [9, 11, 12]. Полученные в [9, 11, 12] обратные связи на основе метода бэкстеппинга приводят к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающих при приближении переменных состояния к граничным значениям.

Так, по аналогии с результатами работ [9, 12] можно предложить следующую стабилизирующую обратную связь:

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + M(q)(\ddot{P}(t) - K_1\dot{\xi}_1 - K_2\dot{\xi}_2 - \bar{b}), \quad (2.8)$$

где

$$\bar{b} = \left( \frac{k_{11}\xi_{11}(\epsilon_1^2 - \xi_{21}^2)}{k_{21}(\epsilon_{11}^2 - \xi_{11}^2)}, \dots, \frac{k_{1m}\xi_{1m}(\epsilon_m^2 - \xi_{2m}^2)}{k_{2m}(\epsilon_{1m}^2 - \xi_{1m}^2)} \right)^T.$$

Производная по времени функции  $V_2(\xi_1, \xi_2)$  в силу системы (1.1) с управлением (2.8) примет вид

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{1i}k_{1i}\xi_{1i}^2}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}k_{2i}\xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2}$$

и является отрицательно определенной в области  $\{(\xi_1^T, \xi_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{1i}| < \epsilon_{1i}, |\xi_{2i}| < \epsilon_i, i \in \overline{1, m}\}$ .

Однако, несмотря на то, что управление (2.8) также будет решением задачи стабилизации программной траектории  $q = P(t)$  системы (1.1) с учетом ограничений (1.4), при стремлении  $|\xi_{1i}| \rightarrow \epsilon_{1i} - 0$  для любого  $i$  соответствующая  $i$ -я компонента вектор-функции  $\bar{b}$  может неограниченно возрастать. Следовательно, полученная в настоящей работе стабилизирующая обратная связь (2.4) предпочтительнее управления (2.8).

**3. Решение задачи управления пространственным движением подводного аппарата.** Для описания движения аппарата используются две системы координат: инерциальная земная система координат  $Oxyz$  и неинерциальная система координат  $O_b x_b y_b z_b$ , жестко связанная с корпусом подводного аппарата. Начало  $O_b$  неинерциальной системы координат обычно выбирается совпадающим с центром тяжести или центром плавучести корпуса аппарата, а направления осей  $O_b x_b$ ,  $O_b y_b$  и  $O_b z_b$  фиксируются вдоль главных осей инерции корпуса. Продольная ось  $O_b x_b$  направлена вдоль корпуса от хвостовой части к передней, поперечная ось  $O_b y_b$  выбирается ортогонально правому борту корпуса аппарата в горизонтальной плоскости, а нормальная ось  $O_b z_b$  ориентирована сверху вниз [20].

Поступательное движение аппарата описывается координатами  $\eta_1 = (x, y, z)^T$  точки  $O_b$  в инерциальной системе координат  $Oxyz$  и координатами  $v_1 = (u, v, w)^T$  вектора скорости точки  $O_b$  в неинерциальной системе координат  $O_b x_b y_b z_b$ . Вращательное движение корпуса аппарата задается при помощи угловых координат  $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$  поворота неинерциальной системы координат  $O_b x_b y_b z_b$  относительно инерциальной системы координат  $Oxyz$ , где  $\varphi$  – угол крена,  $\theta$  – угол тангажа,  $\psi$  – угол рысканья, а также вектора  $v_2 = (p, q, r)^T$  угловых скоростей вращения корпуса аппарата относительно соответствующих осей  $O_b x_b$ ,  $O_b y_b$  и  $O_b z_b$  неинерциальной системы координат  $O_b x_b y_b z_b$  [20].

Координаты вектора скорости точки  $O_b$  в инерциальной и неинерциальной системах координат, согласно монографии [20], связаны соответственно соотношениями

$$\dot{\eta}_1 = J_1(\eta_2)v_1, \quad v_1 = J_1^{-1}(\eta_2)\dot{\eta}_1, \quad (3.1)$$

где

$$J_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \varphi \sin \psi \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta \qquad \qquad \qquad \cos \theta \sin \varphi \qquad \qquad \qquad \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Далее, угловые скорости вращения корпуса аппарата вокруг осей неинерциальной системы координат  $O_b x_b y_b z_b$  пересчитываются в производные по времени угловых координат  $\eta_2$  следующим образом [20]:

$$\dot{\eta}_2 = J_2(\eta_2) v_2,$$

где

$$J_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 \sin \varphi \tan \theta \cos \varphi \tan \theta \\ 0 \quad \cos \varphi \quad -\sin \varphi \\ 0 \sin \varphi / \cos \theta \cos \varphi / \cos \theta \end{pmatrix}.$$

В итоге, кинематика движения подводного аппарата может быть записана в виде

$$\dot{\eta} = J(\eta) v, \tag{3.2}$$

где  $\eta = (\eta_1^T, \eta_2^T)^T$ ,  $v = (v_1^T, v_2^T)^T$ ,

$$J(\eta) = \begin{pmatrix} J_1(\eta_1) & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $O_{3 \times 3}$  – нулевая матрица размера  $3 \times 3$ .

Динамические уравнения поступательного и вращательного движения корпуса подводного аппарата в векторных обозначениях представлены ниже [20]:

$$M_{RB} \dot{v} + C_{RB}(v) v = \tau_{RB}, \tag{3.3}$$

где  $\tau_{RB} = (F_{x_b}, F_{y_b}, F_{z_b}, \tau_{x_b}, \tau_{y_b}, \tau_{z_b})^T$ ,

$$M_{RB} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix},$$

$$C_{RB}(v) = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & -\bar{C}_{RB}^T(v) \\ \bar{C}_{RB}(v) & J_{RB}(v) \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_{RB}(v) = \begin{pmatrix} -m(y_G q + z_G r) & m(y_G p + w) & m(z_G p - v) \\ m(x_G q - w) & -m(z_G r + x_G p) & m(z_G q + u) \\ m(x_G r + v) & m(y_G r - u) & -m(x_G p + y_G q) \end{pmatrix},$$

$$J_{RB}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -I_{yz} q - I_{xz} p + I_z r & I_{yz} r + I_{xy} p - I_y q \\ I_{yz} q + I_{xz} p - I_z r & 0 & -I_{xz} r - I_{xy} q + I_x p \\ -I_{yz} r - I_{xy} p + I_y q & I_{xz} r + I_{xy} q - I_x p & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $M_{RB}$  – матрица инерции твердого тела,  $C_{RB}(v)$  – матрица кориолисовых и центробежных сил,  $m$  – масса аппарата,  $r_G = (x_G, y_G, z_G)^T$  – координаты центра масс корпуса аппарата в подвижной системе координат  $O_b x_b y_b z_b$ ;  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции корпуса относительно осей  $O_b x_b, O_b y_b$  и  $O_b z_b$  соответственно;  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  – центробежные моменты инерции;  $F_{x_b}, F_{y_b}, F_{z_b}$  – проекции равнодействующей всех приложенных к корпусу аппарата сил на оси  $O_b x_b, O_b y_b$  и  $O_b z_b$ ;

$\tau_{x_b}, \tau_{y_b}, \tau_{z_b}$  — суммарные моменты сил, действующих на корпус, вокруг осей  $O_b x_b, O_b y_b$  и  $O_b z_b$ . В частности, если оси  $O_b x_b, O_b y_b$  и  $O_b z_b$  направлены вдоль главных осей инерции корпуса аппарата, то имеют место равенства  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ .

Внешние силы и моменты, действующие на корпус подводного аппарата, характеризуются компонентами вектора  $\tau_{RB}$  в правой части динамической системы (3.3), который имеет следующую структуру:

$$\tau_{RB} = \tau_H + \tau, \quad (3.4)$$

где  $\tau_H$  включает влияние присоединенной массы воды, гидродинамического демпфирования, гравитации и выталкивающей силы;  $\tau$  представляет собой силы и моменты, создаваемые управляющими органами аппарата.

Компонета  $\tau_H$  в соотношении (3.4), согласно [20], имеет вид

$$\tau_H = -M_A \dot{v} - C_A(v)v - D(v)v - g(\eta), \quad (3.5)$$

где

$$M_A = - \begin{pmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{pmatrix} > 0,$$

$$C_A(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r,$$

$$a_2 = X_{\dot{v}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r,$$

$$a_3 = X_{\dot{w}}u + Y_{\dot{w}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r,$$

$$b_1 = X_{\dot{p}}u + Y_{\dot{p}}v + Z_{\dot{p}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r,$$

$$b_2 = X_{\dot{q}}u + Y_{\dot{q}}v + Z_{\dot{q}}w + K_{\dot{q}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r,$$

$$b_3 = X_{\dot{r}}u + Y_{\dot{r}}v + Z_{\dot{r}}w + K_{\dot{r}}p + M_{\dot{r}}q + N_{\dot{r}}r.$$

Матрица  $C_A(v)$  гидродинамических кориолисовых и центростремительных сил является кососимметрической при всех  $v \in \mathbb{R}^6$ , матрица  $D(v)$  гидродинамического демпфирования — положительно определенной при всех  $v \in \mathbb{R}^6$ , слагаемое  $g(\eta)$  характеризует действие силы тяжести и выталкивающей силы на корпус аппарата и определяется далее. Элементы матрицы  $M_A$  добавочной инерции представляют собой коэффициенты линеаризации соответствующих компонент сил и моментов, связанных с влиянием присоединенной массы воды, в окрестности нулевых значений скоростей. В частности, в случае малых скоростей движения подводного аппарата, согласно [20], имеют место равенства:  $X_{\dot{v}} = 0, X_{\dot{w}} = 0, X_{\dot{p}} = 0, X_{\dot{q}} = 0, X_{\dot{r}} = 0, Y_{\dot{u}} = 0, Y_{\dot{w}} = 0, Y_{\dot{p}} = 0, Y_{\dot{q}} = 0, Y_{\dot{r}} = 0, Z_{\dot{u}} = 0, Z_{\dot{v}} = 0, Z_{\dot{p}} = 0, Z_{\dot{q}} = 0, Z_{\dot{r}} = 0, K_{\dot{u}} = 0, K_{\dot{v}} = 0, K_{\dot{w}} = 0, K_{\dot{q}} = 0, K_{\dot{r}} = 0, M_{\dot{u}} = 0,$

$M_{\dot{v}} = 0$ ,  $M_{\dot{w}} = 0$ ,  $M_{\dot{p}} = 0$ ,  $M_{\dot{r}} = 0$ ,  $N_{\dot{u}} = 0$ ,  $N_{\dot{v}} = 0$ ,  $N_{\dot{w}} = 0$ ,  $N_{\dot{p}} = 0$ ,  $N_{\dot{q}} = 0$  и  $D(v) = -\text{diag}(X_u + X_{u|u}|u|, Y_v + Y_{v|v}|v|, Z_w + Z_{w|w}|w|, K_p + K_{p|p}|p|, M_q + M_{q|q}|q|, N_r + N_{r|r}|r|)$ , где  $X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r$  и  $X_{u|u}, Y_{v|v}, Z_{w|w}, K_{p|p}, M_{q|q}, N_{r|r}$  – некоторые отрицательные коэффициенты.

Вектор-функция  $g(\eta)$  в выражении (3.5), описывающая влияние величины силы тяжести  $W = mg$  и величины выталкивающей силы  $B = \rho gV$  на динамику корпуса аппарата, записывается следующим образом [20]:

$$g(\eta) = - \begin{pmatrix} f_G(\eta_2) + f_B(\eta_2) \\ r_G \times f_G(\eta_2) + r_B \times f_B(\eta_2) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$f_G(\eta_2) = J_1^{-1}(\eta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{pmatrix}, \quad f_B(\eta_2) = -J_1^{-1}(\eta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix},$$

где  $r_B = (x_B, y_B, z_B)^T$  – координаты центра плавучести корпуса аппарата в подвижной системе координат  $O_b x_b y_b z_b$ ,  $\rho$  – плотность воды,  $V$  – объем вытесненной корпусом аппарата жидкости, знак умножения  $\times$  использован для обозначения векторного произведения соответствующих векторов. Покомпонентно выражение (3.6) примет вид

$$g(\eta) = \begin{pmatrix} (W - B) \sin \theta \\ -(W - B) \cos \theta \sin \varphi \\ -(W - B) \cos \theta \cos \varphi \\ -(y_G W - y_B B) \cos \theta \cos \varphi + (z_G W - z_B B) \cos \theta \sin \varphi \\ (z_G W - z_B B) \sin \theta + (x_G W - x_B B) \cos \theta \cos \varphi \\ -(x_G W - x_B B) \cos \theta \sin \varphi - (y_G W - y_B B) \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

В итоге, принимая во внимание соотношения (3.2) – (3.7), получим следующую математическую модель движения подводного аппарата, записанную относительно неинерциальной системы координат  $O_b x_b y_b z_b$ :

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau, \quad \dot{\eta} = J(\eta)v, \quad (3.8)$$

где  $M = M_{RB} + M_A$ ,  $C(v) = C_{RB}(v) + C_A(v)$ .

Тогда с учетом равенства (3.2) уравнения движения корпуса аппарата в векторном виде относительно инерциальной земной системы координат  $Oxyz$  примут вид

$$M_\eta(\eta)\ddot{\eta} + C_\eta(\eta, v)\dot{\eta} + D_\eta(\eta, v)\dot{\eta} + g(\eta) = \tau, \quad v = J^{-1}(\eta)\dot{\eta}, \quad (3.9)$$

где  $M_\eta(\eta) = MJ^{-1}(\eta)$ ,  $C_\eta(\eta, v) = [C(v) - MJ^{-1}(\eta)j(\eta)]J^{-1}(\eta)$ ,  $D_\eta(\eta, v) = D(v)J^{-1}(\eta)$ .

Для построения программной траектории  $\eta = P(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , движения корпуса подводного аппарата воспользуемся результатами, полученными в работе [17]. Используем далее обозначения  $x_{11} = x$ ,  $x_{12} = y$ ,  $x_{13} = z$ ,  $x_{14} = \varphi$ ,  $x_{15} = \theta$ ,  $x_{16} = \psi$  и перепишем условия (1.2):

$$x_{1i}(0) = x_{0i}, \quad \dot{x}_{1i}(0) = \dot{x}_{0i}, \quad x_{1i}(T) = x_{*i}, \quad \dot{x}_{1i}(T) = \dot{x}_{*i}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

В частности, рассмотрим, например, значения  $\dot{x}_{0i} = \dot{x}_{*i} = 0$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , и дополнительно потребуем, чтобы искомая программная траектория удовлетворяла условиям  $\ddot{x}_{1i}(0) = 0$  и  $\ddot{x}_{1i}(T) = 0$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Будем также полагать, что время движения  $T$  не задано в постановке задачи.

Фиксируем произвольные положительные значения  $T_1, T_3, T_5$  и  $\varepsilon_1 > 1$ ,  $\varepsilon_2 > 1$ . Для синтеза программной траектории из начальной точки  $(x_{01}, 0, \dots, x_{06}, 0)^T$  в конечную точку  $(x_{*1}, 0, \dots, x_{*6}, 0)^T$  в фазовом пространстве  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})^T$  системы (3.9) используем дополнительные

промежуточные точки с координатами  $(x_{j1}, \dot{x}_{j1}, \dots, x_{j6}, \dot{x}_{j6})^T$ ,  $j = \overline{1,4}$ , где значения  $x_{ji}, \dot{x}_{ji}$ ,  $j = \overline{1,4}$ ,  $i = \overline{1,6}$ , удовлетворяют условиям  $\dot{x}_{2i} = \dot{x}_{3i}$  и соответствующим соотношениям [17]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= \frac{\dot{x}_{2i}}{\varepsilon_1}, & x_{1i} &= \frac{x_{2i} + (\varepsilon_1 - 1)(1 + 2\varepsilon_1)x_{0i}}{\varepsilon_1(2\varepsilon_1 - 1)}, \\ \dot{x}_{4i} &= \frac{\dot{x}_{2i}}{\varepsilon_2}, & x_{4i} &= \frac{x_{3i} + (\varepsilon_2 - 1)(1 + 2\varepsilon_2)x_{*i}}{\varepsilon_2(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ x_{2i} &= \frac{T_1(2\varepsilon_1 - 1)x_{*i} + (3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ x_{3i} &= \frac{(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3)x_{*i} + T_5(2\varepsilon_2 - 1)x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ \dot{x}_{2i} &= \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Программная траектория  $\eta = P(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , запишется покомпонентно следующим образом:

$$x_{li} = p_i(t) = \left\{ p_{ji}(t), t \in \left[ \sum_{k=0}^{j-1} T_k, \sum_{k=0}^j T_k \right], j = \overline{1,5} \right\}, \quad i = \overline{1,6}, \quad (3.10)$$

где  $T = \varepsilon_1 T_1 + T_3 + \varepsilon_2 T_5$ ,  $T_2 = (\varepsilon_1 - 1)T_1$ ,  $T_4 = (\varepsilon_2 - 1)T_5$ , многочлены  $p_{ji}(t)$  имеют соответствующий вид

$$p_{ji}(t) = x_{j-1,i} + \dot{x}_{j-1,i} \left( t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right) + c_{1ij} \left( t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^2 + c_{2ij} \left( t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^3, \quad j = \overline{1,5}, \quad i = \overline{1,6}.$$

Здесь коэффициенты  $c_{1ij}, c_{2ij}$  следующие [17]:

$$c_{1ij} = -((2\dot{x}_{j-1,i} + \dot{x}_{ji})T_j + 3(x_{j-1,i} - x_{ji}))/T_j^2, \quad c_{2ij} = ((\dot{x}_{j-1,i} + \dot{x}_{ji})T_j + 2(x_{j-1,i} - x_{ji}))/T_j^3.$$

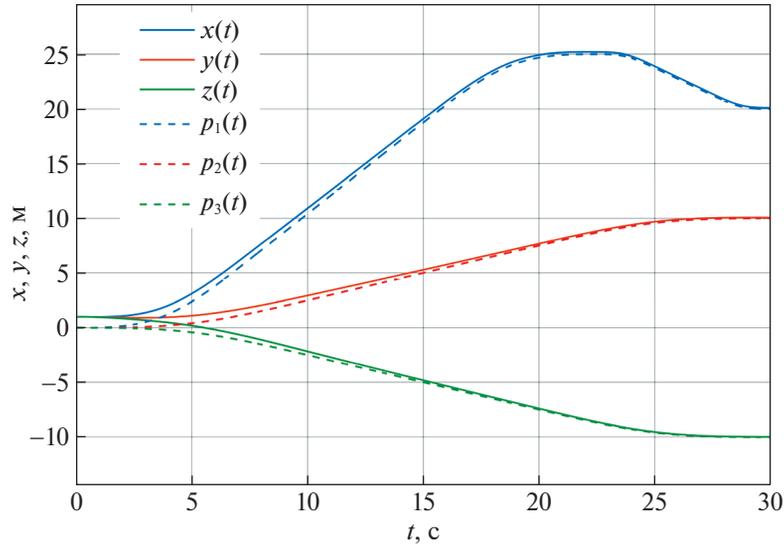
Далее, согласно работе [17], для выполнения ограничений  $|\dot{x}_{li}(t)| \leq N_i$  и  $|\ddot{x}_{li}(t)| \leq Q_i$  при всех  $t \in [0, T]$ ,  $i = \overline{1,6}$ , на значения первых и вторых производных по времени соответствующих функций (3.10) необходимо и достаточно, чтобы выбранные значения  $T_1, T_3, T_5$  и  $\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_2 > 1$  удовлетворяли следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \frac{3|x_{*i} - x_{0i}|}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)} &\leq N_i, \\ \frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_1 T_1(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))} &\leq Q_i, \\ \frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_2 T_5(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))} &\leq Q_i. \end{aligned}$$

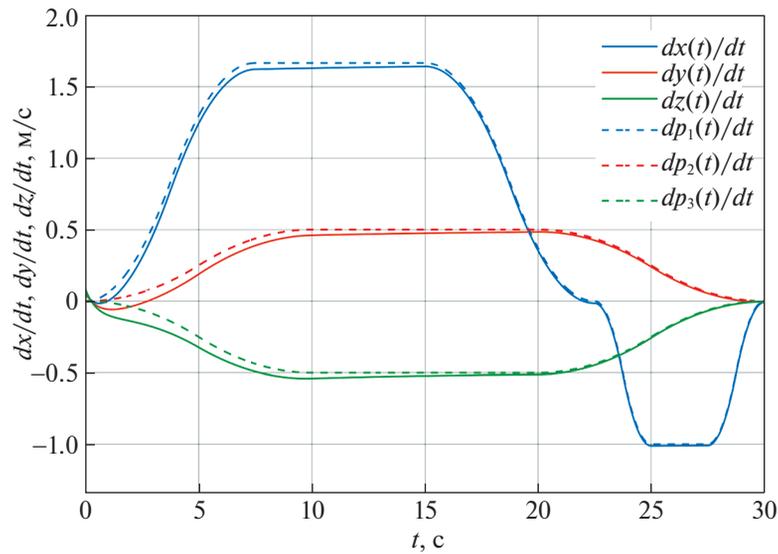
Дополнительно, если для любого  $i = \overline{1,6}$  выполнены условия

$$\max\{|x_{0i}|, |x_{*i}|\} \leq B_i,$$

то при всех  $t \in [0, T]$  справедливы оценки  $|x_{li}(t)| \leq B_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ .



**Рис. 1.** Координаты  $\eta_1 = (x, y, z)^T$  центра масс корпуса аппарата как функции времени и их программные значения  $x = p_1(t)$ ,  $y = p_2(t)$ ,  $z = p_3(t)$



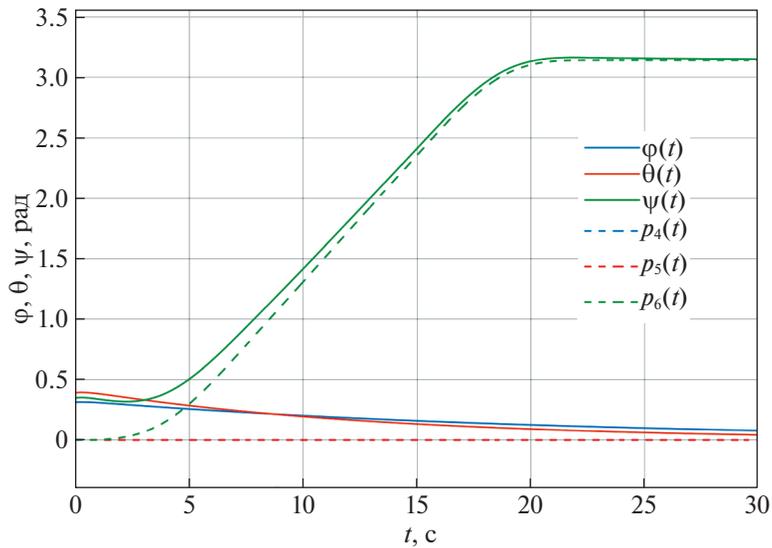
**Рис. 2.** Координаты вектора скорости  $\dot{\eta}_1 = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$  поступательного движения центра масс корпуса аппарата как функции времени и их программные значения  $\dot{x} = \dot{p}_1(t)$ ,  $\dot{y} = \dot{p}_2(t)$ ,  $\dot{z} = \dot{p}_3(t)$

Наконец, управление, стабилизирующее программную траекторию  $\eta = P(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , системы (3.9), покомпонентно заданную соотношениями (3.10), с учетом соответствующих ограничений (1.4), согласно формуле (2.4), запишется следующим образом:

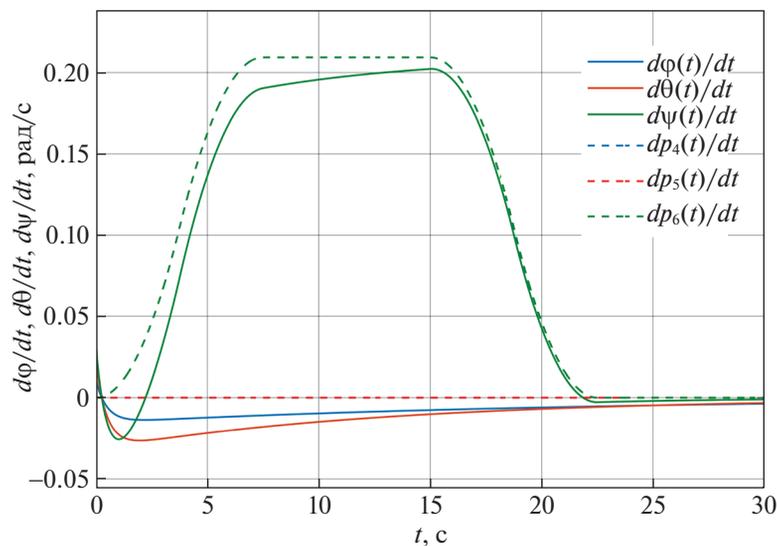
$$\tau = C_\eta(\eta, v)\dot{\eta} + D_\eta(\eta, v)\ddot{\eta} + g(\eta) + M_\eta(\eta)(\ddot{P}(t) - K_2 K_1 \xi_1 - (K_1 + K_2)\dot{\xi}_1 - b), \quad (3.11)$$

где  $K_1 = \text{diag}(\kappa_{11}, \dots, \kappa_{16}) > 0$ ,  $K_2 = \text{diag}(\kappa_{21}, \dots, \kappa_{26}) > 0$ ,  $\xi_1 = \eta - P(t)$ ,

$$b = (b_1, \dots, b_6)^T, \quad b_i = (\xi_{li} + \kappa_{li}\dot{\xi}_{li})((\epsilon_{2i} - \kappa_{li}\epsilon_{li})^2 - (\xi_{li} + \kappa_{li}\dot{\xi}_{li})^2), \quad i \in \overline{1, 6}.$$

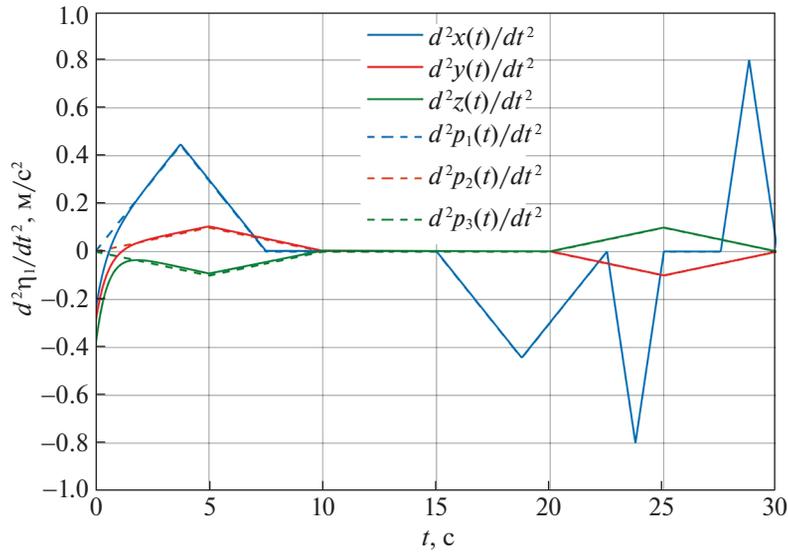


**Рис. 3.** Угловые координаты  $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$  вращения корпуса аппарата вокруг центра масс как функции времени и их программные значения  $\varphi = p_4(t)$ ,  $\theta = p_5(t)$ ,  $\psi = p_6(t)$

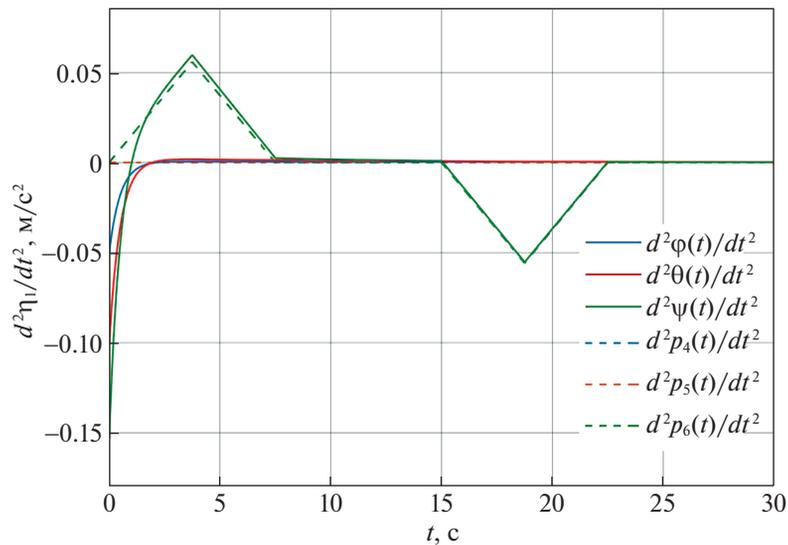


**Рис. 4.** Угловые скорости  $\dot{\eta}_2 = (\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T$  вращения корпуса аппарата вокруг центра масс как функции времени и их программные значения  $\dot{\varphi} = \dot{p}_4(t)$ ,  $\dot{\theta} = \dot{p}_5(t)$ ,  $\dot{\psi} = \dot{p}_6(t)$

Результаты численного моделирования системы (3.9) с управлением (3.11) представлены на рис. 1–8 для следующих значений физических и геометрических параметров модели, соответствующих подводному аппарату Kambara [21, 22]:  $m = 117$  кг,  $g = 9.81$  м · с<sup>-2</sup>,  $B = 1108$  Н,  $I_x = 10.7$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_y = 11.8$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_z = 13.4$  кг · м<sup>2</sup>,  $x_G = 0$  м,  $y_G = 0$  м,  $z_G = 0$  м,  $x_B = -0.017$  м,  $y_B = 0$  м,  $z_B = -0.115$  м,  $X_u = -58.4$  кг,  $Y_v = -23.8$  кг,  $Z_w = -23.8$  кг,  $K_p = -3.38$  кг · м<sup>2</sup>/рад,  $M_q = -1.18$  кг · м<sup>2</sup>/рад,  $N_r = -2.67$  кг · м<sup>2</sup>/рад,  $X_u = -120$  кг/с,  $Y_v = -90$  кг/с,  $Z_w = -150$  кг/с,  $K_p = -15$  Н · м · с/рад,  $M_q = -15$  Н · м · с/рад,  $N_r = -18$  Н · м · с/рад,  $X_{|u|} = -90$  кг/м,  $Y_{|v|} = -90$  кг/м,  $Z_{|w|} = -120$  кг/м,  $K_{p|p|} = -10$  кг · м<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup>,  $M_{q|q|} = -12$  кг · м<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup>,  $N_{r|r|} = -15$  кг · м<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup>.



**Рис. 5.** Координаты вектора ускорения  $\ddot{\eta}_1 = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T$  поступательного движения центра масс корпуса аппарата как функции времени и их программные значения  $\ddot{x} = \ddot{p}_1(t)$ ,  $\ddot{y} = \ddot{p}_2(t)$ ,  $\ddot{z} = \ddot{p}_3(t)$



**Рис. 6.** Угловые ускорения  $\ddot{\eta}_2 = (\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi})^T$  вращения корпуса аппарата вокруг центра масс как функции времени и их программные значения  $\ddot{\phi} = \ddot{p}_4(t)$ ,  $\ddot{\theta} = \ddot{p}_5(t)$ ,  $\ddot{\psi} = \ddot{p}_6(t)$

Построена программная траектория смещения центра масс корпуса аппарата из начала координат  $\eta_1 = (0, 0, 0)^T$  в точку с координатами  $\eta_1 = (20, 10, -10)^T$  и пространственного разворота корпуса на  $180^\circ$  по углу рысканья  $\psi$ . В качестве начальных и конечных значений переменных состояния системы (3.9) для программной траектории рассматривались соответственно  $\eta(0) = \eta_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ ,  $\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  и  $\eta(T) = \eta_* = (20, 10, -10, 0, 0, \pi)^T$ ,  $\dot{\eta}(T) = \dot{\eta}_* = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ . При планировании программной траектории были выбраны значения  $T = 30$  с,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2$ ,  $T_1 = T/(3\epsilon_1)$ ,  $T_5 = T/(3\epsilon_2)$ .

Для численного моделирования процесса стабилизации построенной программной траектории были использованы следующие начальные значения:  $\xi_1(0) = (1, 1, 1, \pi/10, \pi/8, \pi/9)^T$

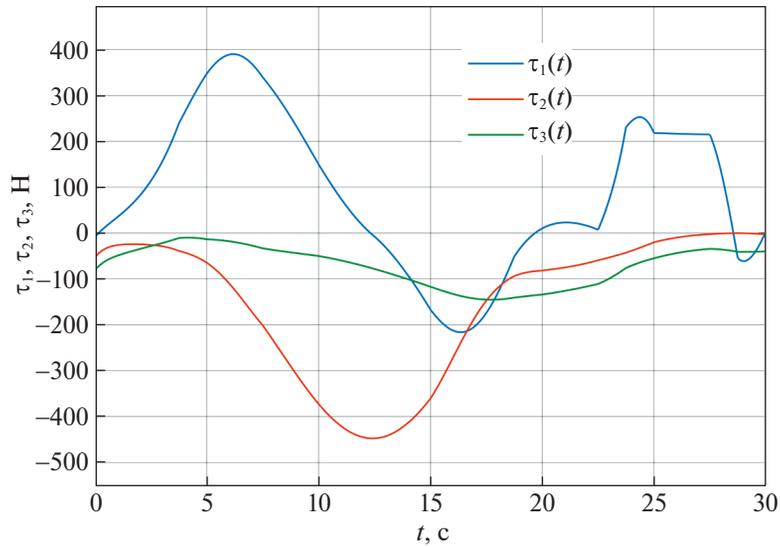


Рис. 7. Управляющие силы  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  как функции времени

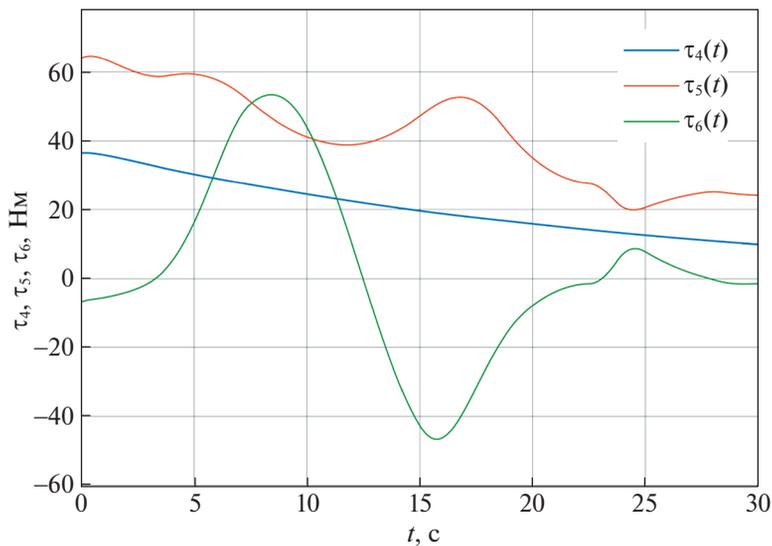


Рис. 8. Управляющие моменты  $\tau_4$ ,  $\tau_5$ ,  $\tau_6$  как функции времени

и  $\xi_i(0) = (0.05, 0.06, 0.08, 0.01, 0.02, 0.03)^T$  соответствующих переменных отклонения и их производных, в также значения параметров управления (3.11):  $\varepsilon_{1i} = 1.001|\xi_{1i}(0)|$ ,  $\varepsilon_{2i} = 1.5|\xi_{1i}(0)|$ ,  $\kappa_{1i} = 0.999\varepsilon_{2i}/\varepsilon_{1i}$ ,  $\kappa_{2i} = 2$ ,  $i = \overline{1,6}$ .

**Заключение.** Рассмотрена задача стабилизации программных траекторий движения механических систем с учетом ограничений на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. Для построения стабилизирующих законов управления применен метод бэкстеппинга, использующий логарифмические барьерные функции Ляпунова. Полученные в работе стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту значений переменных управления при приближении переменных состояния системы к граничным значениям. В качестве примера решена задача построения и стабилизации траектории пространственного движения подводного аппарата. Отметим, что возможность учета ограничений на значения обобщенных координат при построении и стабилизации

ции траекторий движения механических систем важна, например, при решении задач группового управления, когда от отдельных объектов управления в группе может требоваться нахождение в отдельной области пространства, непересекающейся с зонами движения других объектов. Выполнение ограничений на значения обобщенных скоростей позволяют, например, учитывать требования малости соответствующих скоростей движения при использовании в математических моделях линеаризованных выражений для сил и моментов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Olfati-Saber R.* Flocking for Multi-agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2006. V. 51 (3). P. 401–420.
2. *Liu H., Chen G., Tian X.* Cooperative Formation Control for Multiple Surface Vessels Based on Barrier Lyapunov Function and Self-structuring Neural Networks // *Ocean Engineering.* 2020. V. 216. 108163.
3. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 326 с.
4. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995. 549 p.
5. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
6. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
7. *Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H.* Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications. London: Springer-Verlag, 1998. 543 p.
8. *Ngo K.B., Mahony R., Jiang Z.P.* Integrator Backstepping Using Barrier Functions for Systems with Multiple State Constraints // *Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, Spain, 2005.* P. 8306–8312.
9. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov Functions for the Control of Output-constrained Nonlinear Systems // *Automatica.* 2009. V. 45 (4). P. 918–927.
10. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2009. 716 p.
11. *Niu B., Zhao J.* Barrier Lyapunov Functions for the Output Tracking Control of Constrained Nonlinear Switched Systems // *Systems and Control Letters.* 2013. V. 62 (10). P. 963–971.
12. *Sachan K., Padhi R.* Barrier Lyapunov Function Based Output-constrained Control of Nonlinear Euler-Lagrange Systems // *Proc. 15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). Singapore, 2018.* P. 686–691.
13. *Golubev A.E., Botkin N.D., Krishchenko A.P.* Backstepping Control of Aircraft Take-off in Windshear // *IFAC-PapersOnLine.* 2019. V. 52 (16). P. 712–717.
14. *Garg T., Roy S.B.* Barrier Lyapunov Function Based Controller Design for Euler-Lagrange Systems with Reduced Control Effort // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. V. 53 (1). P. 459–464.
15. *Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z.* Barrier Lyapunov Function-based Fixed-time FTC for High-order Nonlinear Systems with Predefined Tracking Accuracy // *Nonlinear Dynamics.* 2022. V. 110. P. 381–394.
16. *Golubev A., Kovtanyuk A., Lampe R.* Modeling of Cerebral Blood Flow Autoregulation Using Mathematical Control Theory // *Mathematics.* 2022. V. 10 (12). 2060.
17. *Голубев А.Е.* Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка // *Изв. РАН. ТисУ.* 2021. № 2. С. 126–137.
18. *Sussmann H.J., Kokotovic P.V.* The Peaking Phenomenon and the Global Stabilization of Nonlinear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1991. V. 36 (4). P. 424–440.
19. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
20. *Fossen T.I.* Guidance and Control of Ocean Vehicles. Chichester: John Wiley and Sons, 1994.
21. *Silpa-Anan C., Zelinsky A.* Kambara: Past, Present, and Future // *Proc. 2001 Australian Conf. on Robotics and Automation.* Sydney, 2001. P. 61–66.
22. *Silpa-Anan C.* Autonomous Underwater Robot: Vision and Control. Master thesis. Canberra: Australian National University, 2001. <https://doi.org/10.25911/5d626dd9b96ec>.